

Insegnare con Matematica allo specchio

Relatori:

Pierangela Accomazzo

Cristina Giuliano Albo

Leonardo Sasso

Claudio Zanone



Quale idea di matematica?

- Una matematica a misura di studente, illustrata con un linguaggio rigoroso
- Una matematica attiva e coinvolgente
- Una matematica che parta da problemi, volta non solo all'acquisizione delle tecniche di calcolo, ma soprattutto alla formazione di competenze e alla costruzione di significati



Quale idea di matematica?

- Una matematica con una forte valenza sia strumentale sia culturale
- Una matematica inclusiva, che aiuti a stare bene a scuola
- Una matematica attenta alla cittadinanza e alla sostenibilità



Star bene a scuola

I primi provvedimenti dello stesso PNRR (cfr. Scuola 4.0) riportano che i finanziamenti sono finalizzati a “favorire:

- *l'apprendimento attivo e collaborativo;*
- *la motivazione ad apprendere e il benessere emotivo;*
- *il peer learning e il problem solving;*
- *l'inclusione e la didattica personalizzata* per lo sviluppo di “abilità cognitive e metacognitive (pensiero critico e creativo);
- *abilità sociali ed emotive (empatia, autoefficacia, responsabilità, collaborazione)”.*



Una didattica nuova

- Lezione attiva «a specchio»
- Laboratorio per esplorare la matematica
- Nuovo modo di classificare gli esercizi
- Percorso didattico a spirale



Lezione attiva "a specchio"

Lezione 9 Teoremi sui triangoli qualsiasi

TEORIA

7 Teorema del coseno

Il teorema del coseno consente di individuare la misura di un lato di un triangolo, note le misure degli altri due e l'ampiezza dell'angolo compreso tra essi.

TEOREMA 6 Teorema del coseno (o teorema di Carnot)

In un triangolo, il quadrato della misura di un lato è uguale alla somma dei quadrati delle misure degli altri due, diminuita del doppio prodotto delle misure di questi stessi lati per il coseno dell'angolo compreso tra essi. Secondo le convenzioni introdotte nella Lezione 1, possiamo esprimere il teorema nella forma:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

DIMOSTRAZIONE

Consideriamo il triangolo acutangolo ABC (Fig. 6). In cui CH è l'altezza relativa al lato AB. Per il teorema di Pitagora abbiamo:

$$a^2 = CH^2 + HB^2$$

Per il primo teorema sui triangoli rettangoli si ha $CH = b \sin \alpha$ e $BH = c - b \cos \alpha$, pertanto possiamo sostituire nella relazione precedente:

$$a^2 = (b \sin \alpha)^2 + (c - b \cos \alpha)^2 =$$

$$= b^2 \sin^2 \alpha + c^2 - 2bc \cos \alpha + b^2 \cos^2 \alpha =$$

$$= b^2 [\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha] + c^2 - 2bc \cos \alpha =$$

$$= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

Procedendo analogamente per gli altri lati si dimostrano le ulteriori due uguaglianze.

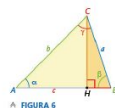


FIGURA 6

Esempio 4

Nel triangolo ABC, $AB = 4$, $AC = 2\sqrt{2}$ e $\angle A = \frac{\pi}{4}$. Verifichiamo che il triangolo è isoscele e calcoliamo il suo perimetro.

Applichiamo il teorema del coseno per determinare la misura del lato BC:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$

da cui:

$$a^2 = (2\sqrt{2})^2 + 4^2 - 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 4 \cdot \cos \frac{\pi}{4} = 8 \rightarrow$$

$$\rightarrow a = 2\sqrt{2} = b.$$

Il triangolo è pertanto isoscele e ha perimetro:

$$P = 4 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4(1 + \sqrt{2}).$$

Se il triangolo è ottusangolo (Fig. 7) la dimostrazione è analoga. Essendo CH l'altezza relativa al lato AB, per il teorema di Pitagora abbiamo la stessa relazione:

$$a^2 = CH^2 + HB^2$$

e per il primo teorema sui triangoli rettangoli:

$$CH = b \sin(\pi - \alpha) = b \sin \alpha \quad e$$

$$BH = c + b \cos(\pi - \alpha) = c - b \cos \alpha$$

da cui si ricade nel caso precedente.

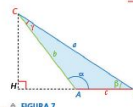


FIGURA 7

T232

RIFLETTI SULLA TEORIA

UNITÀ 14 | La trigonometria

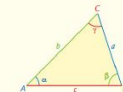
ESERCIZIO SVOLTO

Riferendoti alla figura, determina la misura dell'elemento richiesto, senza l'uso della calcolatrice.

