

Maturità 2023: in preparazione alla seconda prova scritta per il liceo scientifico

Relatori:

Leonardo Sasso

Claudio Zanone



Di che cosa parleremo

- ① Riflessioni sulla maturità
- ② Spunti e indicazioni per preparare le nuove tracce d'esame
- ③ Presentazione delle simulazioni di seconda prova da noi preparate



1. La normativa

Prova d'esame – Predisposizione e struttura

- La prova torna ad essere predisposta dal Ministero.
- La prova consiste nella risoluzione, a scelta del candidato, di **un problema** (scelto tra due) e di **quattro quesiti** (scelti tra otto).



Prova d'esame – Finalità (dai quadri di riferimento)

La prova è finalizzata ad accertare l'acquisizione dei **principali concetti e metodi della matematica di base**, anche in prospettiva storico-critica, in relazione ai contenuti previsti dalle vigenti Indicazioni Nazionali per l'intero percorso di studio del Liceo Scientifico e dettagliati nel relativo quadro di riferimento. In particolare la prova mira a rilevare la comprensione e la padronanza del metodo dimostrativo nei vari ambiti della matematica e la capacità di **argomentare** correttamente applicando metodi e concetti matematici, attraverso l'uso del ragionamento logico.



Prova d'esame – Contenuti (dai quadri di riferimento)

Nuclei tematici fondamentali
ARITMETICA E ALGEBRA Rappresentazioni dei numeri e operazioni aritmetiche Algebra dei polinomi Equazioni, disequazioni e sistemi
GEOMETRIA EUCLIDEA E CARTESIANA Triangoli, cerchi, parallelogrammi Funzioni circolari Sistemi di riferimento e luoghi geometrici Figure geometriche nel piano e nello spazio
INSIEMI E FUNZIONI Proprietà delle funzioni e delle successioni Funzioni e successioni elementari Calcolo differenziale Calcolo integrale
PROBABILITÀ E STATISTICA Probabilità di un evento Dipendenza probabilistica Statistica descrittiva



Prova d'esame – Utilizzo della calcolatrice grafica

L'Articolo 20, dell'O.M. 45 del 9 marzo 2023 riporta quanto segue.

12. Ai fini dello svolgimento della seconda prova scritta è consentito l'uso delle calcolatrici scientifiche o delle calcolatrici grafiche purché non dotate della capacità di elaborazione simbolica algebrica (CAS - Computer Algebra System o SAS - Symbolic Algebra System), cioè della capacità di manipolare espressioni matematiche, e non abbiano la disponibilità di connessione INTERNET. Per consentire alla commissione d'esame il controllo dei dispositivi in uso, i candidati che intendono avvalersi della calcolatrice devono consegnarla alla commissione in occasione dello svolgimento della prima prova scritta.



Prova d'esame – Valutazione

1. La prova torna ad avere un punteggio di 20 punti.
2. Il d.m. 769 del 2018 contiene la griglia di valutazione, i cui indicatori saranno declinati in descrittori a cura delle commissioni.

Indicatore <i>(correlato agli obiettivi della prova)</i>	Punteggio max per ogni indicatore (totale 20)
Comprendere Analizzare la situazione problematica. Identificare i dati ed interpretarli. Effettuare gli eventuali collegamenti e adoperare i codici grafico-simbolici necessari.	5
Individuare Conoscere i concetti matematici utili alla soluzione. Analizzare possibili strategie risolutive ed individuare la strategia più adatta.	6
Sviluppare il processo risolutivo Risolvere la situazione problematica in maniera coerente, completa e corretta, applicando le regole ed eseguendo i calcoli necessari.	5
Argomentare Commentare e giustificare opportunamente la scelta della strategia risolutiva, i passaggi fondamentali del processo esecutivo e la coerenza dei risultati al contesto del problema.	4



**2. La prova di matematica nel passato
e l'esperienza della prova 2022,
preparata a cura delle singole scuole**

Lo studio di funzione prima del 2010

PROBLEMA 2 (Sessione Ordinamento 2005)

Si consideri la funzione f definita sull'intervallo $[0; +\infty[$ da:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{1}{2}x^2(3 - 2\log x) + 1 \quad \text{se } x > 0 \end{cases}$$

e sia C la sua curva rappresentativa nel riferimento Oxy , ortogonale e monometrico.

1. Si stabilisca se f è continua e derivabile in 0.
2. Si dimostri che l'equazione $f(x) = 0$ ha, sull'intervallo $[0; +\infty[$, un'unica radice reale.
3. Si disegni C e si determini l'equazione della retta r tangente a C nel punto di ascissa $x = 1$.
4. Sia n un intero naturale non nullo. Si esprima, in funzione di n , l'area A_n del dominio piano delimitato dalla curva C , dalla retta tangente r e dalle due rette: $x = \frac{1}{n}$ e $x = 1$.
5. Si calcoli il limite per $n \rightarrow +\infty$ di A_n e si interpreti il risultato ottenuto.

PROBLEMA 2 (Sessione Pni 2009)

In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy , si consideri la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^3 + kx$, con k parametro reale.

1. Si dica come varia il grafico di f al variare di k (k positivo, negativo o nullo).
2. Sia $g(x) = x^3$ e γ il suo grafico. Si dimostri che γ e la retta d'equazione $y = 1 - x$ hanno un solo punto P in comune. Si determini l'ascissa di P approssimandola a meno di 0,1 con un metodo iterativo di calcolo.
3. Sia D la regione finita del primo quadrante delimitata da γ e dal grafico della funzione inversa di g . Si calcoli l'area di D .
4. La regione D è la base di un solido W le cui sezioni con piani perpendicolari alla bisettrice del primo quadrante sono tutte rettangoli di altezza 12. Si determini la sezione di area massima. Si calcoli il volume di W .



Lo studio di funzione prima del 2010

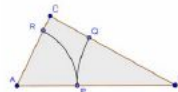
FUNZIONI DA CONTESTI GEOMETRICI

(Sessione ordinaria 2008)

PROBLEMA 1

Il triangolo rettangolo ABC ha l'ipotenusa $AB = a$ e l'angolo $\widehat{CAB} = \frac{\pi}{3}$.

- a) Si descriva, internamente al triangolo, con centro in B e raggio x , l'arco di circonferenza di estremi P e Q rispettivamente su AB e su BC. Sia poi R l'intersezione con il cateto CA dell'arco di circonferenza di centro A e raggio AP. Si specifichino le limitazioni da imporre ad x affinché la costruzione sia realizzabile.

