A tu per tu con la Matematica

Pierangela Accomazzo, Leonardo Sasso, Claudio Zanone

MATEMATICA E FORME DI COMUNICAZIONE

Un vecchio manuale di algebra:

la matematica per i matematici

219. *Un'equazione, ridotta a forma intera, si dice di* **secondo grado,** *quando, essendo il secondo membro eguale a zero, il primo risulta un polinomio di secondo grado.* Ne segue che una equazione di secondo grado contenente una sola incognita, dopo aver fatta la riduzione dei termini simili, assume la **forma generale** o **forma tipica**

$$a x^2 + b x + c = 0 ,$$

222. L'espressione che nella formula risolutiva figura sotto il segno di radice si dice il *discriminante* dell'equazione (2) e si suole indicare con la lettera Δ (delta), cioè si pone

$$\Delta = b^2 - 4 a c .$$

Un nuovo linguaggio

Una matematica interlocutoria, ma che non rinunci al proprio rigore.

UN APPRENDIMENTO ATTIVO DELLA MATEMATICA

Approccio trasmissivo dei vecchi testi:

- Definizioni
- Proprietà e teoremi
- Esempi
- Esercizi

Un approccio che «attiva» lo studente

- **Attività guidate**
- **Esplorazioni** (anche con l'ausilio di software di geometria dinamica)
- **Problemi stimolanti**: rendono lo studente protagonista del percorso di apprendimento

FAR SCOPRIRE LA BELLEZZA DELLA MATEMATICA

- **Collegamenti** con la realtà e alle altre discipline
- Attenzione agli aspetti legati all'**astrazione** , al **pensiero critico** e allo sfondo **storico**.

Per dare della una visione a 360° della matematica come disciplina:

- **strumentale**
- **coerente**
- con una forte **valenza culturale**

UN DUPLICE APPROCCIO

PROBLEMATICO

Partiamo da un problema e costruiamo un modello matematico per risolverlo:

- utilizziamo gli strumenti matematici che già conosciamo
- impostiamo la risoluzione
- facciamo emergere la necessità di un nuovo strumento matematico
- sviluppiamo la teoria necessaria

IMPOSTARNE LA RISOLUZIONE

L'incasso sarà complessivamente uguale a:

$$\underbrace{45n}_{\text{quote versate dai soci}} + \underbrace{50m}_{\text{quote versate dai non soci}}$$

Per ricavare l'incasso medio occorre ripartire l'incasso complessivo tra il numero totale dei partecipanti alla gita, che è $n + m$; l'incasso medio sarà pertanto:

$$\frac{45n + 50m}{n + m}$$

Riconosciamo così che il modello del nostro problema è un'espressione algebrica che si presenta come il *rapporto* di due *polinomi*. A questo tipo di espressioni si dà un nome particolare.

Evidenziare la necessità di un modello matematico

PARTIRE DA UN'ATTIVITÀ DI LABORATORIO

Nella gara dei Giochi di Archimede del 2018 è comparso il seguente quesito.

Indicare la più grande tra queste frazioni.

(A) $\frac{2018}{2011}$ (B) $\frac{2016}{2009}$ (C) $\frac{2020}{2013}$ (D) $\frac{2019}{2012}$ (E) $\frac{2025}{2018}$

Rispondiamo al quesito con una riflessione che ci permetterà di dedurre importanti considerazioni sulle funzioni definite tramite frazioni algebriche, cioè la cui espressione analitica è una frazione che si presenta come il rapporto di due polinomi.

RAGIONARE CON UN APPROCCIO FUNZIONALE…

Costruisci e analizza una funzione

Che relazione c'è tra il numeratore e il denominatore di tutte le frazioni proposte?

....

Indicando con x il denominatore, come potresti scrivere il numeratore? ....

Possiamo quindi pensare che tutte le frazioni indicate siano valori di una funzione, la cui equazione è: $y = f(x) = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$.

Una funzione di questo genere viene detta **funzione omografica**: è il rapporto fra due funzioni di tipo lineare. Siccome la linea di frazione rappresenta una divisione, l'equazione della funzione potrebbe anche essere scritta nella forma $y = f(x) = (\ldots\ldots) : \ldots\ldots$.

Questa divisione è possibile per qualunque valore di x? ....

Che cosa potresti dire quindi riguardo al dominio di questa funzione?

....

Applicando la proprietà distributiva della divisione rispetto all'addizione, possiamo dividere ciascun termine tra parentesi per il divisore, ottenendo così: $y = f(x) = 1 + \frac{\ldots}{\ldots}$.

Le frazioni numeriche indicate nel quesito si ottengono dalla funzione $f(x)$ assegnando a x valori naturali maggiori di 0, per cui ci limiteremo a questo caso.

Osserva le formule con cui è espressa $f(x)$: la funzione può annullarsi? Può essere negativa? Esiste un valore al di sotto del quale la funzione non scende? Da che cosa si deduce? ....

....

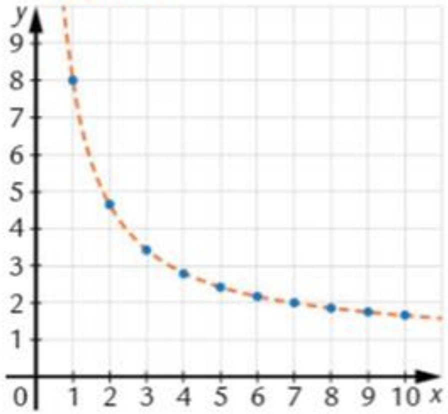
Con carta e penna

…NUMERICO E GRAFICO

FIGURA 1

	A	B
1	x	f
2	1	8
3	2	4.5
4	3	3.33
5	4	2.75

FIGURA 2



Ragiona sulla tabella

Apri il foglio di calcolo di GeoGebra.
Inserisci nella prima colonna alcuni valori di x, a partire dalla cella A2 (Fig. 1): considera per ora i numeri naturali da 1 a 10.
Qual è la formula da inserire nella cella B2 per calcolare il corrispondente valore della funzione? ....
Copia la formula in tutte le celle sottostanti, in modo da calcolare automaticamente tutti i valori della funzione che ci servono.

Che cosa succede alla funzione se assegni a x valori naturali sempre più grandi? Perché? ....

Possiamo arrivare a conclusioni simili anche per via grafica.
Crea una lista di punti, con lo strumento , che abbiano come coordinate i valori di x e i corrispondenti valori di f: dovresti ottenere qualcosa di simile alla Fig. 2.
I punti stanno tutti su una curva che si chiama **iperbole** e che puoi visualizzare disegnando il grafico della funzione.
Dall'analisi fatta, puoi ora rispondere al quesito iniziale. Qual è la risposta corretta? ....

Con il software

Far emergere un concetto da un'attività pratica

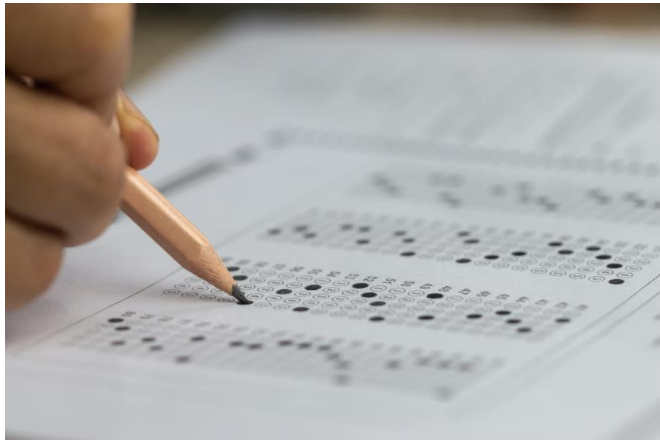
PARTIRE DA UN PROBLEMA PRATICO

◆ **PROBLEMA**

Un test è formato da domande e problemi: Paolo risponde esattamente a 7 domande, svolge correttamente 3 problemi e ottiene 29 punti. Francesca risponde esattamente a 10 domande, svolge correttamente 2 problemi e ottiene 30 punti. Quanti punti vale una domanda e quanti un problema?

Anche in questo problema ci sono *due* elementi che non conosciamo: il punteggio assegnato a una domanda e il punteggio assegnato a un problema. Tuttavia, in questo caso, se indichiamo con x il punteggio di una domanda, **non** è *facile* esprimere in funzione di x il punteggio di un problema. Ecco quindi che il modello delle equazioni in *una sola* incognita non si rivela adeguato.

È più semplice formalizzare il problema introducendo *due* incognite: indichiamo con x il punteggio di una domanda e con y il punteggio di un problema.