17 $a = 4$ $b = 6$ $\gamma = \frac{2}{3}\pi$ $c = ?$ $[2\sqrt{19}]$

18 $b = 2$ $c = 5$ $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ $a = ?$ $[\sqrt{14}]$

19 $a = \frac{3}{2}$ $b = \sqrt{3}$ $c = \frac{1}{2}$ $\cos \gamma = ?$ $[\frac{5\sqrt{3}}{9}]$



Note le misure dei lati del triangolo ABC, determina l'ampiezza esatta dell'angolo richiesto. Poi, con l'aiuto della calcolatrice, esprimi le eventuali approssimazioni dei risultati in gradi, nella forma decimale, a meno di un decimo.

20 **RISOLVI LA TACCA** $a = 2$ $b = 3$ $c = 4$ $\alpha = ?$

TRACCE

Scriviamo l'uguaglianza che esprime il teorema del coseno per il lato opposto all'angolo α :

$$a^2 = \dots^2 + \dots^2 - 2 \dots \cos \alpha,$$

da cui: $\cos \alpha = \frac{\dots^2 + \dots^2 - a^2}{2 \dots} = \frac{2^2 + 3^2 - 4^2}{2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{6} \Rightarrow \alpha = \dots \approx 29,0^\circ.$

21 $a = 4$ $b = 2\sqrt{2}$ $c = 2 + 2\sqrt{3}$ $\beta = ?$ $[30^\circ]$

22 $a = 3$ $b = 1$ $c = 2$ $\alpha = ?$ $[\text{triangolo degenere nel segmento } AB; \alpha = 180^\circ]$

23 $a = \sqrt{5}$ $b = \sqrt{3}$ $c = \sqrt{13}$ $\gamma = ?$ $[\gamma = \arccos(-\frac{\sqrt{15}}{6}) \approx 130,2^\circ]$

24 Con GeoGebra Inserisci nel piano un triangolo ABC avente $a = 4$, $b = 6$ e $\gamma = 30^\circ$. Misura la lunghezza del lato c e verifica che il risultato soddisfa il teorema del coseno.

25 Con GeoGebra Disegna nel piano un triangolo ABC e utilizza la funzione Registra sul foglio di calcolo per inserire nel foglio di calcolo le misure dei suoi lati a , b e c e le ampiezze dei suoi angoli α , β e γ . Muovi i vertici del triangolo e verifica attraverso i dati raccolti che il coseno di ogni angolo è dato dalla formula inversa del teorema del coseno.

► Verificare e dimostrare proprietà

26 Il teorema del coseno è anche noto come *teorema di Pitagora generalizzato*, perché, se il triangolo è rettangolo, applicando il teorema del coseno all'ipotenusa si ottiene proprio il *teorema di Pitagora*. Dimostra questa affermazione.

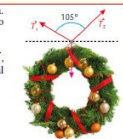
► Risolvere problemi applicando il teorema del coseno

27 **ESERCIZIO SVOLTO** **PROVA** Una ghirlanda natalizia è appesa come in figura. Calcola il suo peso sapendo che le tensioni dei fili che la sostengono hanno intensità $T_1 = 8,0$ N e $T_2 = 9,8$ N.

SOLUZIONE

Il peso della ghirlanda è il vettore opposto a $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{T}_3$, mostrato in figura. Applicando il teorema del coseno al triangolo ottenuto:

$$R = \sqrt{T_1^2 + T_2^2 - 2T_1T_2 \cos 75^\circ} \approx 11 \text{ N}$$



28 Nel triangolo ABC si ha $\sin ABC = \frac{4}{5}$, $AB = 3$ e $BC = 5$. Determina la misura di AC in ciascuno dei seguenti due casi:

a. ABC è acuto;

b. ABC è ottuso.

[a. 4; b. $3\sqrt{13}$]

ESERCIZI PAG. 1262 T233

Lezione attiva "a specchio"

Lezione 1

Introduzione ai sistemi lineari

TEORIA

Equazioni lineari in due incognite

Un'equazione di questo tipo è un enunciato aperto contenente due variabili.

Che tipo di soluzioni ha un'equazione lineare che contiene due incognite, anziché una sola, come, ad esempio, l'equazione $2x + y - 4 = 0$?

Se diamo a x un valore, per esempio $x = 0$, l'equazione non si trasforma in un'uguaglianza, ma rimane un'equazione nell'incognita y : $2 \cdot 0 + y - 4 = 0$.

Se risolviamo questa equazione, troviamo:

$$y = 4.$$

Quindi una soluzione dell'equazione iniziale è costituita dalla coppia $x = 0$ e $y = 4$.