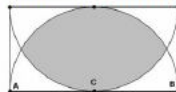


- b) Si esprima in funzione di x l'area S del quadrilatero mistilineo PQCR e si trovi quale sia il valore minimo e quale il valore massimo di $S(x)$.
- c) Tra i rettangoli con un lato su AB e i vertici del lato opposto su ciascuno dei due cateti si determini quello di area massima.
- d) Il triangolo ABC è la base di un solido W. Si calcoli il volume di W sapendo che le sue sezioni, ottenute tagliandolo con piani perpendicolari ad AB, sono tutti quadrati.

PROBLEMA 2

Assegnato nel piano il semicerchio Γ di centro C e diametro $AB = 2$, si affrontino le seguenti questioni:

- a) Si disegni nello stesso semipiano di Γ un secondo semicerchio Γ_1 tangente ad AB in C e di uguale raggio 1. Si calcoli l'area dell'insieme piano intersezione dei due semicerchi Γ e Γ_1 .



- b) Si trovi il rettangolo di area massima inscritto in Γ .
- c) Sia P un punto della semicirconferenza di Γ , H la sua proiezione ortogonale su AB. Si ponga $PCB = x$ e si esprimano in funzione di x le aree S_1 e S_2 dei triangoli APH e PCH.

$$\text{Si calcoli il rapporto } f(x) = \frac{S_1(x)}{S_2(x)}$$

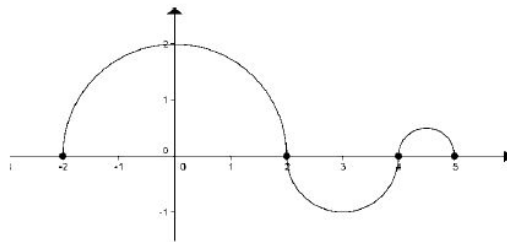
- d) Si studi $f(x)$ e se ne disegni il grafico prescindendo dai limiti geometrici del problema.



2010 – Pni Primo problema con grafico

PROBLEMA 1

Nella figura che segue è riportato il grafico di $g(x)$ per $-2 \leq x \leq 5$ essendo g la derivata di una funzione f . Il grafico consiste di tre semicirconferenze con centri in $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(\frac{9}{2}, 0)$ e raggi rispettivi $2, 1, \frac{1}{2}$.



- a) Si scriva un'espressione analitica di $g(x)$. Vi sono punti in cui $g(x)$ non è derivabile? Se sì, quali sono? E perchè?
- b) Per quali valori di x , $-2 < x < 5$, la funzione f presenta un massimo o un minimo relativo? Si illustri il ragionamento seguito.
- c) Se $f(x) = \int_{-2}^x g(t) dt$, si determini $f(4)$ e $f(1)$.
- d) Si determinino i punti in cui la funzione f ha derivata seconda nulla. Cosa si può dire sul segno di $f(x)$? Qual è l'andamento qualitativo di $f(x)$?



2015 – Prima sessione riforma (fino al 2018)

PROBLEMA 1

Il piano tariffario proposto da un operatore telefonico prevede, per le telefonate all'estero, un canone fisso di 10 euro al mese, più 10 centesimi per ogni minuto di conversazione. Indicando con x i minuti di conversazione effettuati in un mese, con $f(x)$ la spesa totale nel mese e con $g(x)$ il costo medio al minuto:

1. individua l'espressione analitica delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ e rappresentale graficamente; verifica che la funzione $g(x)$ non ha massimi né minimi relativi e dai la tua interpretazione dell'andamento delle due funzioni alla luce della situazione concreta che esse rappresentano.
2. Detto x_0 il numero di minuti di conversazione già effettuati nel mese corrente, determina x_1 tale che:

$$g(x_1) = \frac{g(x_0)}{2}$$

Traccia il grafico della funzione che esprime x_1 in funzione di x_0 e discuti il suo andamento. Che significato ha il suo asintoto verticale?

Sul suo sito web l'operatore telefonico ha pubblicato una mappa che rappresenta la copertura del segnale telefonico nella zona di tuo interesse:



Figura 1

PROBLEMA 2

La funzione derivabile $y = f(x)$ ha, per $x \in [-3, 3]$, il grafico Γ , disegnato in figura 2. Γ presenta tangenti orizzontali per $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$. Le aree delle regioni A, B, C e D sono rispettivamente 2, 3, 3 e 1. Sia $g(x)$ una primitiva di $f(x)$ tale che $g(3) = -5$.

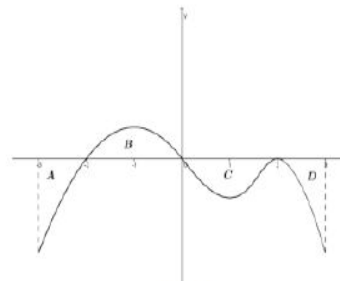


Figura 2

1. Nel caso $f(x)$ fosse esprimibile con un polinomio, quale potrebbe essere il suo grado minimo? Illustra il ragionamento seguito.
2. Individua i valori di $x \in [-3, 3]$, per cui $g(x)$ ha un massimo relativo e determina i valori di x per i quali $g(x)$ volge la concavità verso l'alto.
3. Calcola $g(0)$ e, se esiste, il $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+g(x)}{2x}$.
4. Sia $h(x) = 3 \cdot f(2x + 1)$, determina il valore di $\int_{-2}^1 h(x) dx$.



2019 – Prima prova di Matematica e Fisica

PROBLEMA 1

Si considerino le seguenti funzioni:

$$f(x) = ax^2 - x + b$$

$$g(x) = (ax + b)e^{2x-x^2}$$

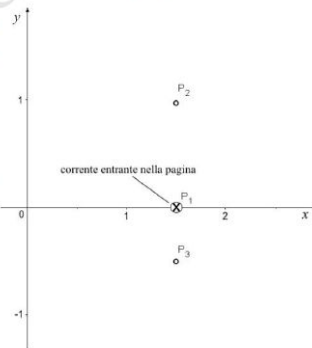
- Provare che, comunque siano scelti i valori di a e b in $\mathbb{R}$ con $a \neq 0$, la funzione g ammette un massimo e un minimo assoluti. Determinare i valori di a e b in corrispondenza dei quali i grafici delle due funzioni f e g si intersecano nel punto $A(2, 1)$.
- Si assuma, d'ora in avanti, di avere $a = 1$ e $b = -1$. Studiare le due funzioni così ottenute, verificando che il grafico di g ammette un centro di simmetria e che i grafici di f e g sono tangenti nel punto $B(0, -1)$. Determinare inoltre l'area della regione piana S delimitata dai grafici delle funzioni f e g .