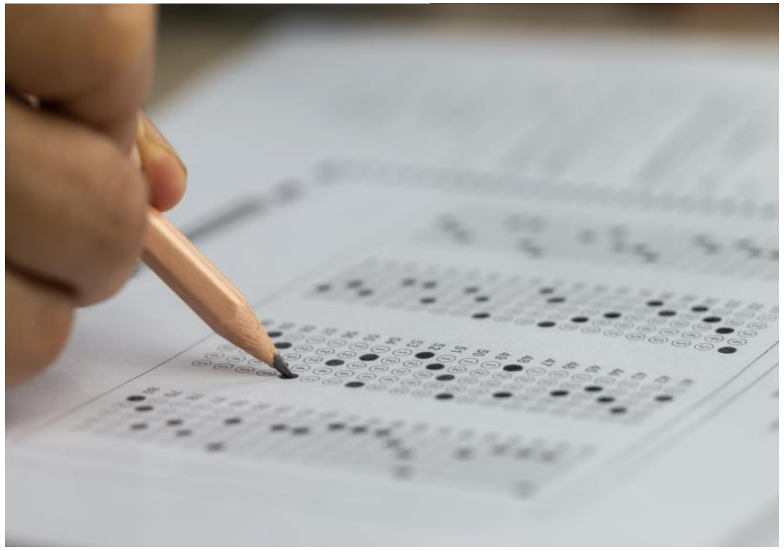
IMPOSTARNE LA RISOLUZIONE

Tabella 1

Tipo di quesito	Domande	Problemi	Totale
Punteggio per quesito	x	y	
Punteggio di Paolo	$7x$	$3y$	29
Punteggio di Francesca	$10x$	$2y$	30

$7x + 3y = 29$

$10x + 2y = 30$



PARTIRE DA UN'ATTIVITÀ DI LABORATORIO

Un sistema lineare in due equazioni in due incognite è determinato se esiste una coppia di numeri che soddisfa entrambe le equazioni. Come sai, per trovare tale soluzione si possono disegnare sul piano cartesiano le rette corrispondenti alle due equazioni e individuare le coordinate del loro punto di intersezione.

Considera il sistema $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases}$ e risolvilo graficamente, disegnando i grafici delle rette *r* e *s* associate rispettivamente alla prima e alla seconda equazione.

Quali sono le coordinate del punto di intersezione *A*? ....

RAGIONARE ALGEBRICAMENTE

Costruisci un sistema equivalente al precedente

Moltiplica tutti i coefficienti della retta *r* per 3 e i coefficienti della retta *s* per 2.
Costruisci l'equazione di una terza retta t sommando membro a membro i risultati:

$$\begin{array}{r} -3\cdot \\ +2\cdot \end{array}\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -6x + 3y = -12 \\ 10x + 4y = 2 \end{cases}$$

$\ldots x + \ldots y = \ldots\ldots$ ← equazione della retta *t*

Disegna la retta *t*: in che relazione è con le rette *r* e *s*? ....
Si può costruire un **sistema equivalente** al precedente, cioè che ha la stessa soluzione, sostituendo a una delle due equazioni di partenza l'equazione appena ricavata: perché? ....
Scrivi un possibile sistema equivalente a quello di partenza.

....

Con carta e penna

ESPLORARE E SISTEMATIZZARE

Con il software

FIGURA 1

	A	B	C	D	E	F	G
1		ax+by=c					
2		r	s	k* r	h*s	k*r+h*s	
3	1° coeff	2	5				
4	2° coeff	-1	2				
5	3° coeff	4	1				
6							

Esplora con coefficienti moltiplicativi diversi

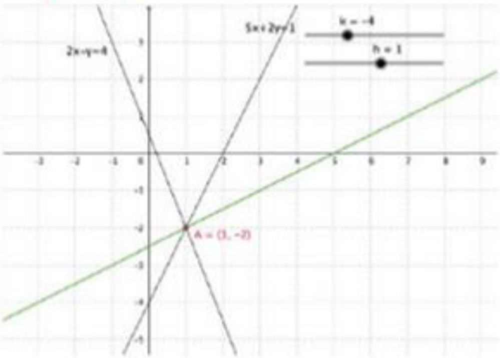
Utilizzando GeoGebra possiamo ripetere più volte l'esperimento, moltiplicando le equazioni del sistema per due numeri interi qualsiasi e disegnando la retta dell'equazione che si ricava sommandole.

Attività con GeoGebra
Sistemi equivalenti

a. Nella vista *Grafici* inserisci due slider k e h a valori interi, variabili da -10 a $+10$. Apri il Foglio di calcolo e intestalo come in Fig. 1; riporta i coefficienti delle rette r e s nelle colonne B e C. Nella Barra di inserimento scrivi le equazioni delle rette r e s riprendendo i coefficienti inseriti: B3*x+B4*y=B5 e C3*c+C4*y=C5.
Sul grafico, segna il punto di intersezione A e visualizzane le coordinate.

b. Ritorna al Foglio di calcolo; compila la colonna D moltiplicando i coefficienti della prima equazione per k e la colonna E moltiplicando i coefficienti della seconda equazione per h. Nella colonna F costruisci la somma dei risultati ottenuti nelle colonne E ed F.

FIGURA 2



c. Nella Barra di inserimento scrivi l'equazione della retta t: F3*x+F4*y=F5; colora in verde la retta corrispondente.
Osserva il grafico e muovi gli slider k e h per modificare i fattori moltiplicativi delle equazioni di r e s: che cosa osservi? ....

- Per quali valori di h e k la retta t è **orizzontale**? Qual è, in questo caso, l'equazione di t? ....
- Per quali valori di h e k la retta t è **verticale**? Qual è, in questo caso, l'equazione di t? ....

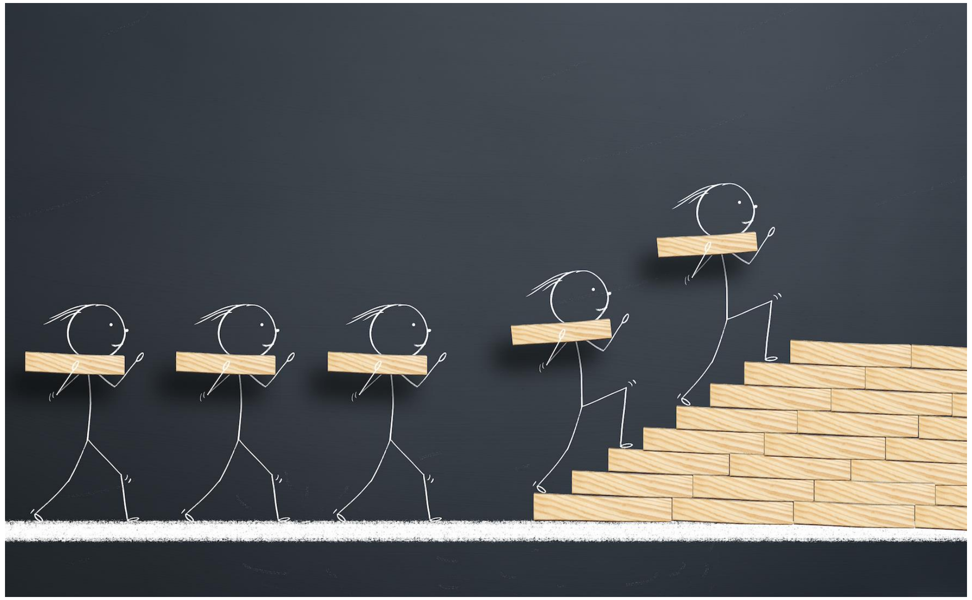
Scrivi il sistema composto dalle equazioni delle rette, orizzontale e verticale, del fascio e osserva come tale sistema evidenzi la soluzione del sistema.
Hai risolto il sistema di partenza con il **metodo di addizione e sottrazione**; ne approfondirai l'uso in questa Unità, insieme allo studio di altri metodi di risoluzione.

UN DUPLICE APPROCCIO

SEQUENZIALE

- spiegazione
- osservazioni
- sistematizzazione
- esempio

APPROCCIO SEQUENZIALE



Riconosciamo così che il modello del nostro problema è un'espressione algebrica che si presenta come il *rapporto* di due *polinomi*. A questo tipo di espressioni si dà un nome particolare.

DEFINIZIONE | Frazione algebrica

Si dice **frazione algebrica** ogni espressione algebrica della forma $\frac{A}{B}$, dove A e B sono due polinomi e B è diverso dal polinomio nullo.

I polinomi A e B si dicono **termini** della frazione algebrica; precisamente, A è il numeratore e B è il denominatore. Per esempio, sono frazioni algebriche le seguenti espressioni:

$$\frac{x}{x+3} \qquad \frac{x^3}{x^4+1} \qquad \frac{a+b}{a-b}$$

Come vedremo, nell'insieme delle *frazioni algebriche* la *divisione* è un'operazione *interna* (con l'esclusione della divisione per 0), mentre **non** lo era nell'insieme dei *polinomi*. L'ampliamento dall'insieme dei polinomi a quello delle frazioni algebriche nasce perciò da motivazioni analoghe a quelle che hanno portato ad ampliare l'insieme dei numeri *interi*, passando all'insieme dei numeri razionali (**Figg. 2** e **3**).