Anche assegnando un valore a y , ad esempio $y = 2$, l'equazione di partenza diventa un'equazione in una sola incognita:

$$2x + 2 - 4 = 0.$$

Risolvendola troviamo:

$$x = 1.$$

Un'altra soluzione dell'equazione di partenza è la coppia $x = 1$ e $y = 2$. **ES - ES**

IL SIGNIFICATO DELLE PAROLE
Il significato della dicitura "coppia ordinata" sta nel fatto che è importante l'ordine in cui i due elementi sono inseriti nella coppia: la coppia $(0, 4)$ è diversa dalla coppia $(4, 0)$.

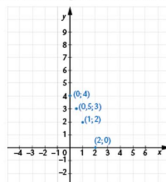
Questo ci suggerisce che una soluzione dell'equazione in due incognite non sia un semplice numero, ma una coppia ordinata di numeri, di cui il primo è un valore di x e il secondo un valore di y .

Sappiamo anche che una coppia ordinata di numeri può essere rappresentata con un punto nel piano cartesiano.

Dunque le soluzioni di un'equazione in due incognite possono essere visualizzate come punti sul piano: in Fig. 1 ne sono riportate alcune.

Per ogni valore assegnato a x troviamo un valore di y e viceversa, ma è evidente che possiamo dare a x tutti i valori reali, che sono infiniti.

FIGURA 1



L'equazione ammette quindi infinite soluzioni: il loro insieme S è un sottoinsieme del piano cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Il fatto che le soluzioni siano infinite non significa che tutte le coppie siano soluzioni: nel nostro caso, ad esempio, la coppia $(0, 0)$ non è soluzione, infatti $2 \cdot 0 + 0 - 4 \neq 0$. **ES - ES**

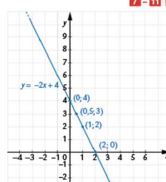


FIGURA 2

D'altro canto, applicando il primo principio di equivalenza, possiamo risolvere l'equazione di partenza rispetto a y e osservare che essa assume la forma di una funzione lineare:

$$y = -2x + 4.$$

Questa funzione ha come grafico una retta.

Le infinite coppie ordinate contenute nell'insieme S corrispondono agli infiniti punti della retta nel piano cartesiano (Fig. 2): disegnando tale retta esse possono essere visualizzate tutte insieme.

Per equazioni di questo tipo, generalmente consideriamo come dominio l'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Questo non esclude però che, in casi particolari, il dominio possa essere un altro insieme, come ad esempio $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ o altri ancora.

Abbiamo qui usato tre oggetti matematici diversi ma legati fra loro: equazione lineare, funzione lineare e retta. La funzione lineare è la relazione che sussiste tra le due variabili x e y . L'equazione lineare è un modo per rappresentare la funzione: essa ci dice quali valori assume y al variare di x . La retta è la modalità grafica con cui rappresentiamo una funzione lineare.

RIFLETTI SULLA TEORIA

UNITÀ 19 | I sistemi lineari

Verifica delle soluzioni di equazioni lineari in due variabili

Per ognuna delle seguenti equazioni stabilisci se la coppia indicata a fianco è o non è soluzione.

1. $x - 2y - 1 = 0$	(1; 1)	2. $x - 2y + 5 = 0$	(-3; 1)
3. $x - 2y + 1 = 0$	(7; 11)	4. $7x - 6y - 1 = 0$	(1; 1)
5. $x - y + 4 = 0$	(-6; -2)	6. $x - 4y + 8 = 0$	(-1; 2)

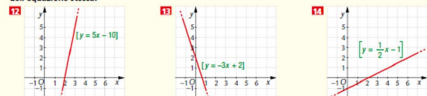
Interpretare graficamente equazioni lineari in due variabili e loro soluzioni

Per ognuna delle seguenti equazioni individua almeno cinque soluzioni. In seguito rappresenta graficamente l'equazione.

7. $x - 2y + 8 = 0$	8. $2x - 4y = 0$	9. $3x + y - 12 = 0$	10. $5x - 2y + 6 = 0$
---------------------	------------------	----------------------	-----------------------

11. Come sarebbe il grafico delle equazioni precedenti, se il loro dominio fosse $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$? E se fosse $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$? Rappresenta i grafici delle equazioni precedenti nei due casi.

Scrivi l'equazione corrispondente a ciascuna delle seguenti rette. In seguito individua almeno tre soluzioni dell'equazione stessa.



15. ESERCIZIO SVOLTO Rappresenta le soluzioni dell'equazione $2x - y + 1 = 0$ nel dominio $A = [-1; 1] \times [-1; 1]$.

SOLUZIONE

L'insieme A , nel piano cartesiano, corrisponde al quadrato evidenziato in rosso in figura, bordo compreso: si tratta infatti dei punti che hanno ascissa x tale che $-1 \leq x \leq 1$ e ordinata y tale che $-1 \leq y \leq 1$. L'equazione data corrisponde invece alla retta disegnata in figura. Le soluzioni dell'equazione nel dominio A si rappresentano con i punti del piano corrispondenti all'intersezione tra la retta e il quadrato, cioè al segmento evidenziato in blu. I pallini pieni stanno a significare che gli estremi del segmento vanno inclusi nelle soluzioni.