- Si supponga che nel riferimento Oxy le lunghezze siano espresse in metri (m). Si considerino tre fili conduttori rettilinei disposti perpendicolarmente al piano Oxy e passanti rispettivamente per i punti:

$$P_1\left(\frac{3}{2}, 0\right), P_2\left(\frac{3}{2}, 1\right) \text{ e } P_3\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

I tre fili sono percorsi da correnti continue di intensità $i_1 = 2,0$ A, i_2 e i_3 . Il verso di i_1 è indicato in figura mentre gli altri due versi non sono indicati.

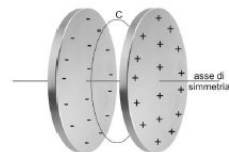
Stabilire come varia la circuitazione del campo magnetico, generato dalle correnti i_1 , i_2 e i_3 , lungo il contorno di S , a seconda dell'intensità e del verso di i_2 e i_3 .



- Si supponga, in assenza dei tre fili, che il contorno della regione S rappresenti il profilo di una spira conduttrice di resistenza $R = 0,20 \Omega$. La spira è posta all'interno di un campo magnetico uniforme di intensità $B = 1,5 \cdot 10^{-2}$ T perpendicolare alla regione S . Facendo ruotare la spira intorno all'asse x con velocità angolare ω costante, in essa si genera una corrente indotta la cui intensità massima è pari a 5,0 mA. Determinare il valore di ω .

PROBLEMA 2

Un condensatore piano è formato da due armature circolari di raggio R , poste a distanza d , dove R e d sono espresse in metri (m). Viene applicata alle armature una differenza di potenziale variabile nel tempo e inizialmente nulla.



All'interno del condensatore si rileva la presenza di un campo magnetico $\vec{B}$. Trascurando gli effetti di bordo, a distanza r dall'asse di simmetria del condensatore, l'intensità di $\vec{B}$, espressa in tesla (T), varia secondo la legge:

$$|\vec{B}| = \frac{kt}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}} r \quad \text{con } r \leq R$$

dove a e k sono costanti positive e t è il tempo trascorso dall'istante iniziale, espresso in secondi (s).

- Dopo aver determinato le unità di misura di a e k , spiegare perché nel condensatore è presente un campo magnetico anche in assenza di magneti e correnti di conduzione. Qual è la relazione tra le direzioni di $\vec{B}$ e del campo elettrico $\vec{E}$ nei punti interni al condensatore?
- Si consideri, tra le armature, un piano perpendicolare all'asse di simmetria. Su tale piano, sia C la circonferenza avente centro sull'asse e raggio r . Determinare la circuitazione di $\vec{B}$ lungo C e da essa ricavare che il flusso di $\vec{E}$, attraverso la superficie circolare delimitata da C , è dato da

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{2k\pi r^2}{\mu_0 \epsilon_0} \left(\frac{-1}{\sqrt{t^2 + a^2}} + \frac{1}{a} \right)$$

Calcolare la d.d.p. tra le armature del condensatore.

A quale valore tende $|\vec{B}|$ al trascorrere del tempo? Giustificare la risposta dal punto di vista fisico.

- Per $a > 0$, si consideri la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(t) = -\frac{t}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}}$. Verificare che la funzione $F(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} - \frac{1}{a}$ è la primitiva di f il cui grafico passa per l'origine. Studiare la funzione F , individuandone eventuali simmetrie, asintoti, estremi. Provare che F presenta due flessi nei punti di ascisse $t = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} a$ e determinare le pendenze delle rette tangenti al grafico di F in tali punti.
- Con le opportune motivazioni, dedurre il grafico di f da quello di F , specificando cosa rappresentano le ascisse dei punti di flesso di F per la funzione f . Calcolare l'area della regione compresa tra il grafico di f , l'asse delle ascisse e le rette parallele all'asse delle ordinate passanti per gli estremi della funzione. Fissato $b > 0$, calcolare il valore di $\int_{-b}^b f(t) dt$.



2019 – Prova di Matematica e Fisica (suppletiva)

PROBLEMA 1

Al variare di $a \in \mathbb{R}$, si consideri la famiglia di funzioni:

$$f_a(x) = \begin{cases} \frac{9}{2}(1 + xe^{a-x}) & \text{per } x \geq 0 \\ \frac{9a}{4(x-1)^4} & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

- Discutere segno e continuità della funzione f_a al variare del parametro a . Dimostrare che, qualunque sia $a \in \mathbb{R}$, la funzione f_a ammette un punto di massimo assoluto di ascissa 1.
- Indicata con f la funzione ottenuta da f_a per $a = 2$, stabilire se f è derivabile in $x = 0$. Studiare l'andamento della funzione f specificandone gli asintoti, i punti di flesso e l'ampiezza in gradi dell'angolo formato dalle tangenti sinistra e destra nel punto di non derivabilità. Determinare i valori delle costanti positive h e k tali che, considerata la funzione

$$g(x) = h[1 + (3 - kx)e^{kx-1}]$$

si abbia $g(3 - x) = f(x)$ per $x \geq 0$.

- Con un acceleratore di particelle si prepara un fascio di protoni aventi energia cinetica pari a 42 MeV. Per indirizzare tale fascio verso un bersaglio desiderato, si utilizza un campo magnetico uniforme, ortogonale alla traiettoria dei protoni, di intensità 0,24 T. Trascurando gli effetti relativistici, descrivere il moto di ciascun protone all'interno del campo e calcolare il raggio di curvatura della traiettoria.
- Il fascio di protoni, all'uscita della zona in cui è presente $\vec{B}$, viene fatto penetrare in acqua. Si indichi con $\mathcal{E}(x)$ l'energia del protone, espressa in megaelettronvolt (MeV), dopo x centimetri (cm) di cammino in acqua e sia $d\mathcal{E}$ l'energia ceduta all'acqua dal protone nel tratto dx . Supponendo che la funzione $y = -\frac{d\mathcal{E}}{dx}$ possa essere approssimata con la funzione $y = g(x)$, ponendo $h = 9/2$ e $k = 1$, calcolare l'energia $\mathcal{E}$ assorbita dall'acqua nei primi 3 centimetri di cammino del protone.

