

la SCUOLA **e**

29 marzo 2021





Introdurre l'idea di teoria attraverso
l'uso di software di geometria dinamica

Mirko Maracci

SOMMARIO

- Geometria tra esperienza spaziale e teoria
- L'uso dei software di geometria dinamica per introdurre l'idea di teoria
- Artefatti e strumenti: potenzialità didattiche

la
SCUOLA 

La geometria tra esperienza
spaziale e teoria

TRA ESPERIENZA SPAZIALE E TEORIA

La geometria può essere considerata come uno **strumento per comprendere, descrivere ed interagire con lo spazio** nel quale viviamo

- «La Geometria prende le mosse dall'esperienza spaziale, visiva e tattile, o anche motoria (noi ci muoviamo tra gli oggetti e li spostiamo)» (Speranza, 1988)
- «... è forse la parte della matematica più intuitiva, concreta e collegata alla realtà.» (Villani, 1995)

TRA ESPERIENZA SPAZIALE E TEORIA

La geometria **coglie alcuni aspetti** fondamentali dell'esperienza fisica – riferibili alla spazialità – e **li formalizza in una TEORIA**.

- «... come disciplina, si fonda su un ampio processo di formalizzazione che è stato portato avanti per più di 2000 anni, aumentando i livelli di rigore, astrazione e generalità» (Villani, 1995)

TRA ESPERIENZA SPAZIALE E TEORIA

«Le idee geometriche e le proprietà ad esse legate sono diventate così familiari nella nostra cultura **che il confine tra ciò che è spontaneo e ciò che invece è prodotto di elaborazione culturale non sembra essere più ben definito**, annullando la possibile distanza tra quella che possiamo considerare una naturale concettualizzazione dello spazio nel quale viviamo e la sua sistemazione teorica nella Geometria.

In realtà [...] **non sembra del tutto corretto ignorare questa distanza, o dare per scontato il suo superamento.**»

(Mariotti, 2005)

L'IDEA DI TEORIA

- Il **significato dei concetti** elaborati e dei termini utilizzati **deve essere specificato** e per farlo è necessario ricorrere ad altri concetti e altri termini, ma anche il significato di questi deve a sua volta essere specificato.
- Le **affermazioni** che riguardano tali concetti **devono essere giustificate**, o per meglio dire dimostrate, e per poterlo fare occorre ricorrere ad altre affermazioni già dimostrate o assunte come valide.

Dal punto di vista didattico la sistematizzazione non deve necessariamente (**non può**) precedere l'esplorazione e lo studio dell'ambito di conoscenze in gioco

affermazioni già dimostrate o assun

Organizzare in teoria significa definire una gerarchia tra le conoscenze, ossia:

- stabilire i concetti primitivi ai quali ricondurre la definizione esplicita di tutti gli altri, e
- assumere come validi alcuni enunciati dai quali poter dimostrare tutti gli altri.

SVILUPPO DEL PENSIERO GEOMETRICO

- ... dalle esperienze visive, tattili e motorie;
- ... attraverso l'individuazione di quegli aspetti di queste esperienze che attengono specificamente alla dimensione spaziale;
- ... e la loro organizzazione sempre più autonoma;
- ... fino a una formalizzazione via via più rigorosa e strutturata;
- ... verso una teoria "formale" che può essere assiomatizzata in modi diversi.

Esperienza
spaziale: visiva,
tattile, motoria...

Teoria
matematica

SVILUPPO DEL PENSIERO GEOMETRICO

Il riferimento agli aspetti spaziali non è superato nella sistematizzazione in teoria

«In ogni caso, per me è impossibile condurre un ragionamento geometrico in termini puramente logici, senza avere continuamente davanti agli occhi la figura alla quale ci si riferisce.»

(Klein, 1890)

INDICAZIONI NAZIONALI E LINEE GUIDA

Licei

- Gli elementi della geometria euclidea del piano e dello spazio entro cui prendono forma i **procedimenti caratteristici del pensiero matematico** (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, assiomatizzazioni);
- Il primo biennio avrà come obiettivo la **conoscenza dei fondamenti della geometria euclidea del piano**. Verrà chiarita l'importanza e il significato dei concetti di postulato, assioma, definizione, teorema, dimostrazione...

Tecnici e Professionali

- Gli **enti fondamentali** della geometria e il significato dei concetti di **postulato, assioma, definizione, teorema, dimostrazione**.
- **Comprendere dimostrazioni e sviluppare semplici catene deduttive**.

INDICAZIONI NAZIONALI E LINEE GUIDA

Licei

- La realizzazione di **costruzioni geometriche** elementari sarà effettuata sia mediante strumenti tradizionali (in particolare la riga e compasso, sottolineando il significato storico di questa metodologia nella geometria euclidea), sia mediante programmi informatici di geometria.

Tecnici e Professionali

- Eseguire **costruzioni geometriche** elementari utilizzando la riga e il compasso e/o strumenti informatici.

L'IDEA DI COSTRUZIONE GEOMETRICA

- Cosa si intende per “costruzione geometrica”?
- In cosa consiste un problema di costruzione e in cosa consiste la soluzione a un problema di costruzione?
- Quando una costruzione (la soluzione a un problema di costruzione) è corretta?

Disegno o procedura?

Teoria o pratica?

Natura degli strumenti?

L'IDEA DI COSTRUZIONE GEOMETRICA

Un problema di costruzione in geometria è un **problema teorico**:

- La **correttezza** di una costruzione geometrica viene **dimostrata**
- L'**impossibilità** di una costruzione geometrica viene **dimostrata**
- Presenza di un **quadro assiomatico**
 - Enti ideali primitivi o definiti
 - Proprietà degli enti e relazioni tra essi assunte o dimostrate
 - **Strumenti ideali**

Pensiamo ai
problemi classici
non risolubili con
riga e compasso

GEOMETRIA DELLA RIGA E DEL COMPASSO



- Riga
 - Retta (ente primitivo)
 - Assiomi che «riguardano la retta» e le sue relazioni con gli altri enti

- Compasso
 - Circonferenza (ente definito)
 - Assiomi che «riguardano la circonferenza» e le sue relazioni con gli altri enti



L'uso di software di
geometria dinamica

SOFTWARE DI GEOMETRIA DINAMICA (SGD)

Software che forniscono all'utente strumenti per:

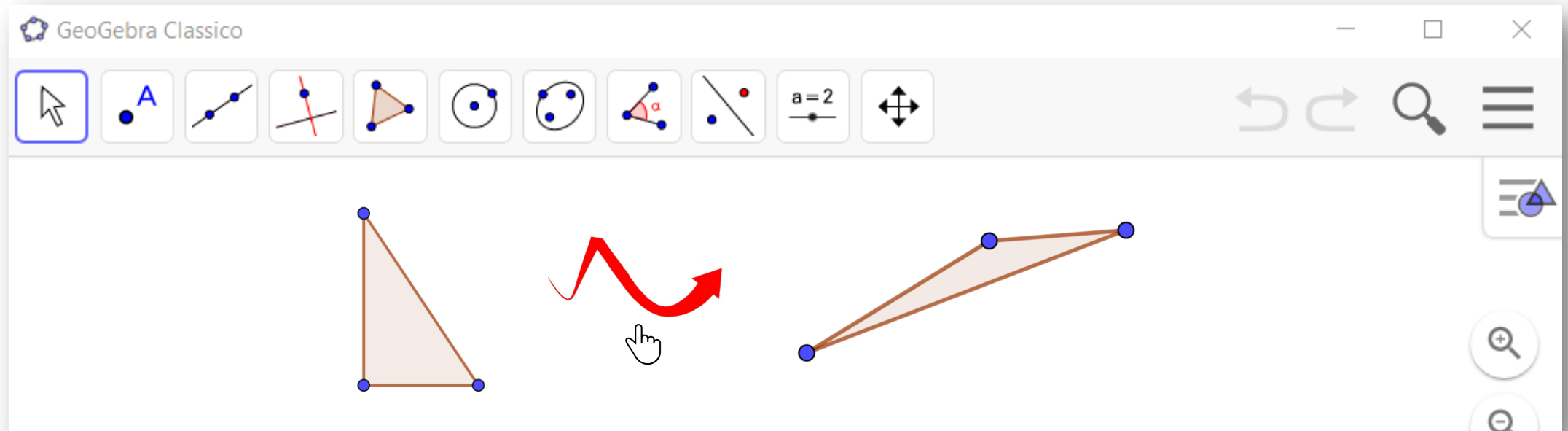
- realizzare “costruzioni geometriche”: **creare elementi grafici** – che evocano oggetti geometrici – **liberi o che intrattengono tra loro determinate relazioni** grafiche – che possiamo interpretare come relazioni geometriche;
- trasformare le costruzioni realizzate **trascinando** gli elementi realizzati.