OSSERVA

L'insieme formato dalle frazioni algebriche che hanno denominatore uguale a 1 si può «identificare» con quello dei polinomi: possiamo dire, quindi, che l'insieme delle frazioni algebriche è un *ampliamento* dell'insieme dei polinomi (**Fig. 1**).

Figura 1

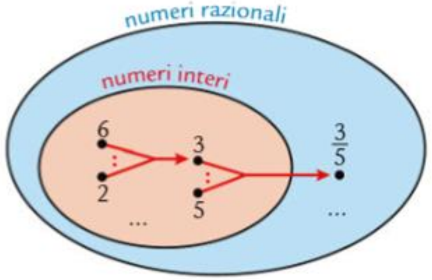


Figura 2 Abbiamo ampliato l'insieme **Z** dei numeri **interi**, passando all'insieme **Q** dei numeri **razionali**, per rendere sempre possibile la divisione.

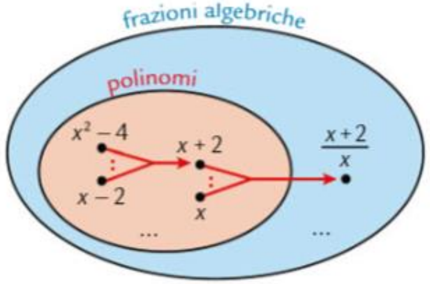
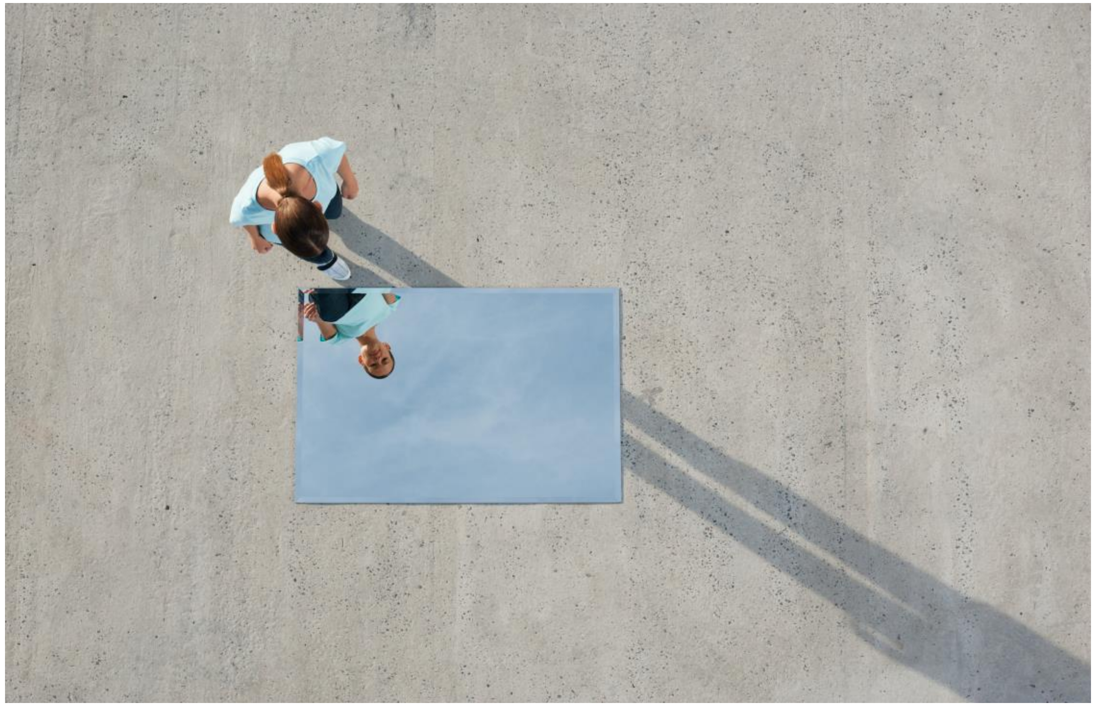


Figura 3 Analogamente, è necessario ampliare l'insieme dei **polinomi**, passando all'insieme delle **frazioni algebriche**, per rendere sempre possibile la divisione.

UN DUPLICE APPROCCIO

A SPECCHIO

- pagina sinistra spiegazione teorica
- pagina destra esercizi
- interazione immediata tra spiegazione teorica ed esercizio



APPROCCIO A SPECCHIO

TEORIA

Lezione 1

IMPARA

Introduzione alle frazioni algebriche

1 Le frazioni algebriche

DEFINIZIONE **Frazione algebrica**

$\frac{A}{B}$ numeratore, denominatore

Una **frazione algebrica** è un'espressione del tipo $\frac{A}{B}$, dove A e B sono polinomi, con la condizione che B non sia il polinomio nullo.
A e B si chiamano **termini** della frazione algebrica: A è il **numeratore** e B il **denominatore**.

Tra le frazioni algebriche vi sono quelle che hanno per denominatore un numero diverso da 0. Infatti un numero è un particolare polinomio. In tal caso la frazione algebrica diventa un monomio o un polinomio.
Quindi è possibile identificare l'insieme delle frazioni algebriche aventi denominatore numerico con l'insieme dei polinomi. Per esempio:

- $\frac{3a^2bc^4}{5}=\frac{3}{5}a^2bc^4$ (monomio)
- $\frac{2x-5y}{3}=\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}y$ (polinomio)

Per questo, l'insieme delle frazioni algebriche è considerato un ampliamento dell'insieme dei polinomi.

Come caso particolare, il numeratore e il denominatore di una frazione algebrica possono essere monomi.
In alcuni casi le frazioni algebriche sono scritte come prodotti di monomi o polinomi elevati a esponenti negativi.
Assegnando valori numerici alle variabili, a condizione che il denominatore non si annulli, la frazione algebrica assume a sua volta un valore numerico.

Esempio 1 - Frazioni algebriche e loro valori

Sono frazioni algebriche le espressioni: $\frac{3a^2b^3}{c}$, $\frac{p+2q}{3p-3q}$, $(x+1)(x+3)^{-1}$.

La terza espressione può infatti essere scritta nella forma: $(x+1)(x+3)^{-1}=\frac{x+1}{x+3}$.

Assegniamo ora valori numerici a x nell'ultima frazione e calcoliamo i valori da essa assunti di conseguenza.

$x=0 \rightarrow \frac{0+1}{0+3}=\frac{1}{3}$ $\qquad$ $x=-1 \rightarrow \frac{-1+1}{-1+3}=\frac{0}{2}=0$

$x=2 \rightarrow \frac{2+1}{2+3}=\frac{3}{5}$ $\qquad$ $x=-3 \rightarrow \frac{-3+1}{-3+3}=\frac{-2}{0}$ impossibile!

1 - 12

La definizione di frazione algebrica e l'esempio precedente suggeriscono che il denominatore non può valere 0. Ciò perché una frazione indica una divisione tra numeratore e denominatore e una divisione per 0 non ha significato.
È quindi fondamentale, per una frazione algebrica, determinare le **condizioni di esistenza** (**C.E.**): dopo aver scomposto in fattori il denominatore, si impone che ognuno di essi sia diverso da zero e si scartano i valori delle variabili che li annullano.

Esempio 2 - Condizioni di esistenza di una frazione algebrica

Determiniamo le condizioni di esistenza delle frazioni dell'Esempio 1.

1. $\frac{3a^2b^3}{c}$ C.E.: $c \neq 0$ — Il denominatore contiene il solo fattore c: occorre imporre che non sia nullo
2. $\frac{p+2q}{3p-3q}=\frac{p+2q}{3(p-q)}$ — Scomponiamo il denominatore, ottenendo i fattori 3 e $p-q$
   C.E.: $p-q\neq 0 \Leftrightarrow p \neq q$ — $p-q$ è l'unico fattore da discutere, perché 3 è ovviamente diverso da 0
3. $\frac{x+1}{x+3}$ C.E.: $x+3\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -3$
4. $\frac{2x+3}{(x+2)(x-1)}$ C.E.: $x\neq -2 \wedge x\neq 1$ — Per la legge di annullamento del prodotto occorre scartare i valori che annullano ogni fattore

COLLEGAMENTI
Tutti i fattori contenuti nel denominatore di una frazione algebrica devono essere diversi da zero: per la legge di annullamento del prodotto, infatti, se anche uno solo di essi fosse nullo, tutto il denominatore sarebbe nullo.

13 - 23

RIFLETTI SULLA TEORIA

Riconoscere e calcolare il valore numerico di frazioni algebriche

Tra le seguenti frazioni algebriche riconosci quali sono polinomi e motiva le tue risposte.