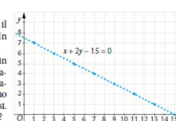
16. Risolvi l'equazione dell'Esercizio 15 nei domini: $B = [-1; 0] \times [-1; 0]$; $C = [0; 2] \times [0; 2]$.

Risolvere problemi

17. ESERCIZIO SVOLTO NELLA REALTÀ Un cambiamonete automatico può erogare soltanto monete da 1 euro e da 2 euro. Inserendo una banconota da 10 euro e una banconota da 5 euro, in quanti modi possibili può avvenire il cambio?

SOLUZIONE

Indichiamo con x il numero di monete da 1 euro e con y il numero di monete da 2 euro erogate dal cambiamonete. In questo caso si deve avere: $x + 2y = 15$. La retta corrispondente all'equazione è quella rappresentata in figura. Siccome il numero di monete erogate è un numero naturale, il dominio dell'equazione è $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e quindi individuiamo sulla retta i punti che hanno coordinate naturali, che sono in tutto 8. Il resto può quindi essere erogato in 8 modi diversi. Quali? Che cosa rappresentano in questo caso le coppie $(x; y)$?



ESERCIZIO PAG. 86

Approccio sequenziale

Prima introduco la teoria...

1 Equazioni lineari in due incognite

Che tipo di soluzioni ha un'equazione lineare che contiene due incognite, anziché una sola, come, ad esempio, l'equazione $2x + y - 4 = 0$?

Se diamo a x un valore, per esempio $x = 0$, l'equazione non si trasforma in un'uguaglianza, ma rimane un'equazione nell'incognita y : $2 \cdot 0 + y - 4 = 0$.

Se risolviamo questa equazione, troviamo: $y = 4$.

Quindi una soluzione dell'equazione iniziale è costituita dalla coppia $x = 0$ e $y = 4$.

Anche assegnando un valore a y , ad esempio $y = 2$, l'equazione di partenza diventa un'equazione in una sola incognita: $2x + 2 - 4 = 0$.

Risolvendola troviamo: $x = 1$.

Un'altra soluzione dell'equazione di partenza è la coppia $x = 1$ e $y = 2$.

1 - 6 ▶



Approccio sequenziale

...poi svolgo o invito gli studenti a svolgere esercizi

► Riconoscere soluzioni di equazioni lineari in due variabili

Per ognuna delle seguenti equazioni stabilisci se la coppia indicata a fianco è o non è soluzione.

1 $x - 2y - 1 = 0$	$(1; 1)$	[No]	4 $x - 2y + 5 = 0$	$(-3; 1)$	[Si]
2 $3x - 2y + 1 = 0$	$(7; 11)$	[Si]	5 $7x - 6y - 1 = 0$	$(1; 1)$	[Si]
3 $x - y + 4 = 0$	$(-6; -2)$	[Si]	6 $x - 4y + 8 = 0$	$(-1; 2)$	[No]



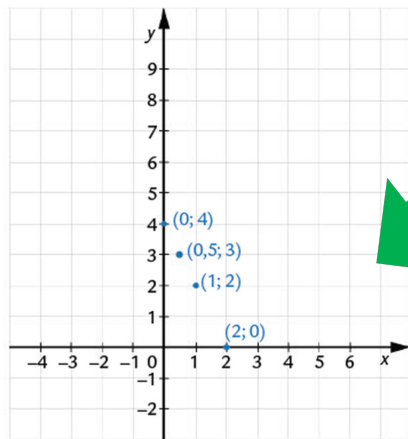
Approccio sequenziale

Prima introduco
la teoria...

Questo ci suggerisce che una soluzione dell'equazione in due incognite non sia un semplice numero, ma una **coppia ordinata** di numeri, di cui il primo è un valore di x e il secondo un valore di y .

Sappiamo anche che una coppia ordinata di numeri può essere rappresentata con un **punto** nel piano cartesiano. Dunque le soluzioni di un'equazione in due incognite possono essere visualizzate come punti sul piano: in Fig. 1 ne sono riportate alcune.

Per ogni valore assegnato a x troviamo un valore di y e viceversa, ma è evidente che possiamo dare a x tutti i valori reali, che sono infiniti.



» FIGURA 1

L'equazione ammette quindi **infinite soluzioni**: il loro insieme S è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Il fatto che le soluzioni siano infinite non significa che tutte le coppie siano soluzioni: nel nostro caso, ad esempio, la coppia $(0; 0)$ **non** è soluzione, infatti $2 \cdot 0 + 0 - 4 \neq 0$.