Inoltre gli SGD includono strumenti per: misurare alcune caratteristiche degli elementi realizzati, tracciare il percorso di alcuni elementi, **personalizzare i menu e costruire nuovi comandi**

SOFTWARE DI GEOMETRIA DINAMICA (SGD)

Software che forniscono all'utente strumenti per:

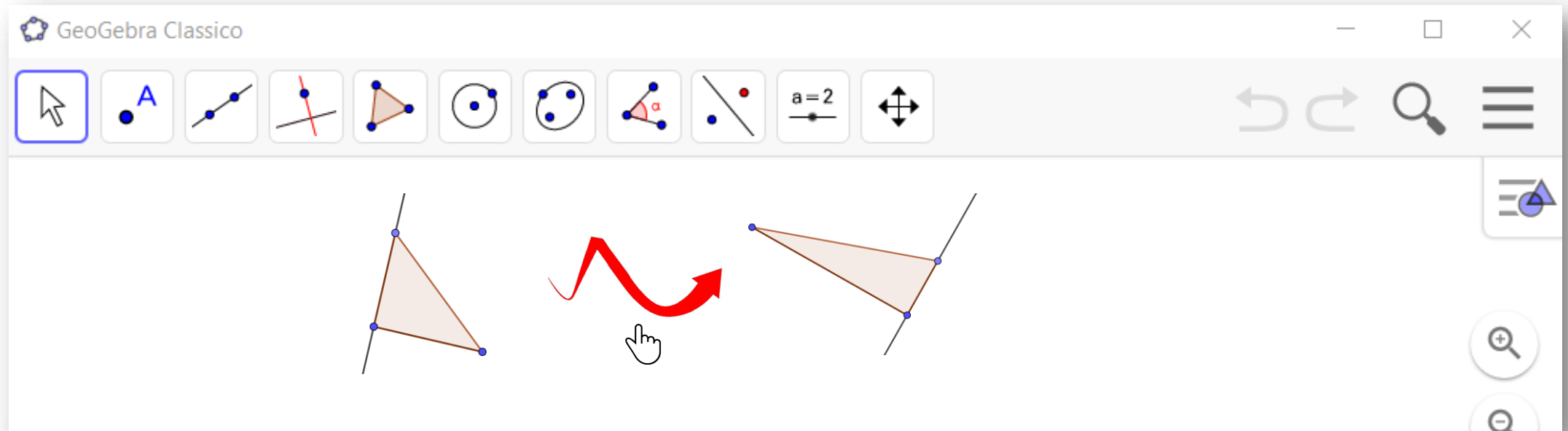
- realizzare “costruzioni geometriche”: **creare elementi grafici** ... ;
- trasformare le costruzioni realizzate **trascinando** gli elementi realizzati.



SOFTWARE DI GEOMETRIA DINAMICA (SGD)

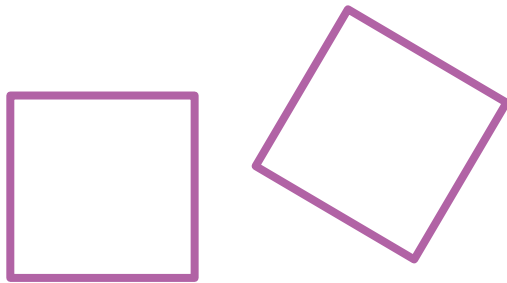
Software che forniscono all'utente strumenti per:

- realizzare “costruzioni geometriche”: **creare elementi grafici** ... ;
- trasformare le costruzioni realizzate **trascinando** gli elementi realizzati.

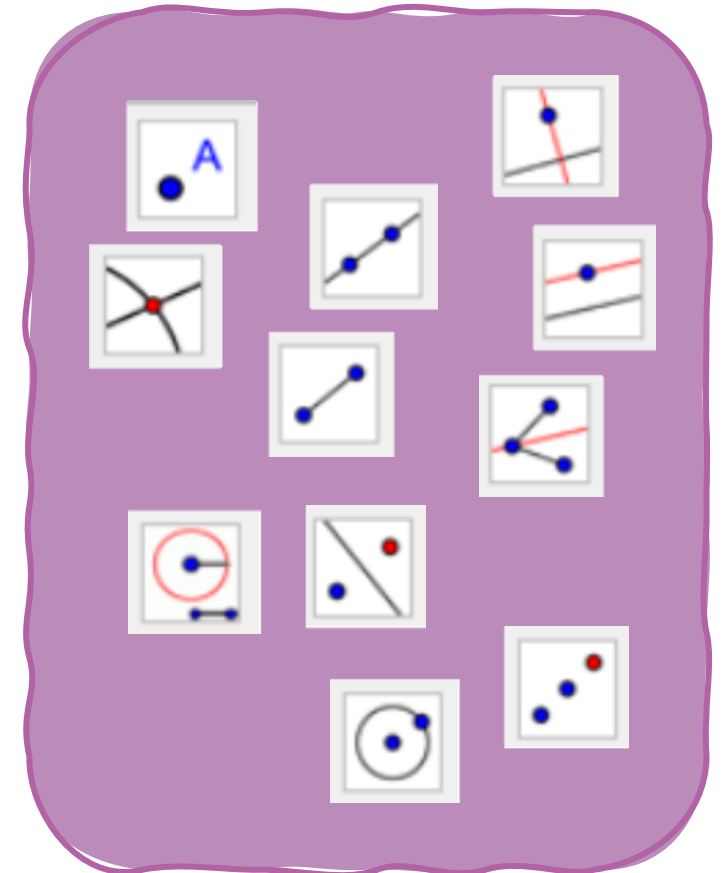


COSTRUZIONE DI FIGURE STABILI IN UN SGD

Es. costruiamo un quadrato in un SGD



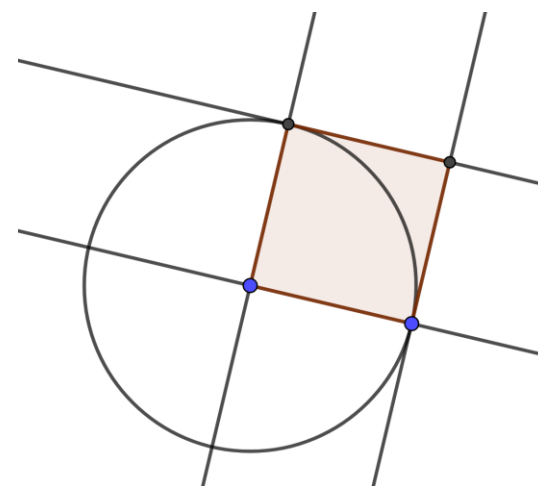
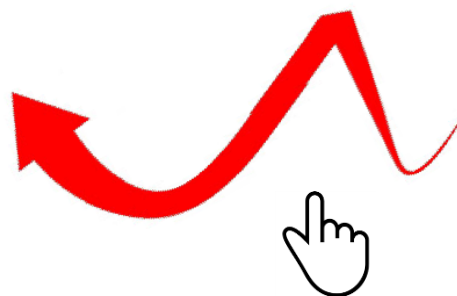
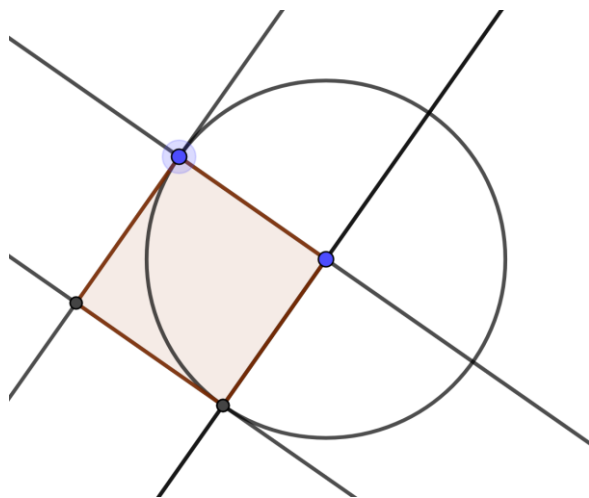
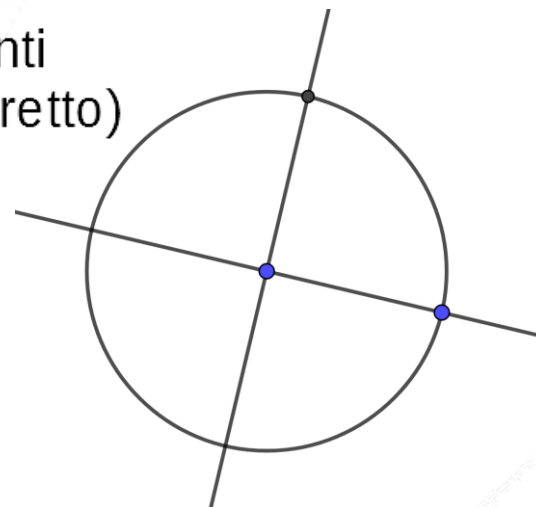
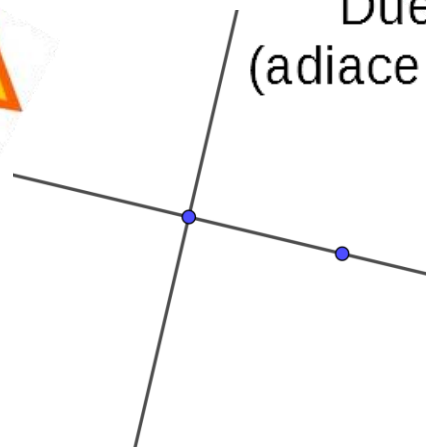
- Lati ...
- Angoli ...
- Diagonali ...
- Assi di simmetria
- ...



Un angolo
retto

Due lati congruenti
(adiacenti all'angolo retto)

Altri due
angoli
retti



COSTRUZIONE DI FIGURE STABILI IN UN SGD

Disegno: risultato della selezione/applicazione di una successione di comandi disponibili nel menu dei AGD, che evocano enti geometrici e relazioni tra loro.