PROBLEMA 2

Due cariche elettriche puntiformi $Q_1 = q$ (con q positivo) e $Q_2 = -q$ sono collocate rispettivamente nei punti A e B , posti ad una distanza $2k$. Le cariche sono espresse in coulomb (C) e le distanze in metri (m). Si indichi con r la retta passante per i punti A e B .

- Determinare, in un punto C della retta r , l'intensità del campo elettrico generato dalle cariche Q_1 e Q_2 , al variare di C su r . Esistono, su tale retta, dei punti nei quali il campo elettrico è nullo? Giustificare la risposta.
- Dimostrare che l'intensità del campo elettrico generato da Q_1 e Q_2 in un punto P posto sull'asse del segmento AB decresce quando P si allontana dal punto medio di AB . Indicata con x la distanza di P dal punto medio di AB , esprimere l'intensità del campo elettrico in P in funzione di x .
- Fissati i parametri reali positivi h e k , studiare l'andamento della funzione

$$f(x) = \frac{h}{(x^2 + k^2)^{3/2}}$$

individuandone, in particolare, simmetrie, asintoti, estremi e punti di flesso.

- Tra le funzioni del tipo

$$g(x) = \frac{bx}{(x^2 + k^2)^a}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$, determinare le primitive di f .

Dimostrare che, se $h = k^2$, la funzione f rappresenta la densità di probabilità di una variabile aleatoria sull'intervallo $[0; +\infty)$. Quali sono i valori della media e della mediana di tale variabile aleatoria?



Anni 2020-2022

- **2020-2021: elaborato di Matematica e Fisica**
- **2022: prova scritta di Matematica preparata dalla commissione**

Dall'analisi delle tracce proposte nel 2022 emerge che:

- gli argomenti più frequenti sono quelli relativi al quinto anno (analisi); in una minoranza di casi vengono proposti argomenti di probabilità o di geometria analitica nello spazio;
- lo studio di funzione resta un argomento centrale in tutte le tracce;
- la tipologia di problema più diffusa è quella in cui si parte da una famiglia di funzioni, cioè da una funzione dipendente da uno o più parametri;
- in un buon numero di tracce (nei problemi o nei quesiti) sono presenti richieste che partono dall'analisi di un grafico o focalizzate sulla deduzione di un grafico da un altro;
- solo in una minoranza di casi vengono proposti problemi contestualizzati;
- spesso nei problemi o nei quesiti ci sono richieste focalizzate sull'argomentazione;
- nei quesiti sono frequenti i problemi di ottimizzazione.



3. Le nostre scelte

Quali le scelte operate, che ci hanno guidato nella stesura delle simulazioni?

- Livello di difficoltà medio, in continuità con le prove che sono state proposte nelle scuole nel 2022.
- Problemi articolati in punti tra loro indipendenti.
- Tipologia dei problemi: tradizionali, a partire dall'analisi di un grafico e (in misura minore) di modellizzazione.
- Contenuti: sono stati privilegiati quelli del quinto anno; per rispettare la normativa sono stati evitati collegamenti con la Fisica e argomenti non previsti dal quadro di riferimento (equazioni differenziali, analisi numerica).
- L'uso della calcolatrice grafica è opzionale.



Griglie di valutazione – Interpretazione degli indicatori

Indicatore <i>(correlato agli obiettivi della prova)</i>	Punteggio max per ogni indicatore (totale 20)
Comprendere Analizzare la situazione problematica. Identificare i dati ed interpretarli. Effettuare gli eventuali collegamenti e adoperare i codici grafico-simbolici necessari.	5
Individuare Conoscere i concetti matematici utili alla soluzione. Analizzare possibili strategie risolutive ed individuare la strategia più adatta.	6



Griglie di valutazione – Punteggi

Nelle griglie proposte quest'anno, è stato assegnato un punteggio specifico a ciascun livello dei descrittori, in modo che il massimo punteggio totale sia già in ventesimi.

Sviluppare il processo risolutivo Risolvere la situazione problematica in maniera coerente, completa e corretta, applicando le regole ed eseguendo i calcoli necessari.	L1	Formalizza le situazioni problematiche in modo inadeguato. Non applica correttamente gli strumenti matematici e disciplinari rilevanti per la soluzione.	1
	L2	Formalizza le situazioni problematiche in modo superficiale. Non applica gli strumenti matematici e disciplinari rilevanti per la risoluzione.	2
	L3	Formalizza le situazioni problematiche in modo parziale. Applica gli strumenti matematici e disciplinari rilevanti per la risoluzione in modo non sempre corretto.	3
	L4	Formalizza le situazioni problematiche in modo quasi completo. Applica gli strumenti matematici e disciplinari rilevanti per la risoluzione in modo generalmente corretto.	4
	L5	Formalizza le situazioni problematiche in modo completo ed esauriente. Applica gli strumenti matematici e disciplinari rilevanti per la risoluzione in modo ottimale.	5
Argomentare Commentare e giustificare opportunamente la scelta della strategia risolutiva, i passaggi fondamentali del processo esecutivo e la coerenza dei risultati al contesto del problema.	L1	Descrive il processo risolutivo in modo superficiale. Comunica con un linguaggio non appropriato. Non valuta la coerenza con la situazione problematica proposta.	1
	L2	Descrive il processo risolutivo in modo parziale. Comunica con un linguaggio non sempre appropriato. Valuta solo in parte la coerenza con la situazione problematica proposta.	2
	L3	Descrive il processo risolutivo in modo quasi completo. Comunica con un linguaggio generalmente appropriato. Valuta nel complesso la coerenza con la situazione problematica proposta.	3
	L4	Descrive il processo risolutivo in modo completo ed esauriente. Comunica con un linguaggio appropriato. Valuta in modo ottimale la coerenza con la situazione problematica proposta.	4

Totale: /20



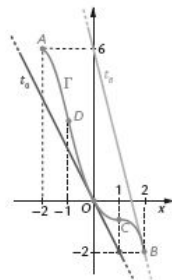
Simulazione 4

Problema 1

La curva Γ in figura rappresenta il grafico della funzione integrale F , relativa al punto $x = 0$, della funzione f sull'intervallo $[-2, 2]$:

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad \text{con } -2 \leq x \leq 2$$

In $x = -2$ e $x = 1$ ci sono due punti stazionari e le rette t_0 e t_B sono tangenti alla curva. Inoltre, è noto che la funzione f è derivabile in $[-2, 2]$ e che la tangente a Γ in D è parallela a t_B .