7 - 11 ▶

Passaggio dal
registro numerico -
algebrico al
registro grafico



Approccio sequenziale

...poi svolgo o invito gli studenti a svolgere esercizi

► Interpretare graficamente equazioni lineari in due variabili e loro soluzioni

Per ognuna delle seguenti equazioni individua almeno cinque soluzioni. In seguito rappresenta graficamente l'equazione.

7 $x - 2y + 8 = 0$

8 $2x - 4y = 0$

9 $3x + y - 12 = 0$

10 $5x - 2y + 6 = 0$

11 Come sarebbe il grafico delle equazioni precedenti, se il loro dominio fosse $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$? E se fosse $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$? Rappresenta i grafici delle equazioni precedenti nei due casi.



Approccio sequenziale

Prima introduco la teoria...

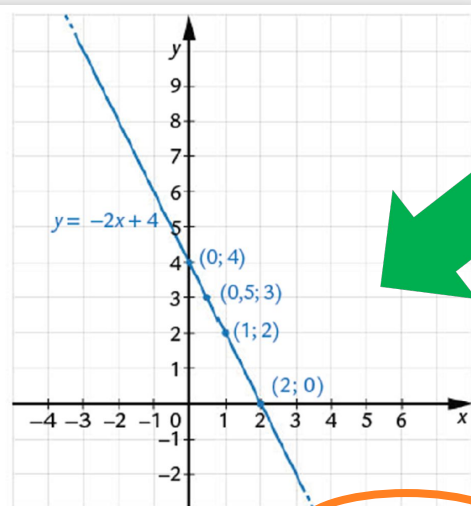
Abbiamo qui usato tre oggetti matematici diversi ma legati fra loro: equazione lineare, funzione lineare e retta. La **funzione lineare** è la relazione che sussiste tra le due variabili x e y . L'**equazione lineare** è un modo per rappresentare la funzione: essa ci dice quali valori assume y al variare di x . La **retta** è la modalità grafica con cui rappresentiamo una funzione lineare.

D'altro canto, applicando il primo principio di equivalenza, possiamo risolvere l'equazione di partenza rispetto a y e osservare che essa assume la forma di una funzione lineare: $y = -2x + 4$.

Questa funzione ha come grafico una **retta**.

Le infinite coppie ordinate contenute nell'insieme S corrispondono agli infiniti punti della retta nel piano cartesiano (Fig. 2): disegnando tale retta esse possono essere visualizzate tutte insieme.

» FIGURA 2



Registro
funzionale

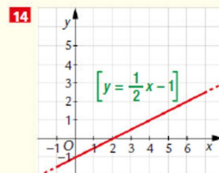
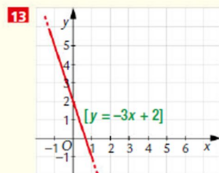
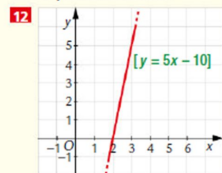
12 - 17



Approccio sequenziale

...poi svolgo o invito gli studenti a svolgere esercizi

Scrivi l'equazione corrispondente a ciascuna delle seguenti rette. In seguito individua almeno tre soluzioni dell'equazione stessa.

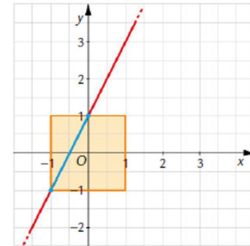


15 **ESERCIZIO SVOLTO** Rappresenta le soluzioni dell'equazione $2x - y + 1 = 0$ nel dominio $A = [-1; 1] \times [-1; 1]$.

SOLUZIONE

L'insieme A , nel piano cartesiano, corrisponde al quadrato evidenziato in rosso in figura, bordo compreso: si tratta infatti dei punti che hanno ascissa x tale che $-1 \leq x \leq 1$ e ordinata y tale che $-1 \leq y \leq 1$.

L'equazione data corrisponde invece alla retta disegnata in figura. Le soluzioni dell'equazione nel dominio A si rappresentano con i punti del piano corrispondenti all'intersezione tra la retta e il quadrato, cioè al segmento evidenziato in blu. I pallini pieni stanno a significare che gli estremi del segmento vanno inclusi nelle soluzioni.



16 Risolvi l'equazione dell'Esercizio 15 nei domini: $B = [-1; 0; 1] \times \{-1; 0; 1\}$ e $C =]0; 2] \times]0; 2]$.

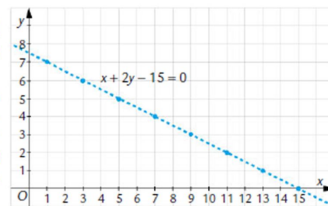
Risolvere problemi

17 **ESERCIZIO SVOLTO NELLA REALTÀ** Un changemonete automatico può erogare soltanto monete da 1 euro e da 2 euro. Inserendo una banconota da 10 euro e una banconota da 5 euro, in quanti modi possibili può avvenire il cambio?