Elementi legati in un sistema (**gerarchia**) di relazioni, dato dalla procedura:

- Elementi di base
 - Elementi costruiti 1
 - Elementi costruiti 2
 - Ecc.

Esplicitazione:
primo passo per la presa di
consapevolezza delle relazioni in gioco

COSTRUZIONE DI FIGURE STABILI IN UN SGD

Disegno: risultato della selezione/applicazione di una successione di comandi disponibili nel menu dei AGD, che evocano enti geometrici e relazioni tra loro.

Elementi legati in un sistema (**gerarchia**) di relazioni, dato dalla procedura:

- Elementi di base
 - Elementi costruiti 1
 - Elementi costruiti 2
 - Ecc.

I comandi hanno una propria sintassi che
dirige l'attenzione verso **elementi e**
relazioni tra essi **interpretabili** in termini
geometrici

La costruzione tiene **traccia** di questa
gerarchia e della sua **logica**

SGD: TRASCINAMENTO E INVARIANTI

Alcuni elementi del disegno possono essere trascinati, ma **non tutti**, e **non tutti allo stesso modo**. Il trascinamento modifica il disegno ma preserva alcune relazioni spaziali:

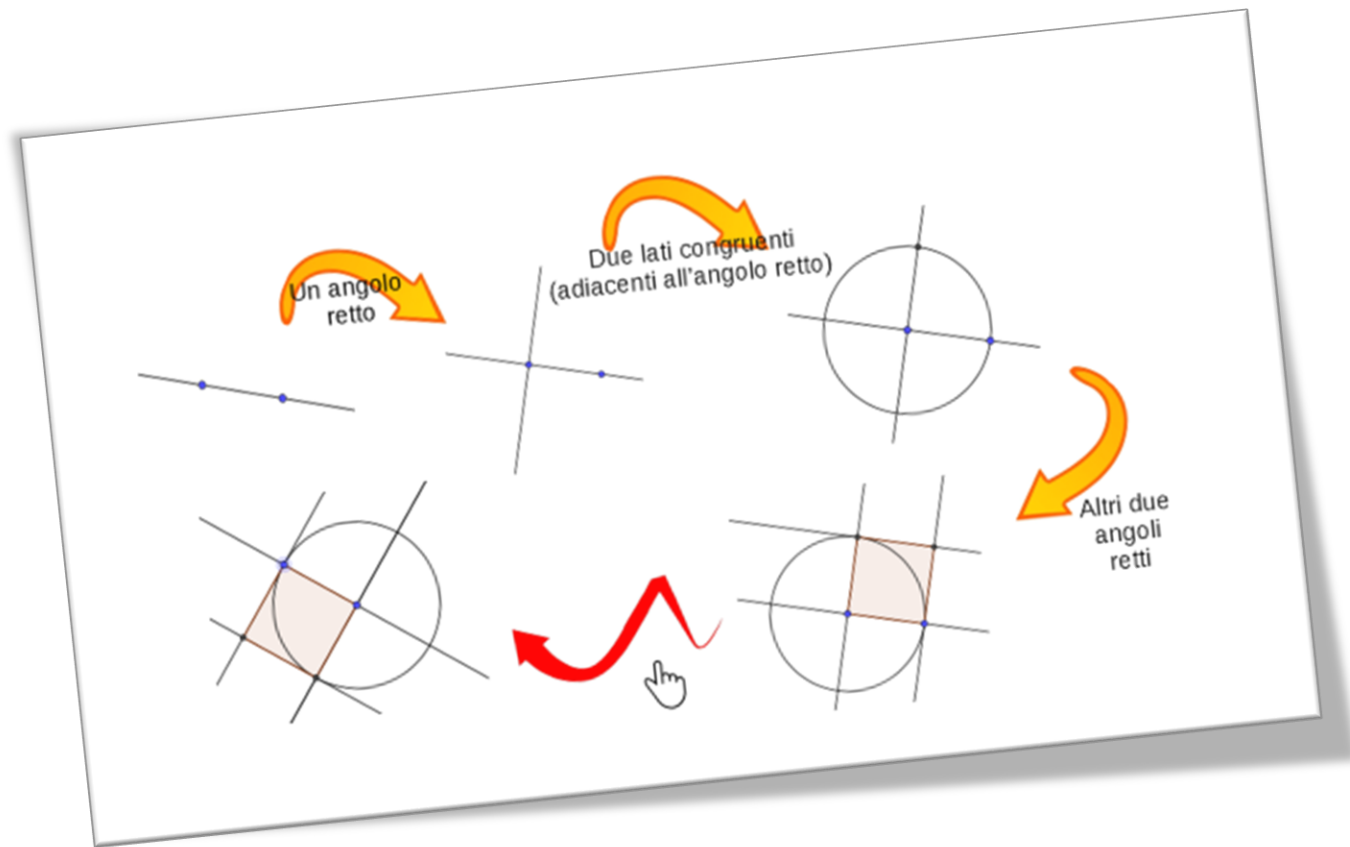
- le relazioni spaziali tra gli elementi del disegno **definite nella costruzione attraverso l'uso dei comandi** del SGD
- le relazioni spaziali tra gli elementi del disegno che sono **conseguenza di quelle definite** attraverso l'uso dei comandi.

Invarianti di
costruzione (o diretti)

Invarianti
derivati (o indiretti)

COSTRUZIONE DI FIGURE STABILI IN UN SGD: PROCESSI SOLLECITATI

- Processi di natura **percettiva**: riconoscimento di forme
- Processi di natura **discorsiva**: descrizione della figura, analisi delle proprietà
- Processi legati alla presa in conto delle funzionalità e della **logica** di funzionamento dello strumento e alla **concettualizzazione della figura in termini di sua realizzabilità** con lo strumento

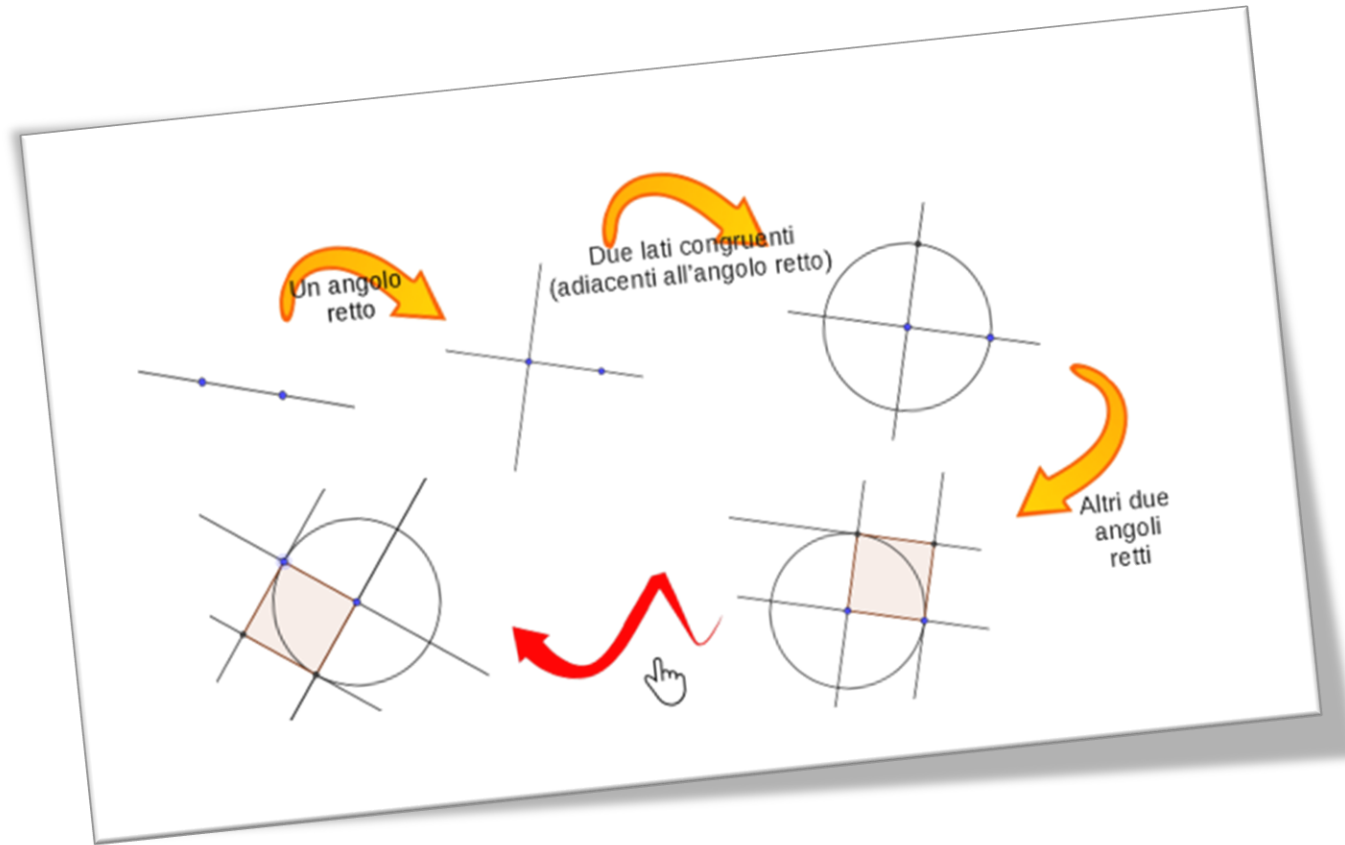


Quadrilatero con:

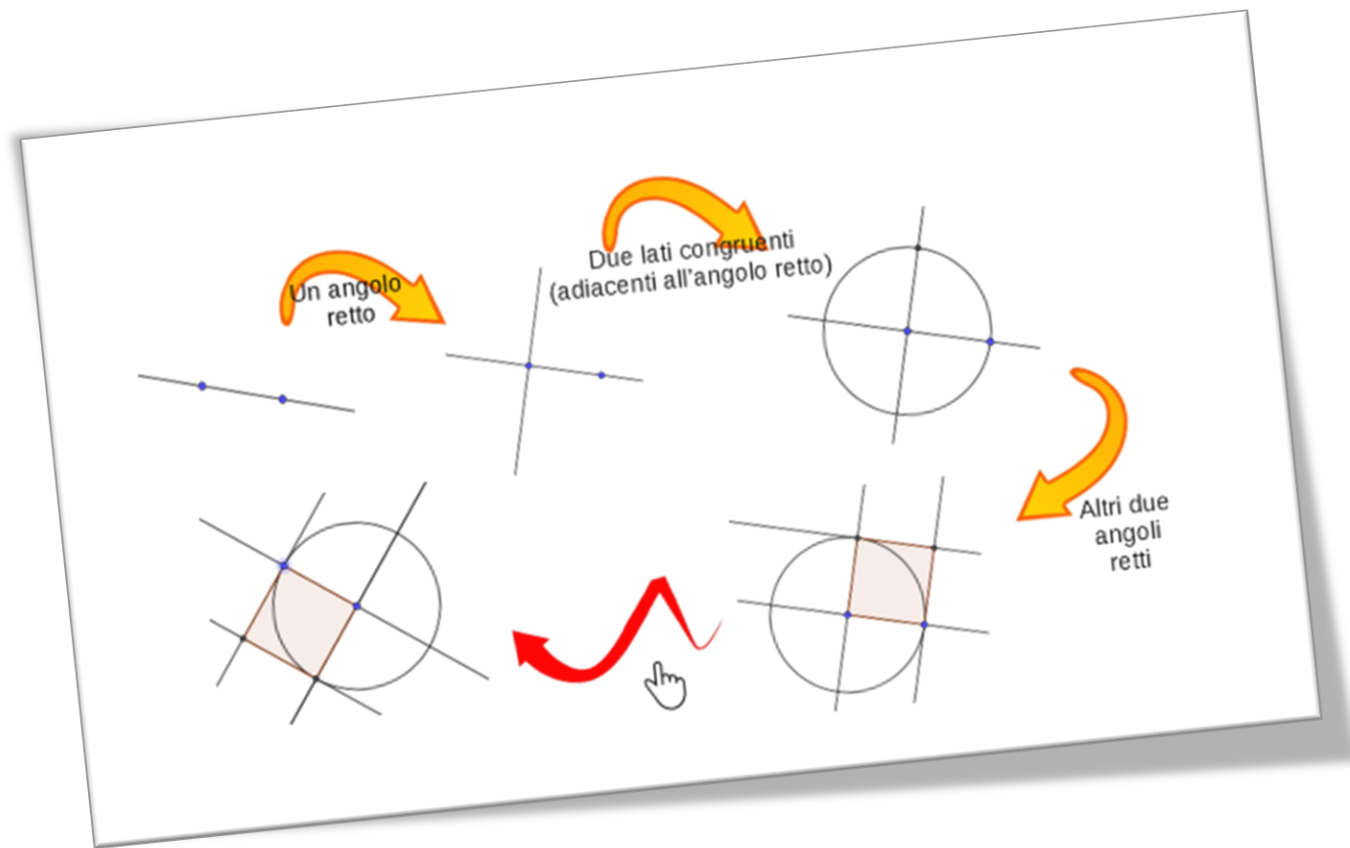
- 3 angoli retti
- 2 lati consecutivi congruenti (adiacenti ciascuno a due angoli retti)



- Quattro lati congruenti
- Due coppie di lati paralleli
- Quattro angoli congruenti
- Quattro angoli retti
- Diagonali congruenti
- Diagonali perpendicolari
- Diagonali che si dimezzano
- ...



- Un SGD non rappresenta solo enti geometrici e relazioni tra essi,
- Ma anche **relazioni tra enunciati**

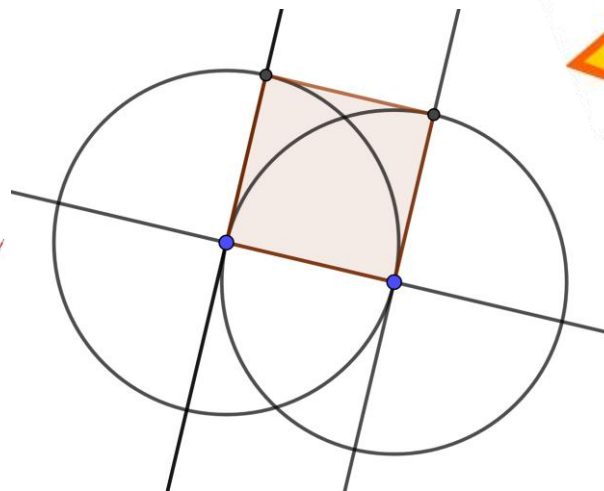
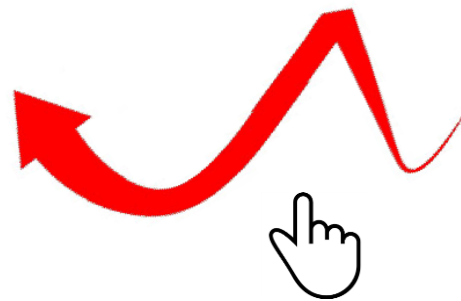
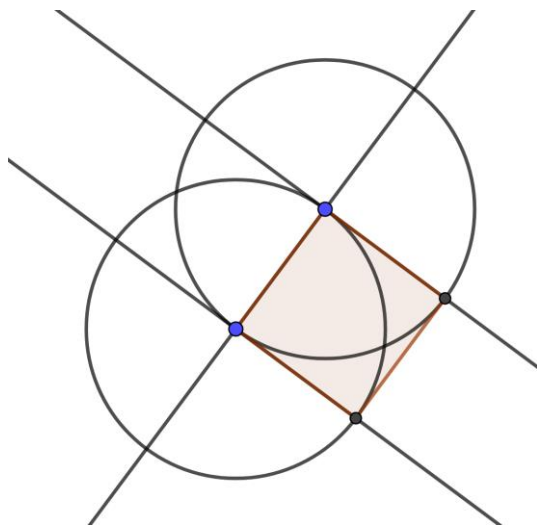
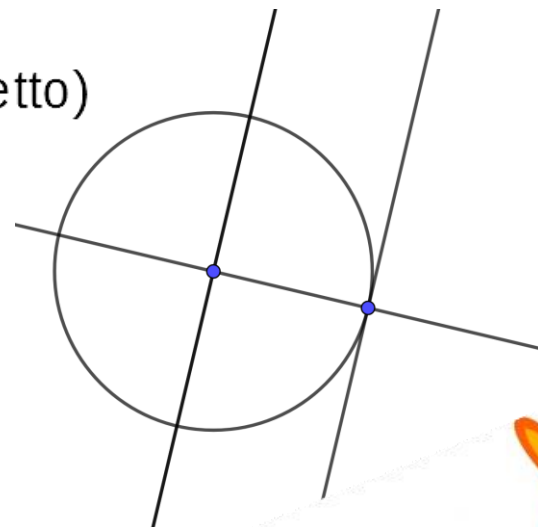
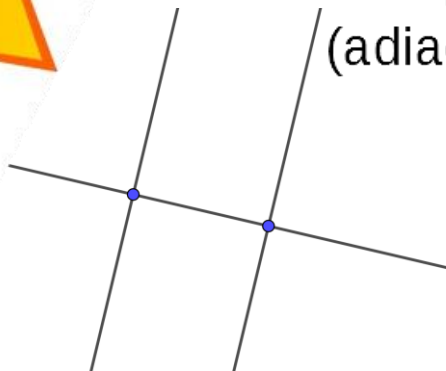