1. $\frac{2x-y}{3x+2y}$
2. $\frac{a^3b^2c}{ab^5c^2}$
3. $\frac{3m+5n}{100}$
4. $\frac{(2ab-1)^2}{(1+\sqrt{5})^3}$
5. $x(y-2)^{-2}$
6. $\frac{a^3(a+1)^{-1}}{a^{-2}}$
7. $(x+1)\left(5-\frac{2}{3}\right)^{-2}$
8. $\left(\frac{x}{y}\right)^{-4}$

Per ognuna delle seguenti frazioni algebriche calcola il valore che assume in corrispondenza dei valori indicati a fianco per le variabili: se non è possibile, spiega perché.

9. $\frac{x-2y}{x+2y}$ $\quad x=1, y=-1$
10. $\frac{2ab^2}{a-2b}$ $\quad a=0, b=\frac{1}{2}$
11. $\frac{p^3+3q^2}{p^2-q^2}$ $\quad p=2, q=-2$
12. $\frac{xy^{-2}}{2x^3y^2}$ $\quad x=\frac{1}{2}, y=-2$

Determinare le condizioni di esistenza di frazioni algebriche

Determina le condizioni di esistenza delle seguenti frazioni algebriche.

13. $\frac{3}{a}$
14. $\frac{m-3}{m^2+3}$
15. $\frac{a(a+b)}{2ab}$
16. $\frac{x}{x^2-2x}$
17. $\frac{3c-5}{c^2-4}$
18. $\frac{p+q}{p-q}$

19. INVENTA TU Scrivi una frazione che contenga la sola variabile a, che si annulli in $a=1$ e che non sia definita solo per $a=-2$.

Impostare problemi con le frazioni algebriche

20. Scrivi la frazione algebrica che rappresenta il rapporto tra un numero naturale n e il successivo del suo quadrato.

ECONOMIA

21. ESERCIZIO SVOLTO In un negozio di ferramenta compri n viti, che costano 0,30 euro ciascuna, e m tasselli, che costano 0,20 euro ciascuno. Scrivi una frazione che esprima il costo medio in euro di un pezzo acquistato.

SOLUZIONE
Il costo medio di un pezzo è uguale al rapporto tra il costo totale e il numero di pezzi. Il costo totale è uguale a $0{,}3n+0{,}2m$, mentre il numero di pezzi è uguale a $n+m$.
Dunque la frazione richiesta è: $\frac{0{,}3n+0{,}2m}{n+m}$.

22. Per organizzare una gita scolastica, una scuola deve sostenere un costo fisso di 400 euro per le spese di un viaggio e un costo di 15 euro per ciascun partecipante, al fine di acquistare un biglietto di ingresso a un museo. Supponendo che alla gita partecipino n studenti e 2 insegnanti e che i costi siano equamente ripartiti tra tutti i partecipanti, determina la frazione algebrica che esprime quanto dovrà pagare ciascuno. Come cambierebbe la risposta, se si aggiungessero 2 studenti e 1 insegnante? $\left[\frac{15n+430}{n+2}; \frac{15n+475}{n+5}\right]$

23. Alberto festeggia il compleanno in pizzeria: m dei suoi amici ordinano una capricciosa al prezzo di p euro, i restanti n amici una quattro stagioni al prezzo di q euro, Alberto mangia entrambe le pizze. Scrivi l'espressione che fornisce la spesa:
   a. di Alberto, se si offre di pagare per tutti;
   b. di ciacun amico di Alberto, se convengono di dividere il conto in parti uguali e senza il festeggiato.
   $\left[\text{a. } (m+1)p+(n+1)q; \text{ b. } \frac{(m+1)p+(n+1)q}{m+n}\right]$

ESERCIZI PAG. 484

UN DUPLICE APPROCCIO:
DUE DIVERSI MODI PER ESERCITARSI

Per argomento

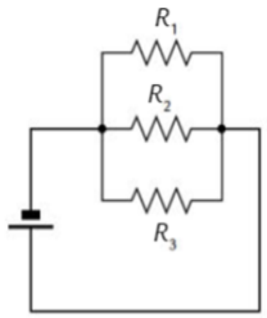
Esercizi introduttivi

Moltiplicazione tra frazioni algebriche

Elevamento a potenza di frazioni algebriche

419 **Matematica e... fisica** Un circuito contiene tre resistenze R_1, R_2, R_3 poste in parallelo. Tali resistenze sono equivalenti a una resistenza R espressa dalla formula:

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$



Esprimi R sotto forma di frazione algebrica.

$$\left[\frac{R_1 R_2 R_3}{R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2}\right]$$

420 **Matematica e... economia** Supponiamo di versare alla fine di ogni anno, per un periodo di 4 anni, una rata fissa R in un investimento che frutta un tasso annuo d'interesse uguale a i. Se si opera in un regime di capitalizzazione composta (un regime cioè in cui gli interessi maturati vengono versati nell'investimento e contribuiscono a loro volta a generare interessi gli anni successivi), il montante M a disposizione dopo 4 anni (cioè la somma del capitale versato e degli interessi maturati) è espresso dalla formula:

$$M = R \cdot \frac{\frac{1-(1+i)^{-4}}{i}}{(1+i)^4}$$

Esprimi M sotto forma di frazione algebrica e calcola il montante a disposizione dopo 4 anni, nell'ipotesi che la rata R sia di 1000 euro e il tasso d'interesse i sia del 2%.

UN DUPLICE APPROCCIO:
DUE DIVERSI MODI PER ESERCITARSI

Per **competenze**

- CAPIRE I CONCETTI
- APPLICARE PROCEDIMENTI
- RISOLVERE PROBLEMI
- SCRIVERE E DISCUTERE DI MATEMATICA

304 Discuti la verità delle seguenti frasi, esibendo dei controesempi se false.
a. Se due frazioni sono equivalenti, hanno le stesse condizioni di esistenza.
b. Se due frazioni hanno le stesse condizioni di esistenza, sono equivalenti.

305 Le seguenti frazioni sono equivalenti: $\frac{2x-1}{3x+2}, \frac{2ax-a+4x-2}{3ax+2a+6x+4}, \frac{2xy-y}{3xy+2y}$.
Spiega per quale motivo lo sono e qual è l'eventuale differenza tra le loro condizioni di esistenza.

INVENTA TU

306 Scrivi due frazioni algebriche equivalenti, nella variabile x, tali che la prima sia definita per $x=1$ e non definita per $x=-1$, mentre la seconda sia definita per $x=-1$ e non definita per $x=1$. Motiva le tue scelte.

307 Scrivi due frazioni algebriche equivalenti, nella variabile x, tali che la prima sia definita per $x \neq 0 \wedge x \neq \pm 1$, mentre la seconda sia definita per $x \neq 0 \wedge x \neq \pm 2$. Motiva le tue scelte.

308 Nelle seguenti frazioni n è un numero naturale maggiore di 1. Qual è la frazione maggiore? Spiega perché.

A $\frac{7}{n+1}$ **B** $\frac{7}{n}$ **C** $\frac{7}{n+2}$ **D** $\frac{7}{n-1}$

309 A ognuno dei grafici seguenti, associa l'equazione della funzione che possa essere da esso rappresentata. Motiva le tue scelte: come si può ricavare l'equazione della funzione a partire dal grafico?

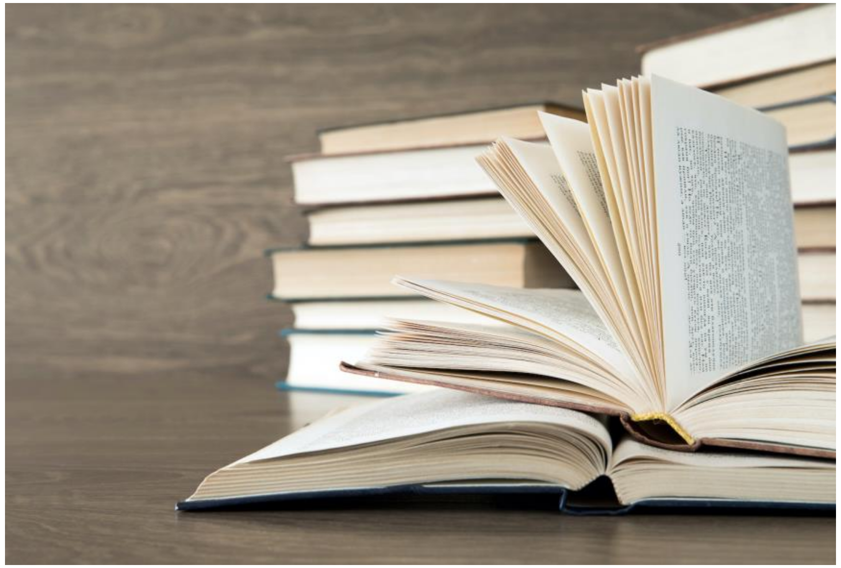
restanti sono femmine. La massa media dei maschi è di

MATEMATICA E COMPETENZE DI CITTADINANZA

Qual è il **progetto didattico** alla base della stesura dei nostri libri di testo?