SOLUZIONE

Indichiamo con x il numero di monete da 1 euro e con y il numero di monete da 2 euro erogate dal changemonete. In questo caso si deve avere: $x + 2y = 15$.

La retta corrispondente all'equazione è quella rappresentata in figura. Siccome il numero di monete erogate è un numero naturale, il dominio dell'equazione è $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e quindi individuiamo sulla retta i punti che hanno coordinate naturali, che sono in tutto 8. Il resto può quindi essere erogato in 8 modi diversi. Quali? Che cosa rappresentano in questo caso le coppie $(x; y)$?



Approccio «problematico»

Parto da un problema che sottopongo agli studenti...

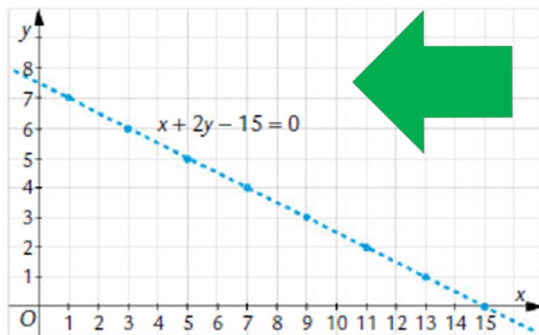
► Risolvere problemi

17 ESERCIZIO SVOLTO NELLA REALTÀ Un cambiamonete automatico può erogare soltanto monete da 1 euro e da 2 euro. Inserendo una banconota da 10 euro e una banconota da 5 euro, in quanti modi possibili può avvenire il cambio?

SOLUZIONE

Indichiamo con x il numero di monete da 1 euro e con y il numero di monete da 2 euro erogate dal cambiamonete. In questo caso si deve avere: $x + 2y = 15$.

La retta corrispondente all'equazione è quella rappresentata in figura. Siccome il numero di monete erogate è un numero naturale, il dominio dell'equazione è $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e quindi individuiamo sulla retta i punti che hanno coordinate naturali, che sono in tutto 8. Il resto può quindi essere erogato in 8 modi diversi. Quali? Che cosa rappresentano in questo caso le coppie $(x; y)$?



Apprendimento
collaborativo



Approccio «problematico»

...poi sistematizzo con la trattazione teorica

- Per risolvere il problema mi serve un **modello** algebrico, che è **un'equazione lineare in due variabili**.
- Ha **infinite soluzioni**, ma non nel contesto del nostro problema.
- È opportuno rappresentare la situazione con un **grafico**.
- ...



Approccio «molto problematico»

Parto dalla fine, proponendo agli studenti un problema di «adeguata difficoltà» (R. Zan)



Non si esplora
qualcosa che
già si conosce



Approccio «molto problematico»

Cocktail matematico

A una festa viene chiamato un barista per preparare alcune bevande analcoliche. Nella tabella sono mostrati i nomi dei cocktail e le relative frazioni di ciascun ingrediente che contengono.

Senza considerare nei conteggi i tuorli, che vengono aggiunti direttamente nel bicchiere, il barista suppone di preparare tre quantità diverse di ognuno dei tre cocktail, utilizzando esattamente 4,9 L di succo d'arancia, 2,5 L di succo di limone e 1,6 L di sciroppo di granatina.

1 Quanti litri di ciascun cocktail ne risulterebbero?

2 Che quantità dovrebbe utilizzare di ciascuno degli altri ingredienti?

Per servire le bevande preparate il barista ha a disposizione bicchieri da 20 cL e da 25 cL.

3 In quanti modi possibili può utilizzare bicchieri di due tipi per servire il cocktail *Agrumi e granatina*? Utilizza una rappresentazione cartesiana opportuna per visualizzare le diverse possibilità ed elencarle in una tabella.

Cocktail	Ingredienti
Agrumi e granatina 	$\frac{1}{3}$ gazzosa $\frac{1}{4}$ succo di limone $\frac{1}{6}$ sciroppo di granatina $\frac{1}{4}$ succo d'arancia
Tutti frutti 	$\frac{3}{10}$ frullato di banana $\frac{1}{5}$ succo d'arancia $\frac{3}{10}$ frullato di ananas $\frac{1}{5}$ succo di limone
Buffalo Bill 	$\frac{4}{5}$ succo d'arancia $\frac{1}{5}$ sciroppo di granatina 1 tuorlo d'uovo

4 Ripeti il calcolo precedente per ciascuna delle altre due bevande.

Al barista infine viene in mente che potrebbe aggiungere alla varietà delle bevande preparate anche una certa quantità del cocktail *Shirley Temple*, che contiene $\frac{1}{7}$ di granatina, $\frac{3}{7}$ di ginger ale e $\frac{3}{7}$ di soda.