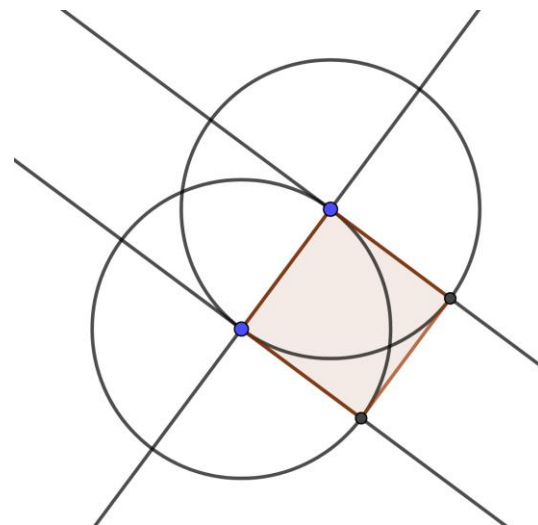
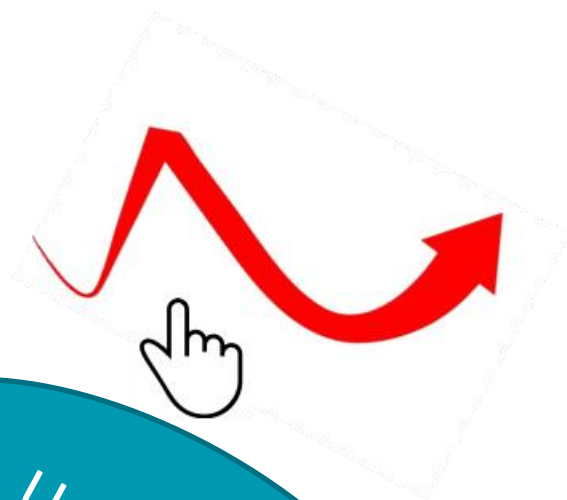
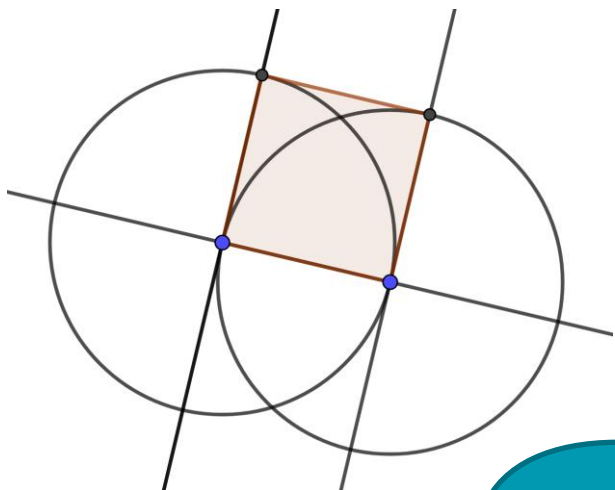
- Possiamo **assumere come definizione** di quadrato quella di *“quadrilatero con 3 angoli retti 2 lati consecutivi congruenti (adiacenti ciascuno a due angoli retti)”*
- Tutte le altre proprietà del quadrato sono **conseguenza di queste**

Due angoli consecutivi retti

Due lati congruenti (adiacenti a un angolo retto)

Un terzo lato congruente agli altri due





Quadrilatero con:

- 3 lati congruenti
- 2 angoli retti (compresi tra i lati congruenti)

Una nuova
definizione?

- Quattro lati congruenti
- Due coppie di lati paralleli
- Quattro angoli congruenti
- Quattro angoli retti
- Diagonali congruenti
- Diagonali perpendicolari
- Diagonali che si dimezzano
- ...

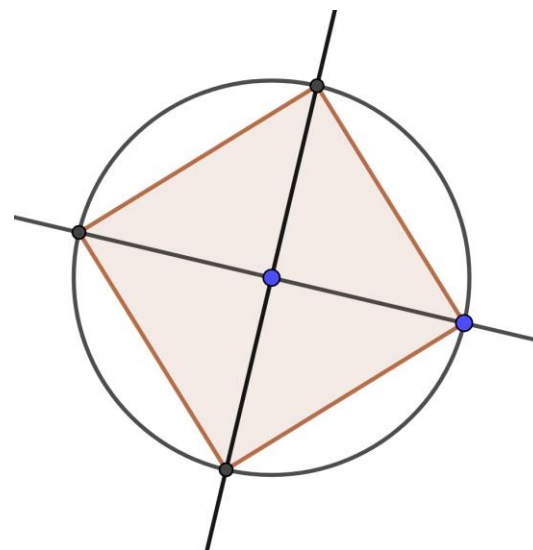
Diagonali
perpendicolari

Diagonali congruenti, che si
dimezzano reciprocamente

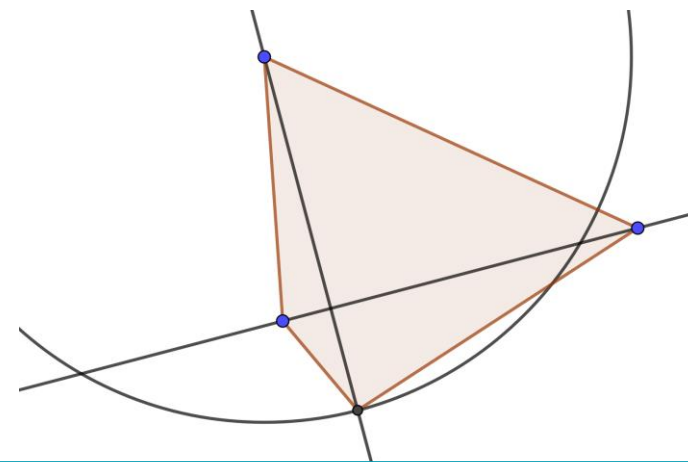
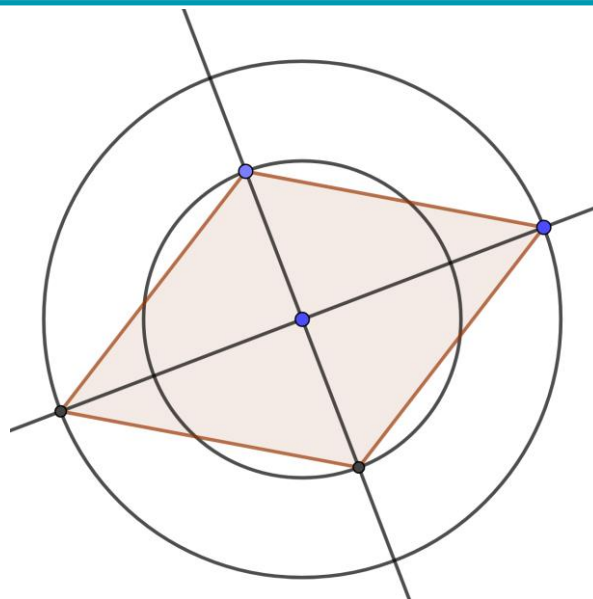
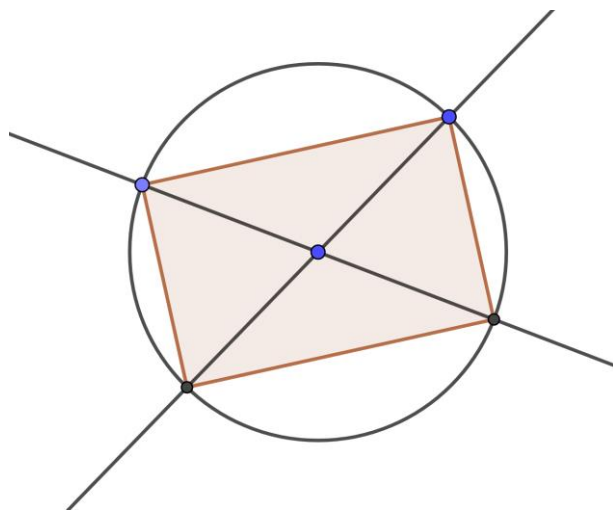
Una terza
definizione?

Quadrilatero con:

- Diagonali congruenti
- Diagonali perpendicolari
- Diagonali che si dimezzano



- Diagonali perpendicolari
- Diagonali che si dimezzano



- Diagonali congruenti
- Diagonali che si dimezzano

- Diagonali congruenti
- Diagonali perpendicolari

UNA PRIMA SINTESI

La richiesta di produrre disegni stabili rispetto al trascinamento:

- ha **senso** per gli allievi
- sposta l'attenzione dal prodotto (disegno) alla **procedura** per realizzarlo
- sposta l'attenzione dalla considerazione della precisione e accuratezza alla validità delle **proprietà geometriche che definiscono la figura**
- dirige l'attenzione sulla **interrelazione tra le proprietà di una figura**
- rende significativa la richiesta di **descrivere** la procedura
- può offrire il contesto in cui introdurre la richiesta di **spiegare perché** una procedura “funziona” o “non funziona”

L'IDEA DI COSTRUZIONE GEOMETRICA

Un problema di costruzione in geometria è un **problema teorico**:

- La **correttezza** di una costruzione geometrica viene **dimostrata**
- L'**impossibilità** di una costruzione geometrica viene **dimostrata**
- Presenza di un **quadro assiomatico**
 - Enti ideali primitivi o definiti
 - Proprietà degli enti e relazioni tra essi assunte o dimostrate
 - **Strumenti ideali**

GLI STRUMENTI DEL SGD

- Retta
- Circonferenza
- Compasso
- Bisettrice
- Perpendicolare
- Parallela
- Asse di un segmento
- Punto medio
- Poligono regolare
- Ellisse
- Iperbole
- Parabola
- Tangenti a coniche
- Segmento di lunghezza data
- Angolo di ampiezza data
- Simmetria assiale
- Simmetria centrale
- Traslazione
- Rotazione
- Omotetia
- Inversione circolare

GLI STRUMENTI DEL SGD

- Retta
- Circonferenza
- Compasso
- Bisettrice
- Perpendicolare
- Parallela
- Asse di un segmento
- Punto medio
- Poligono regolare
- Simmetria assiale
- Simmetria centrale
- Traslazione
- Rotazione
- Involuzione
- Inversione circolare

- Lista “sovrabbondante”
- Rischio di far perdere senso all’idea di una “geometria delle costruzioni” in cui, utilizzando pochi strumenti, si costruiscono gli enti e gli strumenti che servono

SOFTWARE DI GEOMETRIA DINAMICA (SGD)

Software che forniscono all'utente artefatti per:

- realizzare “costruzioni geometriche”: **creare elementi grafici** – che evocano oggetti geometrici – **liberi o che intrattengono tra loro determinate relazioni** grafiche – che possiamo interpretare come relazioni geometriche;
- trasformare le costruzioni realizzate **trascinando** gli elementi realizzati.