Si parte dal dettato istituzionale, che richiede lo sviluppo di:

- ✓ Conoscenze
- ✓ Abilità
- ✓ Competenze



MATEMATICA E CITTADINANZA

Competenza:

comprovata capacità di utilizzare conoscenze, abilità e capacità personali, sociali e/o metodologiche, in situazioni di lavoro o di studio e nello sviluppo professionale e personale. Nel contesto del Quadro europeo delle qualifiche le competenze sono descritte in termini di responsabilità e autonomia.

Raccomandazione del Parlamento Europeo e del Consiglio del 23 aprile 2008

MATEMATICA E COMPETENZE DI CITTADINANZA

Si possono costruire competenze attraverso:

- conoscenze operative e non fini a se stesse;
- un ‘saper fare’ flessibile, aperto ai problem non standard;
- riconoscimento e analisi delle strategie risolutive messe in atto;
- controllo delle procedure, valutazione della plausibilità dei risultati.

Si tratta di mettere in atto un ‘saper fare’ che riflette criticamente sul proprio operato

MATEMATICA E COMPETENZE DI CITTADINANZA

È necessario che I nostri allievi si sentano coinvolti, responsabili del proprio apprendimento; possiamo indurre motivazione attraverso:

- attività di laboratorio
- problemi interattivi
- questioni che richiedono argomentazione, giustificazione delle proprie scelte.

MATEMATICA E COMPETENZE DI CITTADINANZA

Per aiutare gli studenti a lavorare in autonomia:

- ✓ esercizi svolti
- ✓ esercizi guidati
- ✓ videolezioni esplicative.

- Parole chiave del gioco: *concetti primitivi*

– giocatore – simbolo – colonna
– mossa – riga – diagonale
– casella – quadrato

- Regole del gioco: gli *assiomi*

– Si assegna a ogni giocatore un simbolo (per esempio ♦ e ♠), quindi sul foglio si disegna un quadrato suddiviso in nove caselle;
– si sorteggia il giocatore che fa la prima mossa;
– il primo giocatore disegna il proprio simbolo su una delle caselle vuote; il secondo giocatore disegna il proprio simbolo su una seconda casella... turno;
– vince chi completa per primo una riga o una colonna o una diagona

- Un *teorema* del gioco del tris è, per esempio: «se il mio simbolo è ♦ e ci troviamo nella situazione descritta dalla **Fig. 5**, allora ho vinto».

♦	♦	
♠	♦	
		♠

Figura 5

- Una *dimostrazione* di questo teorema è la seguente.

«Il mio avversario porrà il suo simbolo in una delle due posizioni ev verde nelle **Figg. 6** e **7**; ma, in ciascuno dei due casi, potrò comun ponendo il simbolo ♦ nelle posizioni evidenziate in giallo».

♦	♦	♠
♠	♦	
	♦	♠

♦	♦	♦
♠	♦	
	♠	♠

Colori

DeA SCUOLA

PARTIRE DA UN PROBLEMA: I CONTESTI

Che cos'è un monomio?

◆ **PROBLEMA**

Un aereo può sostenersi in volo grazie a una forza verticale diretta verso l'alto, detta forza di portanza, che equilibra il peso. Com'è possibile calcolare il modulo della portanza?

In base alle leggi della fisica, si ricava che il modulo della portanza è dato dall'espressione:

$$\frac{1}{2}S\rho v^2 k \qquad [1]$$

dove S è la superficie delle ali (in m^2), ρ è la densità dell'aria (in kg/m^3), v è la velocità dell'aereo (in m/s) e k è un coefficiente (adimensionale) che dipende dall'aereo considerato.

Figura 1

PARTIRE DA UN'ATTIVITÀ DI LABORATORIO: GLI STRUMENTI

ESPLORA

Attività 1

Rotaie convergenti

Per la lezione:
2 Rette parallele

Osserva la figura

Saresti in grado di dire che cosa significa che due rette sono parallele?
Nel caso in Fig. 1 la vista trae in inganno, perché fa sembrare che le rette su cui stanno le rotaie si incontrino in un punto molto lontano. Però l'intuito ti suggerisce che, se tu camminassi sulle rotaie, anche dopo avere percorso un lungo cammino, constateresti che esse non si incontrano e che la loro distanza è sempre la stessa. Del resto, se così non fosse, il treno non potrebbe viaggiare sulle rotaie.

Quali oggetti, nella Fig. 1, garantiscono che la distanza fra le rotaie sia sempre la stessa? Le traversine di legno.

Che angoli formano le traversine con le rotaie? Angoli retti.

FIGURA 1

Rifletti sulla costruzione

Come si fa, in generale, a riconoscere che due rette sono parallele? Partiamo da una costruzione geometrica che dovrebbe esserti nota. Procurati un foglio, una matita e una squadra. Traccia una retta f e posiziona la squad… retta a che… cateto AB)… si appoggi… libero della squadra.

FIGURA 2

Che relazione c'è fra la retta a e la retta f? Sono perpendicolari.

E tra la retta b e la retta f? Sono perpendicolari.

Come sono le rette a e b fra di loro? Sono parallele.

Sulla base di queste osservazioni indica una procedura che permetta di costruire due rette parallele fra di loro.
Occorre costruire due rette perpendicolari a una terza.

Usando la squadra misura ora la distanza tra le rette a e b. Traccia il segmento GJ, perpendicolare a entrambe le rette a e b, disponendo la squadra come in Fig. 3. Poi, usando la parte graduata della squadra, leggi la misura del segmento GJ. Sposta la base della squadra lungo la retta a e segna altre misure del segmento intercettato sull'altro cateto dalla retta b.

Come sono queste misure? Sono tutte uguali.

In che relazione sono, rispetto alle rette a e b i segmenti che hai misurato? Sono tutti perpendicolari.

FIGURA 3

706

UNITÀ 15 | Le rette perpendicolari e parallele

Pavimenti possibili e impossibili

2 Attività

Per la lezione:
3 Proprietà degli angoli nei poligoni

Una *tassellazione* è un modo di ricoprire una superficie piana, ripetendo una o più figure geometriche e rispettando la seguente condizione: le figure devono essere disposte in modo da non lasciare buchi e senza sovrapposizioni.

Esempi di tassellazioni sono: la superficie di un muro ricoperta da mattoni, la sezione di un alveare (Fig. 4) o un pavimento di piastrelle.
Immaginiamo una tassellazione di un pavimento in cui si utilizza un solo tipo di piastrella a forma di poligono regolare.
È possibile eseguire pavimentazioni con piastrelle a forma di triangolo equilatero, quadrato, pentagono, esagono, e così via? Proviamo.
Osserva il pavimento rappresentato in Fig. 5: quante piastrelle vengono accostate per ogni vertice? 4 Qual è la somma degli angoli delle quattro piastrelle accostate intorno allo stesso vertice? 360°

Il piano intorno al vertice comune è ricoperto per intero o rimangono spazi vuoti?
È interamente ricoperto.

Si possono quindi usare piastrelle quadrate per ricoprire un pavimento? Sì.

Esaminiamo ora il caso delle piastrelle triangolari, simulando il ricoprimento con triangoli di carta.

1 Da un foglio di carta ritaglia un certo numero di triangoli equilateri congruenti.

2 Avvicina i triangoli per un vertice in modo da tassellare il piano.

3 I sei triangoli equilateri congruenti 'riempiono' il piano intorno al vertice in cui sono accostati.

FIGURA 4

FIGURA 5

FIGURA 6

Quanto misura un angolo di un triangolo equilatero? 60°

I sei angoli dei triangoli equilateri disposti intorno a un vertice hanno somma uguale a 360°. Questa configurazione vale per ogni vertice del triangolo equilatero? Sì.

Perché? Perché gli angoli di un triangolo equilatero sono congruenti fra loro.

Si possono usare pi…

Riprendiamo il poli…

I suoi lati sono que…

I suoi angoli sono tutti congruenti fra loro? Sì.

Qual è la loro ampiezza? 120°

Sai come si chiama questo poligono? Esagono regolare.

In base alle osservazioni precedenti sull'ampiezza degli angoli di questo poligono spiega perché è possibile ricoprire un pavimento con piastrelle di tale forma (Fig. 7).
Accostando tre esagoni regolari attorno a un vertice, la somma degli angoli è ancora 360°, quindi si ricopre tutto il piano.

FIGURA 7

707

LIBRO DOC

…con strumenti da disegno…

…ritagliando la carta …

Attività 1 Equazioni in laboratorio

ESPLORA

Per le lezioni:
1 Introduzione alle equazioni
2 Equazioni di primo grado numeriche intere
3 Problemi il cui modello algebrico è un'equazione lineare

Ti proponiamo un esperimento di fisica che puoi realizzare con una caraffa graduata, di capacità almeno uguale a 1 litro, dell'acqua e una bilancia. Per svolgere quest'attività riportiamo i dati già ottenuti da altri, in modo che tu li possa usare per rispondere alle domande.