5 Immaginando che utilizzi le stesse quantità di succo d'arancia, succo di limone e sciroppo di granatina del caso precedente, spiega perché non è possibile calcolare le quantità di ciascuna bevanda che ne risulterebbero. Che cosa occorrerebbe conoscere per poterle calcolare?



Approccio «molto problematico»

1 Indicate con: x la quantità di bevanda *Agrumi e granatina*, y la quantità di bevanda *Tutti i frutti* e z la quantità di bevanda *Buffalo Bill*. Per determinare quanti litri di ciascun cocktail vengono preparati è necessario risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 4,9 = \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}y + \frac{4}{5}z \\ 2,5 = \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}z \\ 1,6 = \frac{1}{6}x + \frac{1}{5}z \end{cases}$$

Da cui si ottiene: $x = 6$; $y = 5$; $z = 3$. Vengono perciò preparati 6 L di bevanda *Agrumi e granatina*, 5 L di bevanda *Tutti i frutti*, 3 L di bevanda *Buffalo Bill*.

2 Poiché la gazzosa corrisponde a $\frac{1}{3}$ della bevanda *Agrumi e granatina*, se ne devono utilizzare 2 L. Il frullato di banana e il frullato di ananas rappresentano, ognuno, $\frac{3}{10}$ della bevanda *Tutti i frutti*: è necessario utilizzare 1,5 L di ognuno dei due.

3 Si consideri il cocktail *Agrumi e granatina*. Indicati con p il numero di bicchieri da 20 cl e con g il numero di bicchieri da 25 cl, deve valere la relazione $600 = 20p + 25g$ con p e g numeri interi. Conoscendo p è possibile determinare la corrispondente quantità g attraverso la formula $g = \frac{600 - 20p}{25}$. Poiché p e g devono essere numeri interi, p può assumere un numero finito di valori, in particolare p può essere solo un multiplo di 5 minore o uguale a 30 (altrimenti il numeratore della frazione che consente di calcolare g non è multiplo di 25 oppure diventa un numero negativo). Le possibilità per servire la bibita sono riassunte nella seguente tabella (dalla quale sarà facilmente ricavabile il grafico).

Bicchieri piccoli	0	5	10	15	20	25	30
Bicchieri grandi	24	20	16	12	8	4	0



Apprendimento attivo e laboratorio

Il laboratorio per:

- la costruzione di significati;
- un uso ragionato e flessibile di strumenti;
- l'interazione fra pari e con l'insegnante.



La mediazione degli strumenti e delle rappresentazioni

Ogni concetto matematico è costretto a servirsi di rappresentazioni, dato che non vi sono “oggetti” da esibire in loro vece o a lor evocazione; dunque la concettualizzazione deve necessariamente passare attraverso registri rappresentativi. [...]

La conoscenza dipende anche e proprio da quegli strumenti di mediazione che mettiamo in campo per la sua costruzione, e dall'insieme e dal tipo di significazioni che tali strumenti ricevono dall'intorno sociale.

D'Amore, 2001



Sfruttare una visione dinamica per comprendere

A proposito di immagini dinamiche prodotte con un software:

‘....le proprietà invarianti di un’immagine dinamica hanno un corrispettivo nei comandi utilizzati per la loro realizzazione, di modo che è possibile stabilire una relazione tra proprietà caratteristiche di un’immagine e comandi utilizzati per la loro costruzione.’

Mariotti, Visualizzare in geometria come problema didattico, 2015



Le proposte laboratoriali di Matematica allo specchio

- Le attività di inizio Unità
- Le attività fra gli esercizi
- Esplorare con GeoGebra
- Con GeoGebra



Le attività di inizio Unità

Dai numeri all'algebra

Attività 1 Algebra per dimostrare

Per la lezione:

- 3 Scomposizione di polinomi: raccoglimento

Alcune sequenze numeriche presentano regolarità inaspettate.

Considera un numero naturale formato da due cifre, ad esempio 27, e costruisci il numero che si ottiene scambiando fra di loro le cifre delle decine e delle unità: ____.

Addiziona ora i due numeri e scomponi in fattori primi il risultato: $27 + \text{____} = \text{_____}$.

Ripeti il calcolo

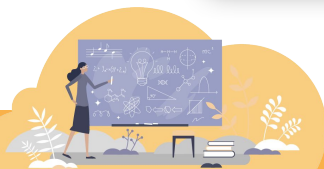


Attività con
GeoGebra
Algebra per
dimostrare

Esplora con

- Definisci un numero. re di generare di genere sia la seconda cifra. In B2 inserisci l'istruzione `random(1,9)`, per generare un numero intero a caso fra 1 e 9; scrivi la stessa istruzione in B2.
- Copia il contenuto delle celle A2 e B2 nelle righe sottostanti, sino a ottenere 50 coppie di numeri casuali.