Inoltre gli SGD includono strumenti per: misurare alcune caratteristiche degli elementi realizzati, tracciare il percorso di alcuni elementi, **personalizzare i menu e costruire nuovi comandi**

PERSONALIZZAZIONE DEL ME

GeoGebra Classico



The image displays the GeoGebra Classic interface, focusing on the toolbar and its customization options. The main toolbar is shown on the left, featuring a grid of icons for various geometric tools. A red arrow points from the 'Punto' (Point) icon in the main toolbar to a detailed view of its options on the right.

The detailed view shows the following options for the 'Punto' tool:

- Punto**: A single point.
- Intersezione**: The intersection of two lines.
- Retta**: A line.
- Segmento**: A line segment.
- Semiretta**: A ray.
- Circonferenza - dati il centro e un punto**: A circle defined by its center and a point on its circumference.
- Compasso**: A compass.

COSTRUZIONE DI COMANDI MANCANTI

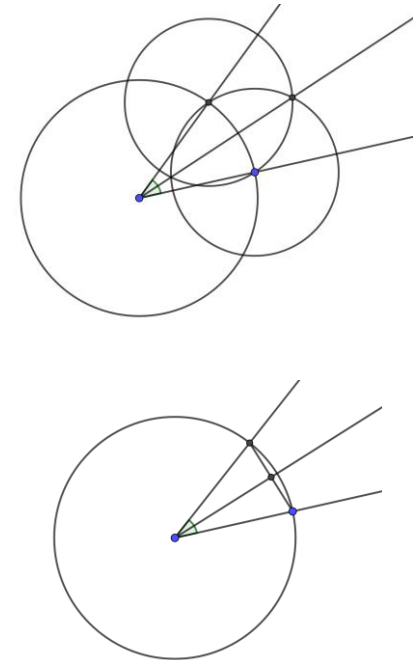
In un menu ridotto, acquista senso la richiesta di **costruire comandi *mancanti***

- bisettrice di un angolo
- retta perpendicolare a una retta
- ...

COSTRUZIONE DI COMANDI MANCANTI

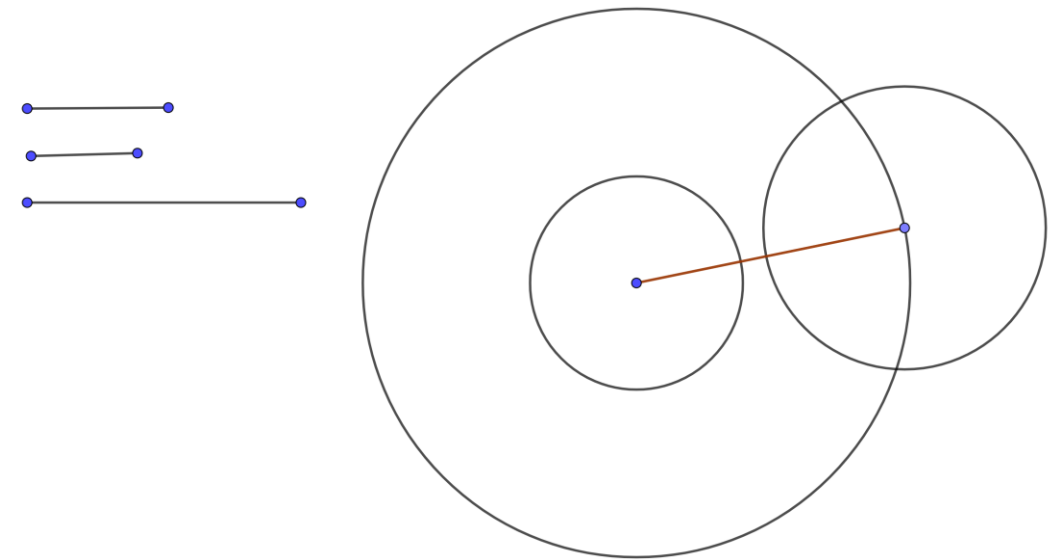
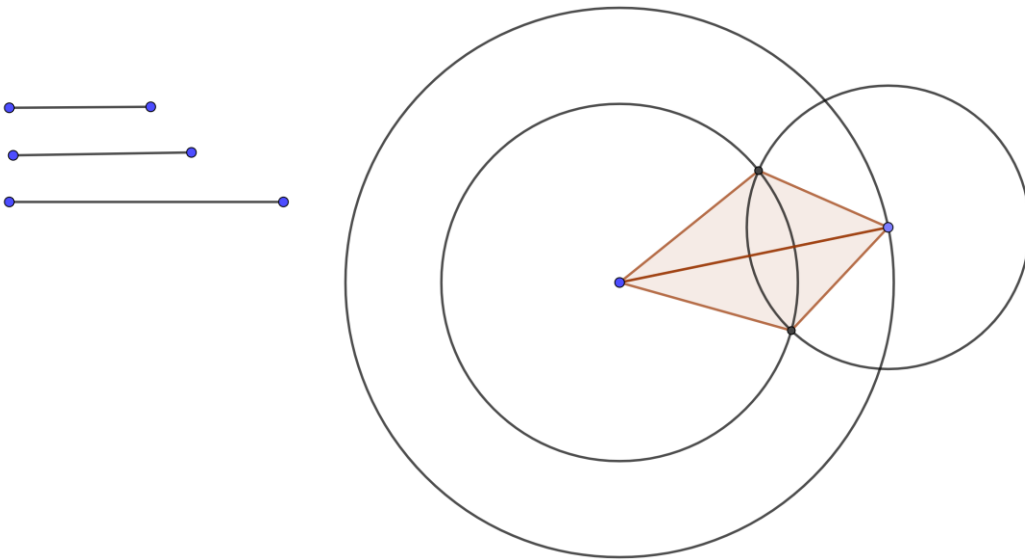
In un menu ridotto, acquista senso la richiesta di **costruire comandi *mancanti***

- Sinergia con corsi di disegno tecnico
- Cercare costruzioni «meno tradizionali», esplorare le proprietà di figure note con un punto di vista diverso
- Immaginare diverse organizzazioni della teoria



ESAMINARE LA COSTRUIBILITÀ

Costruire 3 segmenti nel piano e poi un triangolo che ha i lati di lunghezza uguale a quella dei 3 segmenti. È sempre possibile farlo? Quanti triangoli si possono costruire? Come sono tra loro?



ESAMINARE LA COSTRUIBILITÀ

Costruire 3 segmenti nel piano e poi un triangolo che ha i lati di lunghezza uguale a quella dei 3 segmenti. È sempre possibile farlo? Quanti triangoli si possono costruire? Come sono tra loro?

- “Definizione” di congruenza tra segmenti
- Definizione di circonferenza
- Definizione di triangolo e casi limite
- Definizione di congruenza di triangoli
- Formulazione della disuguaglianza triangolare (se e solo se)
- III criterio di congruenza dei triangoli

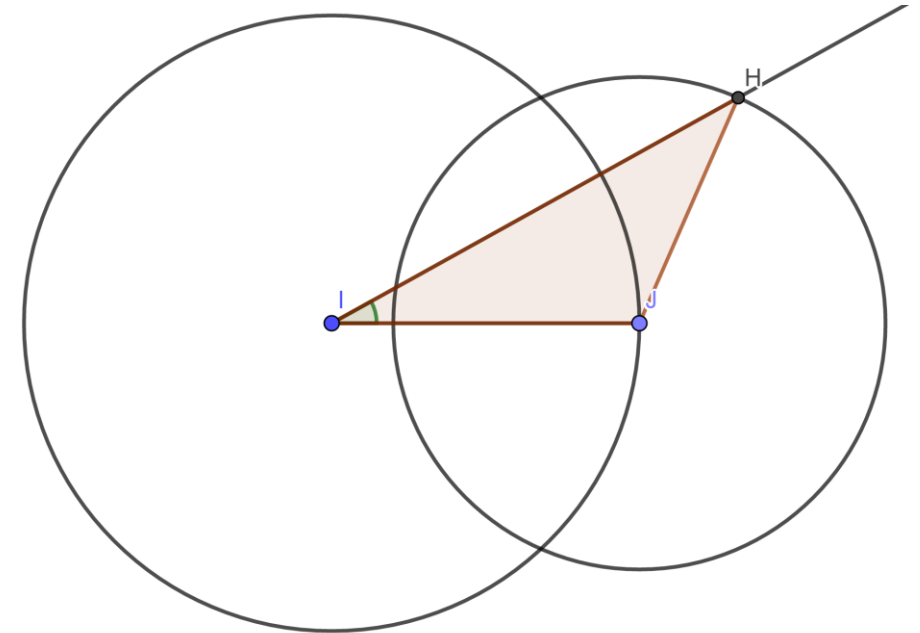
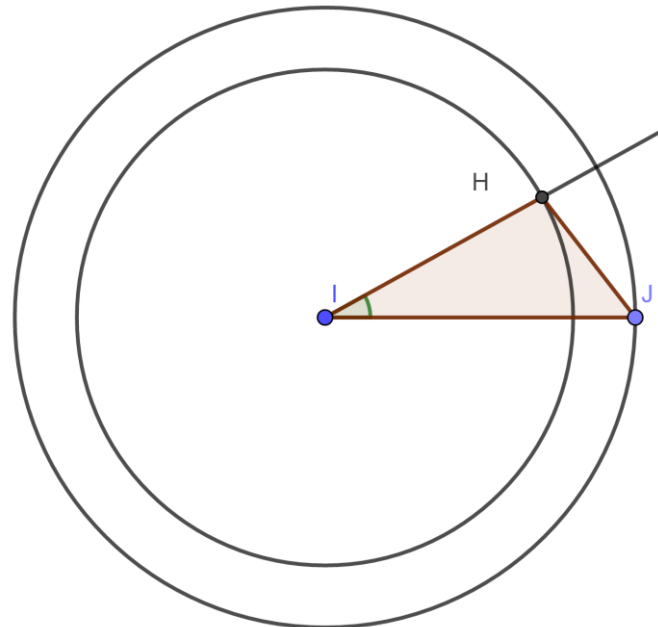
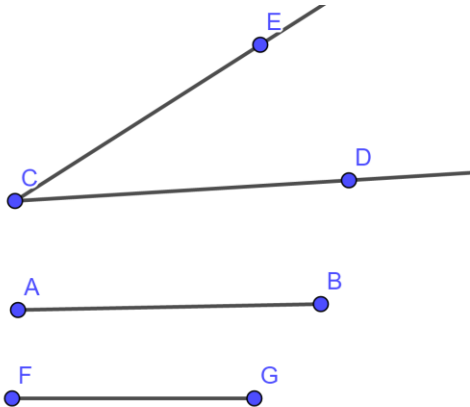
Dato un angolo, è possibile costruire in un'altra parte dello schermo un angolo ad esso congruente?