Analizza i dati e costruisci il grafico

Misura la massa della caraffa vuota e aggiungi di volta in volta 100 cm^3 di acqua, annotando ogni volta la massa corrispondente, in grammi. Si ottengono i dati riportati in Tab. 1.

Riconosci una relazione di tipo lineare tra massa e volume? Quale grandezza gioca il ruolo della pendenza della retta associata? ....

Indica con m e V la massa e il volume, con m_c la massa della caraffa vuota e con d la densità dell'acqua. Quanto vale m_c? ....

Inserisci i dati in un foglio di calcolo e rappresenta su un piano cartesiano i punti corrispondenti (con GeoGebra devi usare lo strumento **Lista di punti**). Puoi così visualizzare la rappresentazione grafica della relazione tra massa e volume (Fig. 1).

Ora disegna la retta che meglio approssima la relazione trovata.

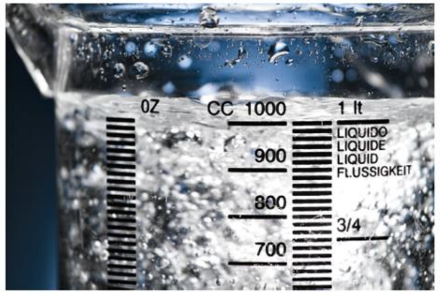
Puoi procedere ... 1,00 g/cm^3, con ... diminuisci i dec... seconda cifra decimale e non dimenticare che l'equazione ha anche un termine noto. Si trova che il coefficiente più adatto è 1,04. Qual è allora la retta che meglio approssima i punti trovati? ....

Qual è il valore di densità dell'acqua corrispondente all'esperimento? ....

...con carta e matita...

TABELLA 1

Volume (cm^3)	Massa caraffa con acqua (g)
0	209
100	315
200	416
300	524
400	625
500	726
600	835
700	937
800	1035



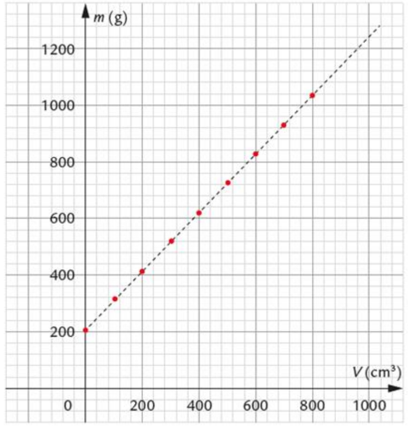


FIGURA 1

Risolvi un problema

Con la funzione così costruita, possiamo ricavare i valori che non abbiamo: ad esempio trovare quale sarebbe il volume corrispondente a una massa di 620 g.

Questo equivale a determinare la controimmagine del valore $m = 620$ g rispetto alla funzione definita, cioè uguagliare la funzione stessa a 620 g.

Scrivi l'equazione che si ottiene: ....

Completa i passaggi da svolgere fino a ottenere il valore di V richiesto:

- sottrai a sinistra e a destra del simbolo = il termine noto 209 g: ....
- esegui le addizioni: ....

Attività con GeoGebra
Equazioni in laboratorio

Attività 1 Positivo o negativo?

ESPLORA

Per la lezione:
1 Disequazioni di secondo grado

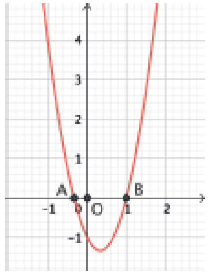


FIGURA 1

Calcola i valori della funzione

Considera la funzione di secondo grado $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$.

Quali valori assume se si danno alla variabile indipendente x i valori $\frac{1}{2}$, -1, 10?

Rispondi alla domanda calcolando a mente oppure (dove possibile) osservando il grafico in Fig. 1 ottenuto con GeoGebra: ...., ..., ...

Le coppie $(x; y)$ così determinate sono le coordinate di tre punti che appartengono al grafico di $f(x)$ e costituiscono informazioni precise su $f(x)$.

Non sempre è necessaria un'informazione così puntuale: talvolta è sufficiente sapere per quali valori di x la funzione è positiva, negativa o nulla.

Studia il segno della funzione con una tabella

Ad esempio, sai dire se per $x = 215$ oppure per $x = -500$ la funzione $f(x)$ assume un valore positivo? Oppure se il valore di $f(x)$ per $x = -0{,}2$ è negativo?

La risposta non è immediata perché non è semplice il calcolo mentale del valore della funzione in corrispondenza di questi valori di x.

Riscrivi allora l'espressione analitica della funzione come prodotto di due fattori di primo grado e valuta il segno di ciascun fattore:

$f(x) = (\ldots\ldots)(\ldots\ldots)$

x	Segno del primo fattore	Segno del secondo fattore	Segno di $f(x)$
215			
– 500			
– 0,2			

Completa la tabella, ricordando che non è necessario ricavare il valore di ciascun fattore, ma è sufficiente conoscere il segno che ogni fattore assume in corrispondenza del valore di x assegnato.

Studia il segno della funzione mediante il grafico

Ribaltiamo il problema: anziché partire dal valore della variabile indipendente x per ricavare il segno di y, partiamo dall'analisi del segno di y per trovare informazioni sui valori di x.

Disegna con GeoGebra il grafico di $f(x)$: se un punto ha *ordinata* negativa, quale può essere il valore di x corrispondente? Formula una congettura sui valori di x che corrispondono a punti di ordinata negativa: ....

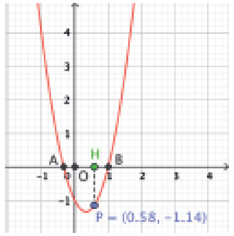


FIGURA 2

Prendi un punto P sul grafico della funzione (Fig. 2) e visualizzane le coordinate; muovi P sulla parabola e osserva i punti del grafico che hanno ordinata negativa: quanti sono? ....

Come sono disposti? ....

Proietta P sull'asse x nel punto $H = (x(P),0)$, come in Fig. 2.

Puoi fare in modo che H cambi colore a seconda del segno di y_P:

- rosso se $y_P > 0$;
- verde se $y_P < 0$.

Apri le Proprietà di $H \rightarrow$ *Avanzate/Colori dinamici*:

- nella casella Rosso scrivi $y(P) > 0$;
- nella casella Verde scrivi $y(P) < 0$;
- nella casella Blu scrivi il numero 0;
- chiudi la finestra di dialogo.

Muovi P sulla parabola e attiva la traccia di H e descrivi come si dispone H al variare di P sul grafico di $f(x)$.

Sulla base di queste osservazioni, per quali valori di x si ha $f(x) < 0$? ....

...con GeoGebra

Attività con GeoGebra
Positivo o negativo?

Foglio di calcolo, carta e forbici...

PROBLEMI APPLICATIVI DI ESPLORAZIONE

319 **Laboratorio – Con GeoGebra**

Una compagnia telefonica fa pagare un canone mensile fisso di 10 euro a cui va aggiunto un costo di 8 centesimi per ogni minuto di conversazione. Un'altra compagnia fa pagare un canone mensile fisso di 15 euro a cui va aggiunto un costo di 6 centesimi per ogni minuto di conversazione. Quanti minuti si dovrebbe conversare in un mese per pagare la stessa cifra sia con l'una che con l'altra compagnia?

Affronta il problema secondo tre approcci diversi.

a. Approccio grafico. Scrivi le espressioni analitiche delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ che esprimono il costo complessivo mensile che occorre sostenere rispettivamente con la prima e la seconda compagnia, in funzione del numero x di minuti di conversazione. Traccia con GeoGebra i grafici delle due funzioni e confrontali.

b. Approccio numerico. R
– nella prima colonna si
di 500 minuti);
– nella seconda e nella
mensili da sostenere risp
Rispondi alla domanda pos

c. Approccio algebrico. Tr

Check – con GeoGebra

147 Risolvi e discuti l'equazione: $(k+2)x-(x-1)k=k(1-x)+k^2-4$.

▸ Controlla la correttezza dei risultati ottenuti avvalendoti di GeoGebra e procedendo come descritto qui di seguito.
Definisci anzitutto uno slider che rappresenti il parametro k e rappresenta le rette di equazioni:

$$y=(k+2)x-(x-1)k \quad \text{e} \quad y=k(1-x)+k^2-4 \qquad [*]$$

e la retta di equazione $x=k-2$ che corrisponde alla soluzione dell'equazione.
Facendo variare k, verifica che:

- se $k\neq-2$, le due rette di equazioni [*] si intersecano in un punto appartenente alla retta di equazione $x=k-2$ (e quindi l'equazione ha come soluzione $x=k-2$);
- se $k=-2$ le due rette di equazioni [*] coincidono, quindi l'equazione ha infinite soluzioni (è indeterminata).