1 Determina i valori di $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$. Dimostra che il teorema di Lagrange è applicabile alla funzione F nell'intervallo $[-2, 2]$ e che il punto di ascissa $c = 0$ è uno dei punti la cui esistenza è garantita dal teorema. Dimostra con il teorema di Rolle che la funzione F ammette un punto di flesso nell'intervallo $[-2, 1]$.

2 Sapendo che il punto D è l'unico flesso a tangente obliqua per F , traccia il grafico probabile della funzione $y = f(x)$, con $-2 \leq x \leq 2$. Supponi, anche nei punti successivi 3 e 4, che la funzione F sia, sull'intervallo considerato, una funzione polinomiale di quarto grado e determina l'espressione analitica delle funzioni $y = F(x)$ e $y = f(x)$.

3 Calcola i seguenti limiti:

a. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} \left[\int_0^x f(t) dt - \int_0^{-1} f(t) dt \right]$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} f(t) dt}{-2x^2}$

c. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x |f(t)| dt}{(1-x)^2}$

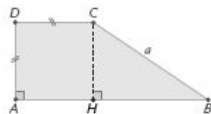
4 Considera la funzione $g(x) = F(-x)$, per $-2 \leq x \leq 2$, e calcola l'area della porzione di piano delimitata dai grafici di F e di g e dalle rette $y = 6$ e $y = -2$.



Simulazione 4

Problema 2

Considera un trapezio rettangolo $ABCD$ in cui $\overline{AD} = \overline{CD} = \overline{BC} = a$. Siano J e K le proiezioni rispettivamente di A e D sulla retta BC e sia H la proiezione di C su AB .



- 1 Posto $\overline{HB} = x$ e fissato a , determina l'equazione della funzione:

$$f_a(x) = \frac{\overline{AJ} + \overline{DK} + \overline{KC}}{\overline{DC}}$$

Dimostra che $f_a(x) = \frac{2}{a}(\sqrt{a^2 - x^2} + x)$, successivamente individua le coordinate del punto B per il quale passano tutte le curve di equazione $y = f_a(x)$, con $a > 0$. Detto M il punto di massimo della funzione $f_a(x)$, dimostra che la proiezione di BM sull'asse y ha lunghezza costante.

- 2 Poni d'ora in avanti $a = 2$. Studia la funzione $g(x) = f_2(x)$ in tutto il suo dominio, senza tener conto dei limiti imposti dal problema geometrico, e traccia il suo grafico Γ . Verifica che sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Lagrange per la funzione g sull'intervallo $[-2, 2]$ e dimostra, senza effettuare i calcoli, che esiste un unico punto di ascissa c che soddisfa la tesi del teorema.
- 3 Rappresenta la curva Γ' simmetrica di Γ rispetto alla retta $y = x$ e scrivi la sua equazione. Calcola l'area della regione racchiusa dalle curve Γ e Γ' .
- 4 Traccia il grafico della funzione $h(x) = g(|x|) - 2$. Considera la funzione:

$$p(x) = \begin{cases} b \cdot h(x) & -2 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}, \quad \text{con } b > 0$$

Determina il valore del parametro b in modo che la funzione p rappresenti una densità di probabilità.



Simulazione 4

Questionario

1 È data la funzione f così definita:

$$f(x) = \begin{cases} |x|^x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

- a. Verifica che la funzione è continua in $x = 0$.
- b. Classifica gli eventuali punti di non derivabilità della funzione.

2 Osserva la figura a fianco e calcola l'area evidenziata, delimitata dalle curve Γ e Γ' .

3 Dimostra che se $0 < a < b$, allora vale la seguente disuguaglianza (disuguaglianza di Nepero):

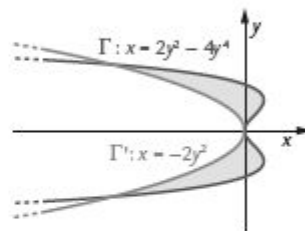
$$\frac{1}{a} > \frac{\ln b - \ln a}{b - a} > \frac{1}{b}$$

4 Calcola i seguenti limiti:

a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - |x|}{\sqrt{x^2 + 4}}$

b. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2|x|} - 1}{x^2}$

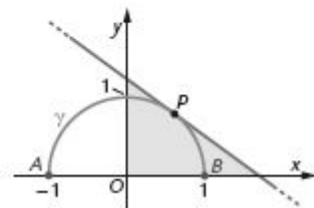
c. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x t \, dt}{x^2 - 1}$



Simulazione 4

Questionario

- 5** Dimostra che la funzione $f(x) = e^x + \arctan x$ è invertibile. Detta g la sua inversa, calcola $g'(1)$ e scrivi l'equazione della retta tangente al grafico di g nel suo punto di ascissa 1.
- 6** Sono dati i punti nello spazio $A(2, 0, 2)$ e $B(0, 2, 0)$.
a. Determina l'equazione di π , piano assiale del segmento AB .
b. Scrivi l'equazione della superficie sferica σ avente diametro AB .
c. Individua l'equazione dei piani tangenti alla superficie sferica σ , paralleli a π .
- 7** In una lavanderia self-service, aperta 24 ore su 24, arrivano mediamente 60 clienti al giorno. Calcola la probabilità che in un'ora:
a. non arrivino clienti;
b. arrivino esattamente 3 clienti;
c. arrivino almeno 2 clienti.
- 8** La figura mostra una semicirconferenza γ con centro nell'origine e raggio 1 e un suo punto P del primo quadrante. Individua le coordinate di P in modo che l'area evidenziata, delimitata dagli assi cartesiani e dalla tangente in P a γ , sia minima.



Simulazione 5

Problema 1

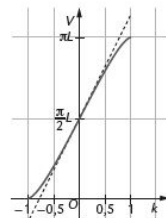
La cisterna di un'autobotte può essere approssimata con un cilindro di diametro 2 m e lunghezza L m, come mostrato nelle figure seguenti.