ESAMINARE LA COSTRUIBILITÀ

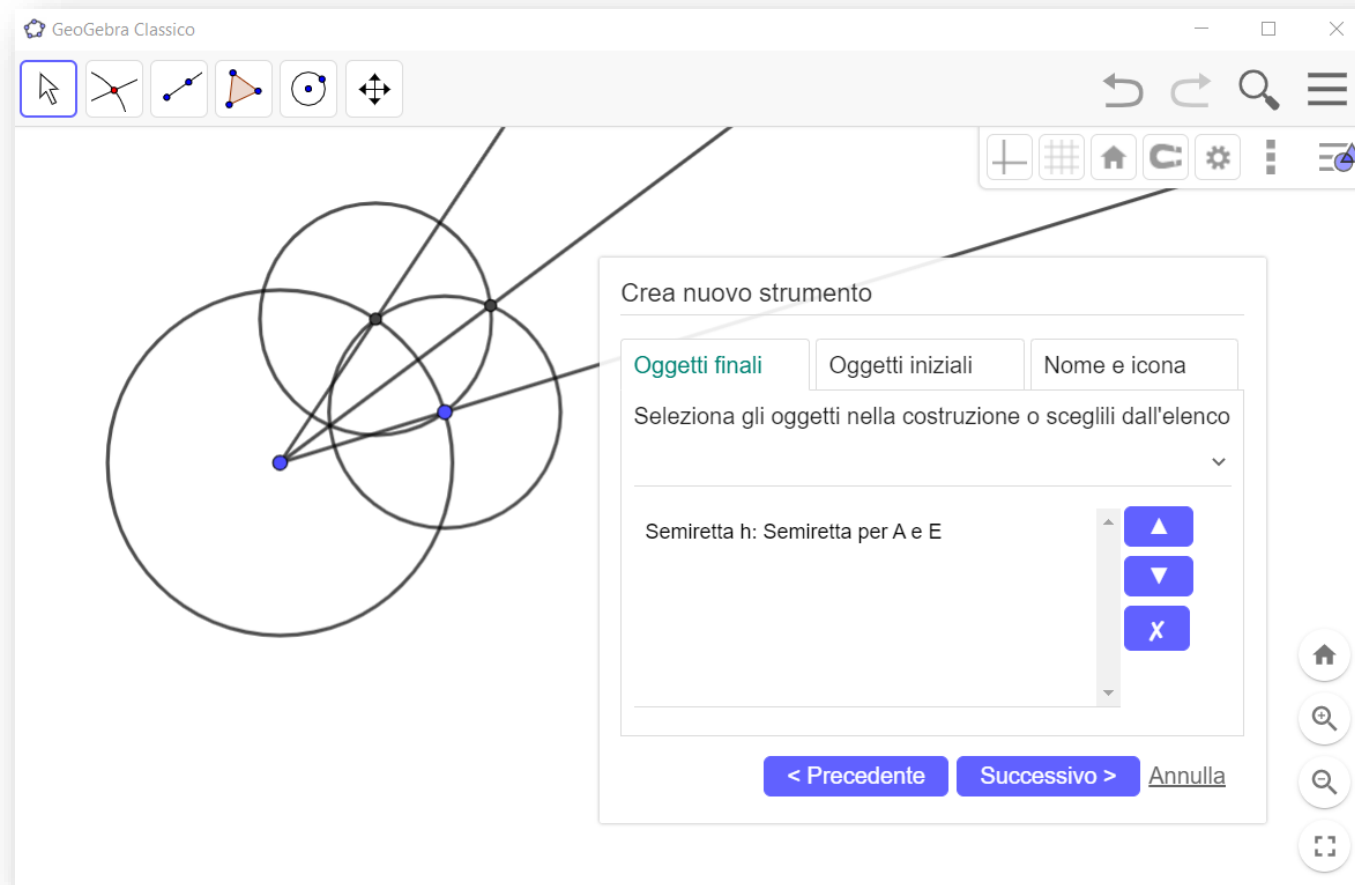
- Presi un segmento e due angoli a piacere, è sempre possibile costruire un triangolo che abbia un lato congruente al segmento preso e una coppia di angoli congruenti ai due angoli presi?
- Presi due segmenti e un angolo, è sempre possibile costruire un triangolo che abbia due lati congruenti ai due segmenti presi e un angolo congruente all'angolo dato?

ESAMINARE LA COSTRUIBILITÀ

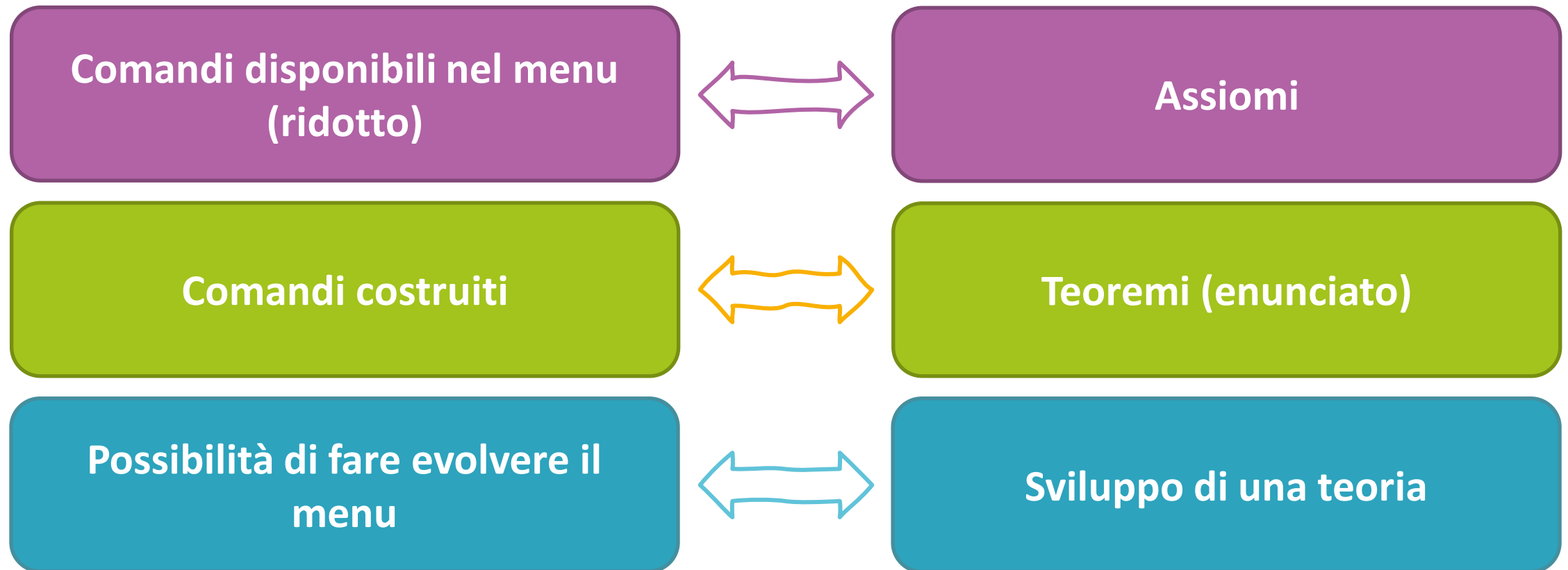
- Presi due segmenti e un angolo, è sempre possibile costruire un triangolo che abbia due lati congruenti ai due segmenti presi e un angolo congruente all'angolo dato?