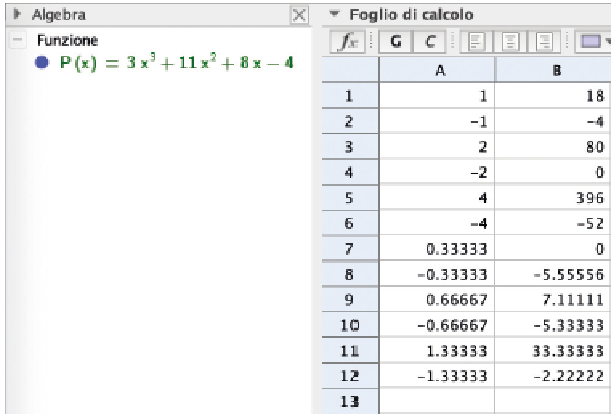
PROBLEMI APPLICATIVI DI ESPLORAZIONE

65 **ESERCIZIO SVOLTO** **Con il foglio di calcolo** Trova l'insieme degli eventuali zeri razionali del polinomio $P(x) = 3x^3 + 11x^2 + 8x - 4$. Utilizza un foglio di calcolo per individuare quali tra gli elementi dell'insieme possono effettivamente essere zeri del polinomio.

SOLUZIONE

Gli zeri razionali di $P(x)$ vanno cercati nell'insieme

$$\left\{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm\frac{1}{3}; \pm\frac{2}{3}; \pm\frac{4}{3}\right\}.$$



	A	B
1	1	18
2	−1	−4
3	2	80
4	−2	0
5	4	396
6	−4	−52
7	0.33333	0
8	−0.33333	−5.55556
9	0.66667	7.11111
10	−0.66667	−5.33333
11	1.33333	33.33333
12	−1.33333	−2.22222
13		

Usando la barra di inserimento di GeoGebra definiamo il polinomio $P(x)$. Nella prima colonna del foglio di calcolo scriviamo tutti gli elementi dell'insieme dei possibili zeri a partire da A1. Nella colonna a fianco calcoliamo i valori assunti dal polinomio: in B1 scriviamo $=P(A1)$. Copiamo la formula per tutti i numeri della colonna B.

Osserviamo che $P(x)$ si azzera in corrispondenza di $x = -2$ e di $x = 0{,}333333$, corrispondente a $x = \frac{1}{3}$. Per sicurezza possiamo verificare manualmente che questi risultati non risentano di errori di approssimazione del software. Dividiamo il polinomio $P(x)$ per i binomi che abbiamo individuato, iniziando da $\left(x - \frac{1}{3}\right)$.

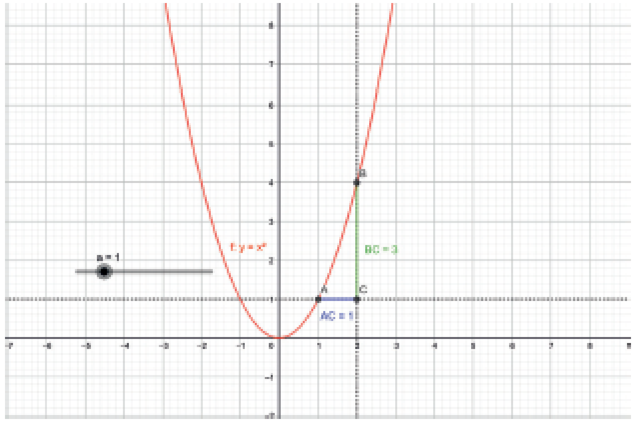
$$P(x) = \left(x - \frac{1}{3}\right)(3x^2 + 12x + 12)$$

Procediamo ulteriormente con la scomposizione in fattori. Raccogliamo 3 a fattor comune totale dal trinomio e riconosciamo nel trinomio un quadrato di binomio.

$$P(x) = \left(x - \frac{1}{3}\right)(3x^2 + 12x + 12) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x^2 + 4x + 4) = 3$$

Il polinomio ha tre zeri: in questo caso si dice che due so

105 **ATTIVITÀ** **Con GeoGebra** Costruisci uno slider a variabile da 0 a 5 con passo 0,1 e inserisci la funzione $f(x) = a \cdot x^2$ (ricordati di scrivere, tra a e x il segno di moltiplicazione o, in alternativa, lascia uno spazio fra le due lettere). Definisci, dalla barra di inserimento, il punto A di ascissa 1 e ordinata $f(1)$ e il punto B di ascissa 2 e ordinata $f(2)$. Costruisci il triangolo rettangolo ABH che ha i cateti lunghi 1 e $f(2) - f(1)$. Come cambiano i cateti del triangolo al crescere del valore di a?



115 **Con GeoGebra** Considera un numero a positivo qualsiasi ed elevalo al quadrato. Quale tra i due numeri è più grande? a oppure a^2?

Esplora più in generale la situazione. Apri un file GeoGebra e inserisci le funzioni $y = x$ e $y = x^2$. Prendi un punto P qualsiasi sull'asse x e visualizzane le coordinate: la sua ascissa x_P rappresenta il numero a. Traccia per P una retta verticale che intersechi il grafico di $y = x$ in A e di $y = x^2$ in B. Visualizza le coordinate di A e di B.

Osserva che le coordinate di A sono entrambe uguali a x_P, mentre le coordinate di B sono $(x_P; x_P^2)$.

Muovi P sull'asse x cambiando il valore di x_P: è sempre vero che x_P^2 è maggiore di x_P?

ESERCIZI SVOLTI O GUIDATI

◆ **PROBLEMA**

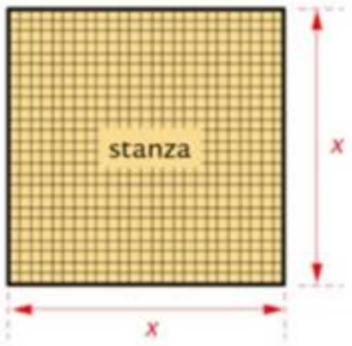
Per rifare la pavimentazione di una stanza a pianta quadrata ci si rivolge a una ditta specializzata, che richiede un costo di 20 euro al metro quadrato, compresa la messa in opera. Quali sono le dimensioni del pavimento della stanza, in ciascuno dei seguenti tre casi?

a. Il costo complessivo per la pavimentazione ammonta a 500 euro.

b. Oltre a rifare la pavimen… finitura pregiata, dal co… vimentazione risulta un…

c. Come nel caso preceden… sostituire il battiscopa, … rifinitura ammonta a 48…

Figura 1



area = x^2
perimetro = $4x$

Figura 2

Indicata con x la misura (in metri) del lato del quadrato che rappresenta la pianta della stanza (**Fig. 2**), il problema si traduce, nei tre casi, nelle seguenti equazioni:

a. $\underbrace{20}_{\text{costo al m}^2\text{ ordinario}} \cdot \underbrace{x^2}_{\text{area (in m}^2\text{) della pavimentazione}} = \underbrace{500}_{\text{costo complessivo}} \Rightarrow 20x^2 - 500 = 0$ [1]

b. $\underbrace{20x^2}_{\text{costo pavimentazione}} = \underbrace{\frac{3}{2}}_{\text{una volta e mezza}} \cdot \overbrace{\underbrace{15}_{\text{costo al metro per la rifinitura}} \cdot \underbrace{4x}_{\text{perimetro (in m) del pavimento}}}^{\text{costo rifinitura}} \Rightarrow 20x^2 - 90x = 0$ [2]

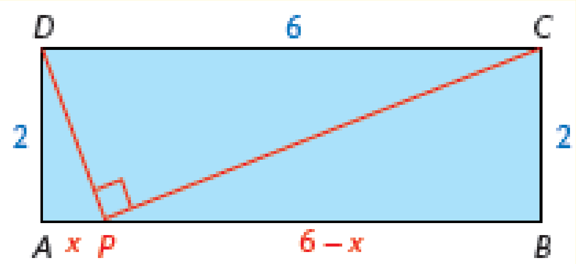
c. $\underbrace{20x^2}_{\text{costo pavimentazione}} + \underbrace{15 \cdot 4x}_{\text{costo rifinitura}} = \underbrace{480}_{\text{costo complessivo}} \Rightarrow 20x^2 + 60x - 480 = 0$ [3]

ESERCIZI SVOLTI O GUIDATI

443 **ESPLORA CON GEOGEBRA** **SEGUI LA TRACCIA** In un rettangolo $ABCD$ si ha $\overline{AB} = 6$ e $\overline{BC} = 2$. Determina sul lato AB un punto P in modo che l'angolo $D\hat{P}C$ sia retto.

TRACCIA

- Individua i dati e l'obiettivo.
  Dati: .... Obiettivo: ....
- Per determinare il punto P basta determinare, per esempio, la distanza di P da A. Poni allora:
  $\overline{PA} = x$.
- Dal momento che il punto P deve appartenere al lato AB, la sua distanza da A deve essere compresa fra 0 e 6, quindi deve essere $0 \leq x \leq 6$.