- 1 Stabilisci il valore minimo di L affinché la cisterna possa contenere almeno 40 m^3 di liquido.
- 2 Nella cisterna è presente un indicatore che fornisce il volume di liquido presente. L'indicatore misura il livello k , espresso in metri, rispetto all'asse del cilindro: se $k < 0$, il livello è al di sotto dell'asse, se $k > 0$, il livello è al di sopra. Dimostra che l'espressione della funzione $V(k)$ che rappresenta il volume, al variare del livello k , assume una delle seguenti forme:

$$V(k) = L \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin k + k\sqrt{1-k^2} \right)$$
$$V(k) = \begin{cases} L(k\sqrt{1-k^2} + \arcsin\sqrt{1-k^2}) & \text{se } -1 \leq k < 0 \\ L(\pi + k\sqrt{1-k^2} - \arcsin\sqrt{1-k^2}) & \text{se } 0 \leq k \leq 1 \end{cases}$$

In figura è rappresentato il grafico della funzione $V(k)$.



- 3 Verifica che la funzione è continua e derivabile in tutto il suo dominio e determina l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $k = 0$.
- 4 Verifica che i punti di massimo e di minimo della funzione sono anche punti stazionari e che il punto di ascissa $k = 0$ è un punto di flesso. Interpreta i punti stazionari e i punti di flesso nel contesto del problema. Determina infine l'area sottesa al grafico in tutto il suo dominio, senza ricorrere al calcolo integrale.

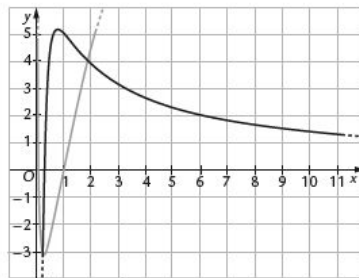


Simulazione 5

Problema 2

Considera una funzione del tipo: $f(x) = x(a\ln^2 x + b\ln x + c)$, con a, b, c parametri reali.

- 1 Determina il valore dei parametri, sapendo che la funzione presenta un estremo relativo per $x = e^{-\frac{5}{2}}$, di valore $9e^{-\frac{5}{2}}$, e un punto di flesso a tangente obliqua per $x = e^{-\frac{5}{4}}$.
- 2 Verificato che la funzione cercata è $f(x) = x(2\ln^2 x + \ln x - 1)$, studiala fino a tracciare il suo grafico, determinando in particolare eventuali asintoti, altri punti di estremo, di cui è richiesta la classificazione, altri punti di flesso, per i quali è richiesto il calcolo della tangente inflessionale.
- 3 Il grafico della funzione individua, con l'asse delle ascisse, due regioni finite di piano. Calcola la loro area.
- 4 La seguente figura mostra i grafici delle funzioni $y = f'(x)$ e $y = f''(x)$. Associa ciascuna funzione al corrispondente grafico, motivando la tua scelta.



Senza ricorrere al calcolo di primitive, verifica che:

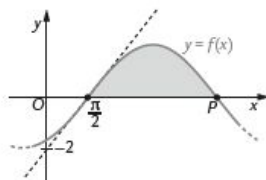
- il grafico disegnato in grigio forma con l'asse x e l'asse y una regione di piano illimitata di area finita, di cui è richiesto il valore;
- il grafico disegnato in nero forma con l'asse x e l'asse y una regione di piano illimitata di area infinita.



Simulazione 5

Questionario

- 1** Data la superficie sferica di centro $C(1, -1, 3)$ e raggio $\sqrt{11}$, determina le equazioni dei piani tangenti a essa nei punti in cui la superficie interseca l'asse z e fornisci una rappresentazione parametrica della retta individuata dai due piani.
- 2** In figura è mostrato un tratto del grafico di una funzione del tipo: $f(x) = a \sin(\omega x + \varphi)$, con $\omega > 0$.



La retta tratteggiata è tangente al grafico in uno dei suoi punti di intersezione con l'asse delle ascisse e l'area evidenziata misura 2π .
Determina l'espressione analitica della funzione, il suo periodo e le coordinate del punto P .

- 3** È data una funzione $f(x)$, due volte derivabile con derivata seconda continua per $x = 0$, per la quale si ha: $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -2$. Calcola il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[f(x) - 1][f(x) + 1]}{(2^x - 1)^2}$$

- 4** Una retta r di equazione $y = mx + q$, con $m > 0$ e $q > 0$, e la sua simmetrica s rispetto all'asse y individuano con l'asse x un triangolo isoscele. Inscrivi in questo triangolo isoscele il rettangolo di area massima. Esistono valori di m e q per cui tale rettangolo è un quadrato?



Simulazione 5

- 5** Considera la funzione $f(x) = \ln(x+1) + \int_2^x \frac{2t^2 + 3t - 3}{2t(t-1)} dt$ e dimostra che è strettamente crescente per valori di x maggiori di 2.
- 6** Data l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, considera i seguenti solidi:
- Σ_1 , generato da una rotazione completa dell'ellisse attorno all'asse x ;
 - Σ_2 , che ha per base di appoggio l'ellisse e come sezioni con piani perpendicolari all'asse x triangoli equilateri.
- Determina il rapporto tra il volume di Σ_1 e il volume di Σ_2 .
- 7** La durata di vita di un certo modello di automobile, espressa in anni, può essere interpretata da una variabile aleatoria esponenziale di parametro k . Sapendo che la vita media di tale modello è di 10 anni, determina:
- a. la probabilità che un'automobile duri più di 12 anni;
 - b. la probabilità che un'automobile che ha già 6 anni di vita duri per almeno altri 8 anni.
- 8** La funzione $f(x) = e^x(x-1)$, nell'intervallo $(0, 1)$, ammette un punto in cui la tangente al grafico è parallela alla retta di equazione $y = x$. Trova almeno due modi per dimostrarlo.