CREAZIONE DI NUOVI COMANDI



SGD E SENSO DI TEORIA



RIASSUMENDO

- offrire un contesto di **senso** per gli allievi per le attività di costruzione e produzione di disegni
- promuovere processi di **analisi delle proprietà geometriche** in riferimento all'uso e alle funzionalità del SGD
- promuovere una riflessione sulle **relazioni (di tipo condizionale) tra enunciati**
- promuovere un'introduzione all'idea di **dimostrazione** come discorso volto a **spiegare perché** o **perché non**
- promuovere un'introduzione all'**idea di teoria**
- stabilire una **corrispondenza tra comandi** (del menu o costruiti) e **enunciati** (assiomi e teoremi)

RIASSUMENDO

- offrire un contesto di **senso** per gli allievi per le attività di costruzione e produzione di discorsi
- promuovere processi di produzione all'**idea di proprietà geometrica** all'uso e alle funzioni
- promuovere una corrispondenza tra **relazioni (di tipo condizionale) tra enunciati** e **enunciati** (assiomati e teoremi)
- promuovere un'introduzione all'idea di **dimostrazione** come discorso volto a **perché non** produzione all'**idea di**

- Questi processi non sono spontanei
- Richiedono la mediazione intenzionale dell'insegnante

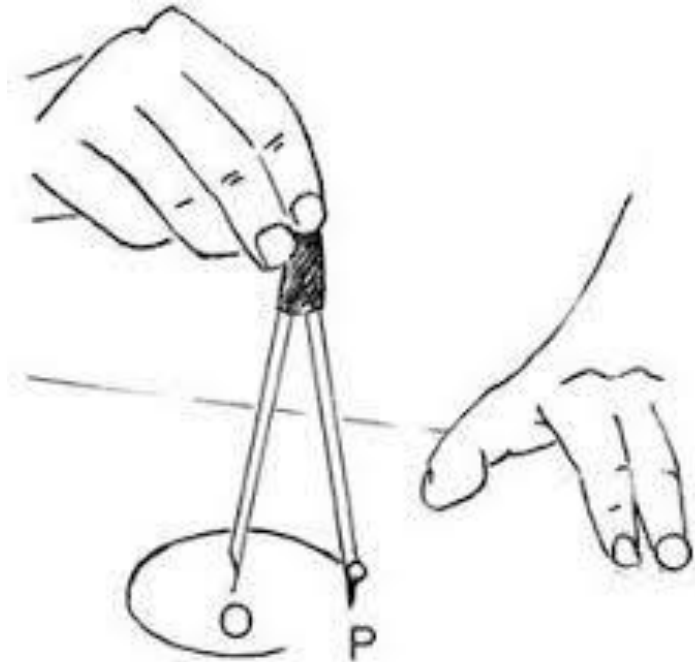
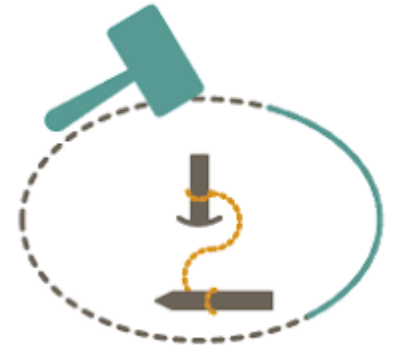
(Hasan, Kozulin, Mariotti,...)

la
SCUOLA Strumenti e attività

STRUMENTI E ATTIVITÀ

L'uso di diversi strumenti per svolgere una attività.

Es: tracciare una circonferenza

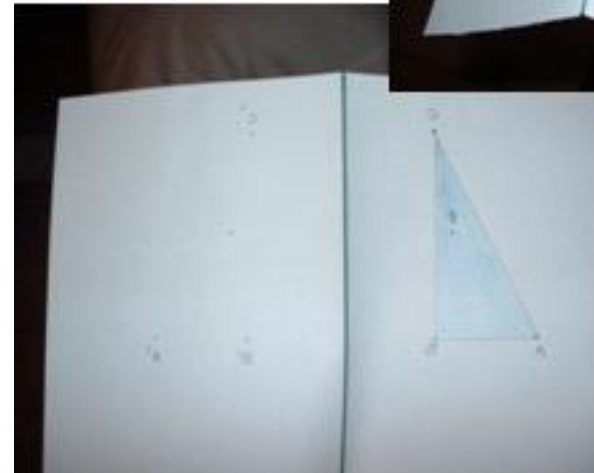
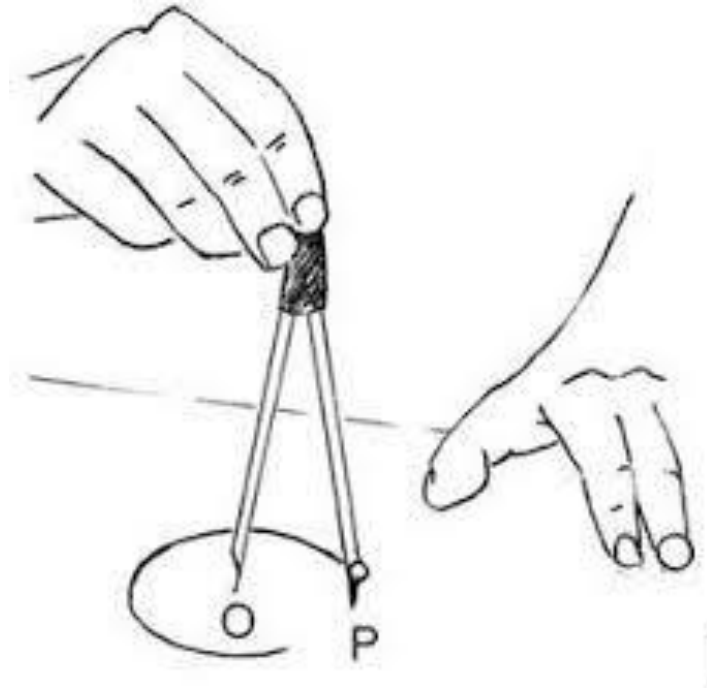
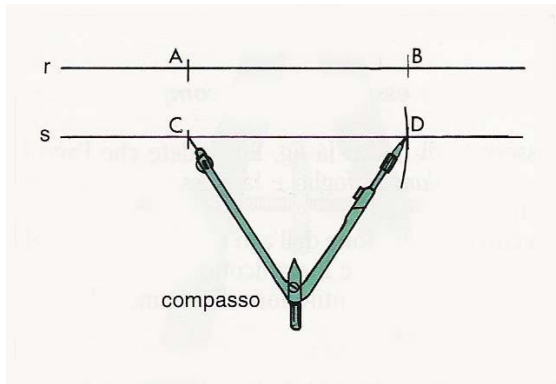


-  Circonferenza - centro e punto
-  Circonferenza - centro e raggio
-  Compasso

STRUMENTI E ATTIVITÀ

L'uso di uno strumento per svolgere diverse attività.

Es: uso del compasso



ARTEFATTO VS STRUMENTO

Artefatto

- Oggetto materiale o immateriale (simbolico) costruito, progettato, modificato, concepito per essere utilizzato in determinati modi per svolgere determinate attività
- Incorpora esperienze, conoscenze, che sono collettive, culturali

Strumento

- Entità mista, comprende le modalità (schemi) d'uso costruite dal soggetto che utilizza l'artefatto (processo complesso)
- Tali schemi d'uso possono rimanere taciti, ma costituiscono comunque una forma di conoscenza pragmatica

(Rabardel)

LA MEDIAZIONE DELL'ARTEFATTO

- consente all'utente, di agire verso l'esterno: svolgere certe azioni finalizzate a compiere un'attività, produrre o modificare l'oggetto dell'attività, raggiungere un obiettivo
- orienta l'attenzione dell'utente, ne struttura l'azione, sollecita lo sviluppo di forme di conoscenza **potenzialmente coerenti con l'attività da svolgere e le caratteristiche dello strumento**

Componente
pragmatica

Componente
epistemica

(Norman, Rabardel)

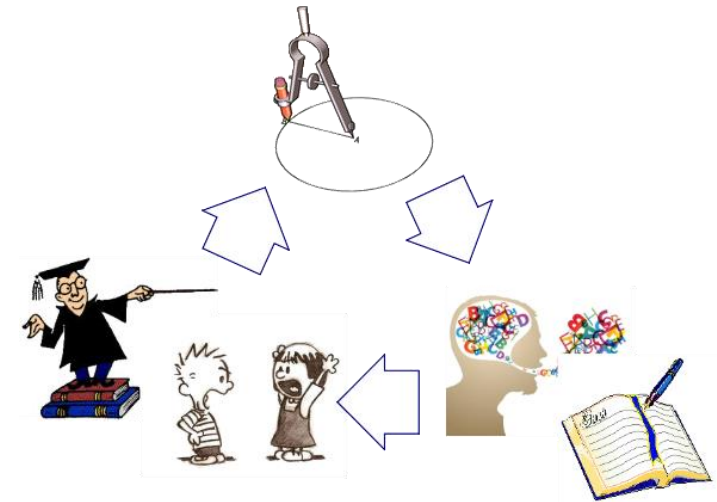
DALLE POTENZIALITÀ ALLA LORO REALIZZAZIONE

- Qual è il processo attraverso il quale queste forme di conoscenza emergono? In quale modo l'individuo assume **consapevolezza sulle conoscenze** che costruisce in interazione con l'artefatto e **controllo intenzionale** su esse? Come favorirlo?
- Qual è **la relazione tra la conoscenza personale** che l'individuo costruisce in situazione **e la conoscenza matematica**?

(Bartolini Bussi, Mariotti)

DALLE POTENZIALITÀ ALLA LORO REALIZZAZIONE

- L'individuo deve essere coinvolto in **processi semiotici** di diverso tipo, in particolare di **verbalizzazione**
- L'insegnante deve svolgere un ruolo di **orchestrazione** di questi processi e di mediazione rispetto alle conoscenze matematiche obiettivo



(Bartolini Bussi, Mariotti)



Grazie