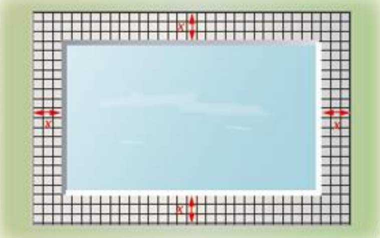
- L'angolo $D\hat{P}C$ è retto se e solo se il triangolo DPC è rettangolo in $\hat{P}$. Ma il triangolo DPC è rettangolo in $\hat{P}$ se e solo se è soddisfatto il teorema di Pitagora. Puoi allora impostare la seguente equazione:

$$\underbrace{x^2 + 2^2}_{\overline{PD}^2} + \underbrace{\dots\dots\dots\dots}_{\overline{PC}^2} = \underbrace{6}_{\overline{CD}^2}$$

- Risolvendo l'equazione trovi come soluzioni: $x =$ .... oppure ....
- Entrambe le soluzioni sono comprese fra 0 e 6 (sai giustificarlo?), quindi sono accettabili. Dunque esistono due punti su AB in corrispondenza dei quali $D\hat{P}C$ è retto: il punto P per cui $\overline{PA} =$ .... e il punto P per cui $\overline{PA} =$ .... Come risultano questi due punti rispetto all'asse di AB?

ESERCIZI PER RIFLETTERE, ARGOMENTARE, GIUSTIFICARE

23 **E se?** Si vuole realizzare, intorno a una piscina rettangolare, una pavimentazione di larghezza x (in m), come indicato in figura.



a. Sapendo che l'area complessiva, in m^2, del rettangolo occupato dalla piscina e dalla pavimentazione è espressa dal polinomio $4x^2 + 48x + 135$ e che le misure dei lati di tale rettangolo sono espresse da polinomi in x a coefficienti interi, deduci le misure (in m) dei lati del rettangolo che rappresenta la piscina.

b. Determina il polinomio che esprime in funzione di x l'area, in m^2, della pavimentazione. Se si vuole realizzare una pavimentazione di larghezza 2 m e il costo è di 30 euro al m^2, determina il costo complessivo per realizzarla.

c. Di quanto aumenta l'area, in m^2, della pavimentazione, se la larghezza x aumenta di 25 cm? Di quanto aumenterebbe il costo calcolato al punto precedente, nel caso in cui si decidesse di realizzare una pavimentazione larga 2,25 m anziché 2 m?

TROVA L'ERRORE Paolo osserva che vale l'uguaglianza
$x^4 + 2x^2 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) + 2x^2 + 1$
e conclude che il polinomio $x^4 + 2x^2$, diviso per $x^2 + 1$, dà come quoziente $x^2 - 1$ e come resto $2x^2 + 1$. Quale errore ha commesso? [Il grado di $R(x)$ deve essere inferiore al grado del divisore]

Colori

RE E DISCUTERE DI MATEMATICA

140 Per risolvere l'equazione $-10 = t + 50$, Luisa aggiunge 10 a entrambi i membri. È sufficiente per risolvere l'equazione? Spiega perché. [No, per risolvere l'equazione occorre sommare -50 ad ambo i membri]

141 Spiega con un esempio come stabilisci quale numero aggiungere o togliere e per quale numero moltiplicare o dividere i due membri di un'equazione di primo grado in un'incognita per arrivare alla sua soluzione.

142 Un polinomio $A(x)$ è di terzo grado e un polinomio $B(x)$ è di secondo grado. Determina il grado delle equazioni che seguono, motivando le tue risposte:

a. $A(x) = B(x) + x$ terzo
b. $A(x) + B(x) = x^4$ quarto
c. $A(x) \cdot B(x) = 0$ quinto
d. $A(x) \cdot B(x) = x^4$ quinto

143 Scrivi un'equazione che sia determinata nel dominio $\mathbb{Z}$, ma impossibile nel dominio $\mathbb{N}$ e spiega il tuo ragionamento.

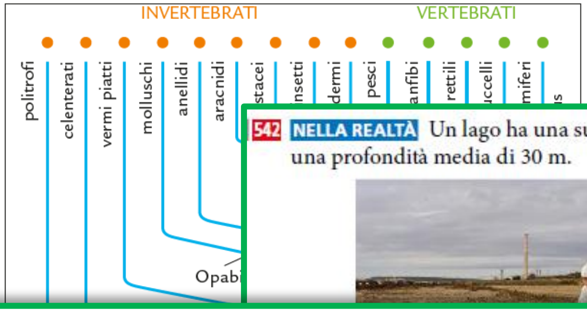
144 Scrivi un'equazione che sia determinata nel dominio $\mathbb{Q}$, ma impossibile nei domini $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ e spiega il tuo ragionamento.

145 Scrivi un'equazione che sia determinata nel dominio $\mathbb{R}$, ma impossibile nei domini $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ e spiega il tuo ragionamento.

146 L'equazione $x^2 = x^2$ è indeterminata? Spiega perché e spiega quali sono i suoi insiemi delle soluzioni a seconda che il dominio sia $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$. [Sì, in tutti i casi]

MODELLIZZAZIONE CON PROBLEMI CONTESTUALIZZATI

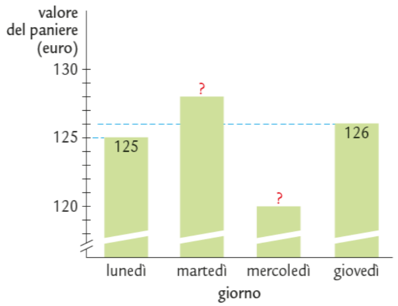
176 **BIOLOGIA** In biologia si dividono le diverse categorie di esseri viventi (*insiemi*) in sottocategorie (*sottoinsiemi*). Ad esempio, nell'insieme universo A, regno degli animali, si hanno gli insiemi V dei vertebrati e I degli invertebrati, ciascuno dei quali è diviso in sottoinsiemi. Elenca alcuni sottoinsiemi di V e di I.



542 **NELLA REALTÀ** Un lago ha una superficie di 12 km² e una profondità media di 30 m.

...ontiene il lago, ...ne scientifica e ...zza.
...versati nel lago ...e si distribuisce ...ffinché l'acqua ...cura, la quanti... ...sere presente in ...ti su un miliar... ...rare ancora si...
... 10^{11} litri; b. no]

693 **ECONOMIA** Il diagramma a barre rappresentato qui sotto rappresenta il valore complessivo di un paniere di azioni in alcuni giorni di una data settimana. La tabella rappresenta la variazione di valore del paniere nei giorni di martedì, mercoledì e giovedì rispetto al giorno precedente.



Giorno	Variazione del valore rispetto al giorno precedente
Martedì	.....
Mercoledì	−8
Giovedì	+6

a. Ricava dal grafico il valore del paniere il martedì e il mercoledì e completa la tabella inserendo la variazione avvenuta il martedì rispetto al lunedì.

b. Individua i due giorni consecutivi tra cui si è registrata la massima variazione di prezzo e i due giorni consecutivi tra cui si è registrata la variazione minima.

Cambierebbe la risposta al quesito precedente, se prendessimo in considerazione anche la giornata di venerdì, in cui il valore del paniere è risultato di 130 euro?

[a. 128 euro, 120 euro, +3 euro;
b. martedì/mercoledì, lunedì/martedì]

Colori

Matematica e... fisica

327 La massima potenza P (in W) che può essere generata da una turbina eolica di raggio r (in m) quando la velocità del vento (in m/s) è v è data con buona approssimazione dalla formula: $P = 1{,}14r^2v^3$. Consideriamo due turbine eoliche: una turbina, che chiamiamo A, di raggio r, e una turbina, che chiamiamo B, il cui raggio è una volta e mezza il raggio di A. In un certo istante t la velocità del vento è v nel luogo dove è posta la turbina A, mentre è del 20% inferiore nel luogo in cui è posta la turbina B.

a. Scrivi il monomio, in forma normale, che rappresenta la massima potenza P_B che può essere generata dalla turbina B nell'istante t.

b. Determina il rapporto tra la massima potenza P_B che può essere generata dalla turbina B nell'istante t e la massima potenza P_A che può essere generata dalla turbina A nello stesso istante e deduci di quale percentuale P_B supera P_A.

[a. $P_B = 1{,}31r^2v^3$ (arrotondando il coefficiente alla seconda cifra decimale);
b. $\frac{144}{125}$, 15,2%]

353 **Dal giornale** Vacanze di Pasqua 2016

Saranno circa 9,7 milioni gli italiani (pari al 15,9% della popolazione) che si muoveranno fino a Pasquetta per un periodo di vacanza, segnando un +7,1% rispetto alla Pasqua del 2015. Sono le previsioni di Federalberghi. Le mete preferite, per il 91% degli italiani che rimarranno nel Bel Paese, saranno il mare (29%), le città d'arte maggiori e minori (28%) e la montagna (23%).

(*Fonte*: La Stampa, 24 marzo 2016)

Grazie