Esempio di griglia

Indicatori	Livelli	Descrittori	Punti	Evidenze		
				Problema 1	Problema 2	Quesiti
Comprendere Analizzare la situazione problematica. Identificare i dati ed interpretarli. Effettuare gli eventuali collegamenti e adoperare i codici grafico-simbolici necessari.	L1	Esamina la situazione proposta in modo superficiale o frammentario. Formula ipotesi esplicative non adeguate. Non riconosce modelli, analogie o leggi.	1	☐ Comprende le richieste del problema. ☐ Interpreta le indicazioni fornite per calcolare i valori di f richiesti. ☐ Interpreta le caratteristiche di F per rappresentare il grafico di f . ☐ Interpreta il limite come rapporto incrementale, quindi come derivata della funzione F . ☐ Utilizza il linguaggio simbolico.	☐ Comprende le richieste del problema. ☐ Interpreta i dati geometrici del problema. ☐ Interpreta il significato del valore assoluto di x e della funzione composta con il valore assoluto di x . ☐ Utilizza il linguaggio simbolico.	☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8
	L2	Esamina la situazione proposta in modo parziale. Formula ipotesi esplicative non del tutto adeguate. Riconosce modelli o analogie o leggi in modo non sempre appropriato.	2			
	L3	Esamina la situazione proposta in modo parziale. Formula ipotesi esplicative complessivamente adeguate.	3			
	L4	Esamina la situazione proposta in modo quasi completo. Formula ipotesi esplicative complessivamente adeguate. Riconosce modelli o analogie o leggi in modo generalmente appropriato.	4			
	L5	Esamina criticamente la situazione proposta in modo completo ed esauriente. Formula ipotesi esplicative adeguate. Riconosce modelli o analogie o leggi in modo appropriato.	5			
Individuare Conoscere i concetti matematici utili alla soluzione. Analizzare possibili strategie risolutive ed individuare la strategia più adatta.	L1	Non conosce o conosce solo parzialmente i concetti matematici utili alla soluzione della prova, non è in grado di individuare relazioni tra le variabili in gioco e non riesce a individuare gli strumenti formali opportuni.	1	☐ Individua il punto la cui esistenza è garantita dal teorema di Lagrange. ☐ Conosce il teorema di Lagrange e il teorema di Rolle. ☐ Conosce il teorema di De l'Hôpital. ☐ Individua la strategia per calcolare l'area.	☐ Individua le relazioni tra i lati dei triangoli. ☐ Individua i punti di non derivabilità della funzione. ☐ Conosce il teorema di Lagrange. ☐ Conosce il significato di densità di probabilità.	☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8
	L2	Conosce solo parzialmente i concetti matematici utili alla soluzione della prova o non imposta correttamente il procedimento risolutivo. Individua con difficoltà o errori gli strumenti formali opportuni.	2			
	L3	Conosce superficialmente i concetti matematici utili alla soluzione della prova e individua le relazioni fondamentali tra le variabili. Non riesce a impostare correttamente tutto il procedimento risolutivo.	3			
	L4	Conosce i concetti matematici utili alla soluzione della prova e le possibili relazioni tra le variabili. Individua gran parte delle strategie risolutive, anche se non sempre le più adeguate ed efficienti.	4			
	L5	Conosce i concetti matematici utili alla soluzione della prova e tutte le relazioni tra le variabili, che utilizza in modo adeguato. Individua le strategie risolutive, anche se non sempre le più efficienti. Individua gli strumenti di lavoro formali opportuni.	5			
	L6	Conosce e padroneggia i concetti matematici utili alla soluzione della prova, formula congetture, effettua chiari collegamenti logici e utilizza nel modo migliore le relazioni matematiche note. Individua strategie di lavoro adeguate ed efficienti e procedure risolutive anche non standard.	6			



Esempio di griglia

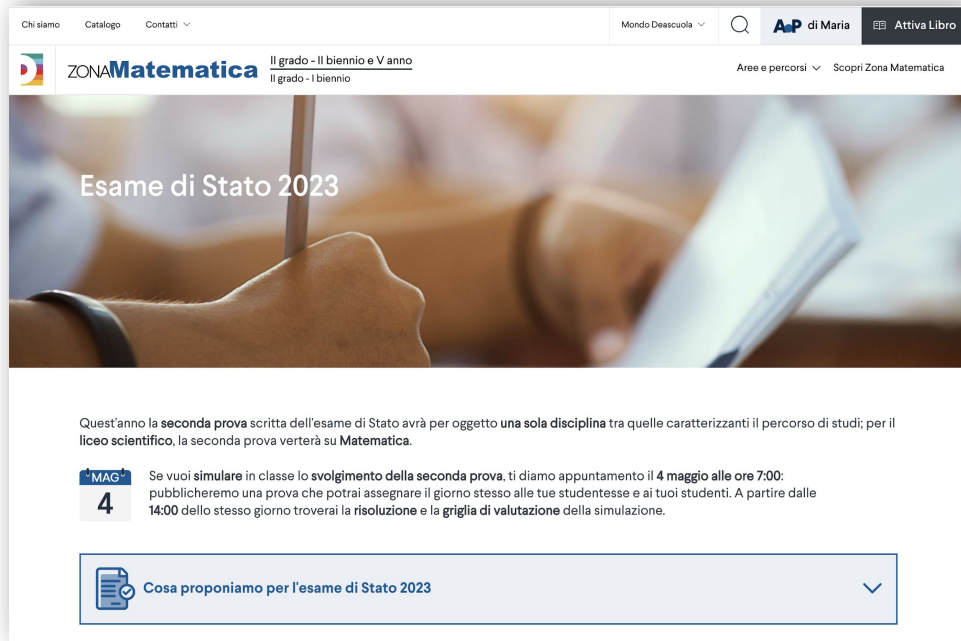
Sviluppare il processo risolutivo Risolvere la situazione problematica in maniera coerente, completa e corretta, applicando le regole ed eseguendo i calcoli necessari.	L1	Formalizza le situazioni problematiche in modo inadeguato. Non applica correttamente gli strumenti matematici e disciplinari rilevanti per la soluzione.	1	☐ Traccia il grafico della funzione f . ☐ Determina l'espressione analitica della funzione F e della funzione f . ☐ Calcola i valori dei limiti. ☐ Calcola l'area.	☐ Determina l'espressione analitica della funzione f_a . ☐ Determina le coordinate di B . ☐ Determina le coordinate del massimo. ☐ Traccia il grafico della funzione. ☐ Rappresenta il grafico della curva simmetrica. ☐ Calcola l'area. ☐ Calcola il valore del parametro.	☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8
	L2	Formalizza le situazioni problematiche in modo superficiale. Non applica gli strumenti matematici e disciplinari rilevanti per la risoluzione.	2			
	L3	Formalizza le situazioni problematiche in modo parziale. Applica gli strumenti matematici e disciplinari rilevanti per la risoluzione in modo non sempre corretto	3			
	L4	Formalizza le situazioni problematiche in modo quasi completo. Applica gli strumenti matematici e disciplinari rilevanti per la risoluzione in modo generalmente corretto	4			
	L5	Formalizza le situazioni problematiche in modo completo ed esauriente. Applica gli strumenti matematici e disciplinari rilevanti per la risoluzione in modo ottimale	5			
Argomentare Commentare e giustificare opportunamente la scelta della strategia risolutiva, i passaggi fondamentali del processo esecutivo e la coerenza dei risultati al contesto del problema.	L1	Descrive il processo risolutivo in modo superficiale. Comunica con un linguaggio non appropriato. Non valuta la coerenza con la situazione problematica proposta.	1	☐ Dimostra che $c = 0$ è l'ascissa del punto la cui esistenza è garantita dal teorema di Lagrange. ☐ Argomenta l'esistenza del punto la cui esistenza è garantita dal teorema Di Rolle. ☐ Argomenta la scelta della strategia per trovare l'espressione analitica delle funzioni F e f . ☐ Argomenta la scelta della strategia per il calcolo dell'area.	☐ Dimostra che la proiezione di BM sull'asse y ha lunghezza costante. ☐ Dimostra, senza effettuare i calcoli, che esiste un unico punto di ascissa c che soddisfa la tesi del teorema di Lagrange. ☐ Spiega la strategia per il calcolo dell'area. ☐ Giustifica la strategia per la rappresentazione di h .	☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8
	L2	Descrive il processo risolutivo in modo parziale. Comunica con un linguaggio non sempre appropriato. Valuta solo in parte la coerenza con la situazione problematica proposta.	2			
	L3	Descrive il processo risolutivo in modo quasi completo. Comunica con un linguaggio generalmente appropriato. Valuta nel complesso la coerenza con la situazione problematica proposta.	3			
	L4	Descrive il processo risolutivo in modo completo ed esauriente. Comunica con un linguaggio appropriato. Valuta in modo ottimale la coerenza con la situazione problematica proposta.	4			

Totale: /20



Area Esame di Stato con:

- simulazioni di seconda prova
- videosimulazione di Elia Bombardelli
- video di Elia Bombardelli
- richiami di teoria
- guida ai metodi risolutivi
- simulazioni e prove ministeriali



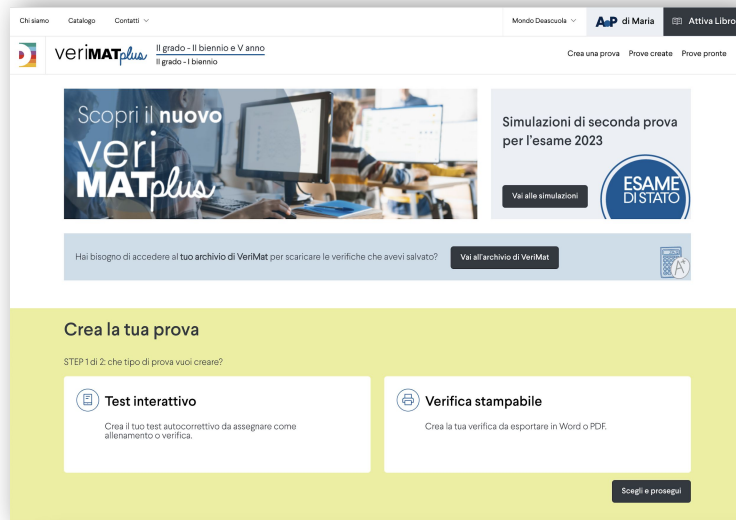
The screenshot shows the ZONA Matematica website interface. At the top, there is a navigation bar with links for 'Chi siamo', 'Catalogo', and 'Contatti'. On the right, there are links for 'Mondo Deascuola', a search icon, 'AP di Maria', and 'Attiva Libro'. Below the navigation bar, the main header features the ZONA Matematica logo and the text 'Il grado - Il biennio e V anno' and 'Il grado - I biennio'. The main content area has a large image of a hand holding a pen over a tablet, with the text 'Esame di Stato 2023' overlaid. Below this, a paragraph states: 'Quest'anno la **seconda prova** scritta dell'esame di Stato avrà per oggetto **una sola disciplina** tra quelle caratterizzanti il percorso di studi; per il liceo scientifico, la seconda prova verterà su **Matematica**.' A blue box with the text 'MAG 4' is followed by a paragraph: 'Se vuoi **simulare** in classe lo **svolgimento della seconda prova**, ti diamo appuntamento il **4 maggio alle ore 7:00**: pubblicheremo una prova che potrai assegnare il giorno stesso alle tue studentesse e ai tuoi studenti. A partire dalle **14:00** dello stesso giorno troverai la **risoluzione** e la **griglia di valutazione** della simulazione.' At the bottom, there is a button with a document icon and the text 'Cosa proponiamo per l'esame di Stato 2023'.



Simulazioni modificabili in veriMAT^{plus}

In **VeriMat PLUS**:

- simulazioni di seconda prova modificabili
- esercizi della categoria ESAME per creare prove personalizzate



INSEGNARE MATEMATICA

*Per simulare la prova in classe,
sempre in* ZONA**Matematica**



- ▶ Appuntamento al 4 maggio alle ore 7:00: pubblicheremo una nuova prova che potrai assegnare il giorno stesso nella tua classe.
- ▶ A partire dalle ore 14:00 dello stesso giorno troverai la risoluzione e la griglia di valutazione della simulazione.



**Grazie per
l'attenzione**



INSEGNARE MATEMATICA



DEASCUOLA

Le videolezioni

<https://formazione.deascuola.it/insegnare-matematica-ss2g/>



Offerta Formativa ▾

Per i nostri docenti

Aree Tematiche

Ci presentiamo

Comitato Scientifico e Formatori

Manuali

Insegnare Matematica

nella scuola Secondaria di Secondo grado



CICLO DI APPUNTAMENTI GRATUITI PER I DOCENTI DI **MATEMATICA** DELLA SCUOLA SECONDARIA DI **SECONDO GRADO**

Spunti, suggerimenti e nuove metodologie didattiche da utilizzare per coinvolgere attivamente le tue studentesse e i tuoi studenti in classe.



INSEGNARE MATEMATICA