	A	B	C	D	E	F
1	1ª cifra	2ª cifra	1º numero	2º numero	somma	scomposizione della somma
2	7	8	78	87	165	{3, 5, 11}
3	1	8	18	81	99	{3, 3, 11}
4	9	6	96	69	165	{3, 5, 11}
5	1	1	11	11	22	{2, 11}



Le attività di inizio Unità

Dai numeri all'algebra

Algebra per dimostrare

Generalizza

Si potrebbe obiettare che l'esame di un numero limitato di casi non basta per dichiarare una regola generale; in effetti potremmo osservare che, tra gli esempi che hai considerato, non ci siano proprio i numeri che negano la validità generale della regola. Quindi, al di là degli esempi, occorre fare un ragionamento generale.

Indica con a e b le cifre dei due numeri. Scrivi in forma polinomiale il primo numero: e il secondo: Somma i due polinomi che hai ottenuto e applica la proprietà distributiva al risultato, raccogliendo il fattore comune:

$$(\text{.....}) + (\text{.....}) = \text{.....} \cdot 10 + \text{.....} + \text{.....} \cdot 10 + \text{.....} = \text{.....} \cdot a + \text{.....} \cdot b = \text{.....} \cdot (a + b)$$

La somma dei due numeri è stata scomposta in due fattori, uno dei quali è un numero, e l'altro dipende dalla scelta delle cifre a e b : da questo risultato si può dedurre che la somma è sempre divisibile per

Esplorare, congetturare, dimostrare



Le attività di inizio Unità

Disequazioni di secondo grado

ESPLORA

Attività

1

Positivo o negativo?

Per la lezione:

1 Disequazioni di secondo grado

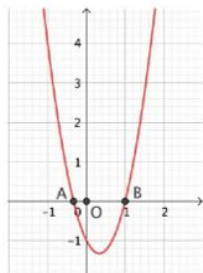


FIGURA 1

Calcola i valori della funzione

Considera la funzione di secondo grado $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$.

Quali valori assume se si danno alla variabile indipendente x i valori $\frac{1}{2}$, -1 , 10 ?

Rispondi alla domanda calcolando a mente oppure (dove possibile) osservando il grafico in Fig. 1 ottenuto con GeoGebra: _____.

Le coppie $(x; y)$ così determinate sono le coordinate di tre punti che appartengono al grafico di $f(x)$ e costituiscono informazioni precise su $f(x)$.

Non sempre è necessaria un'informazione così puntuale: talvolta è sufficiente sapere per quali valori di x la funzione è positiva, negativa o nulla.

Studia il segno della funzione con una tabella

Ad esempio, sai dire se per $x = 215$ oppure per $x = -500$ la funzione $f(x)$ assume un valore positivo? Oppure se il valore di $f(x)$ per $x = -0,2$ è negativo?

La risposta non è immediata perché non è semplice il calcolo mentale del valore della funzione in corrispondenza di questi valori di x .

Riscrivi allora l'espressione analitica della funzione come prodotto di due fattori di primo grado e valuta il segno di ciascun fattore:

$$f(x) = (\quad) (\quad)$$

x	Segno del primo fattore	Segno del secondo fattore	Segno di $f(x)$
215			
-500			
-0,2			

Completa la tabella, ricordando che non è necessario ricavare il valore di ciascun fattore, ma è sufficiente conoscere il segno che ogni fattore assume in corrispondenza del valore di x assegnato.



Le attività di inizio Unità

Disequazioni di secondo grado

Positivo o negativo?

Studia il segno della funzione mediante il grafico

Ribaltiamo il problema: anziché partire dal valore della variabile indipendente x per ricavare il segno di y , partiamo dall'analisi del segno di y per trovare informazioni sui valori di x .

Disegna con GeoGebra il grafico di $f(x)$: se un punto ha *ordinata* negativa, quale può essere il valore di x corrispondente? Formula una congettura sui valori di x che corrispondono a punti di ordinata negativa:

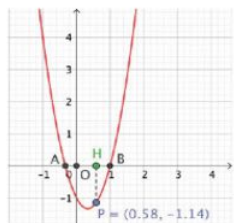


FIGURA 2

Prendi un punto P sul grafico della funzione (Fig. 2) e visualizzane le coordinate; muovi P sulla parabola e osserva i punti del grafico che hanno ordinata negativa: quanti sono?

Come sono disposti?

Proietta P sull'asse x nel punto $H = (x(P), 0)$, come in Fig. 2.

Puoi fare in modo che H cambi colore a seconda del segno di y_P :

- rosso se $y_P > 0$;
- verde se $y_P < 0$.

Apri le Proprietà di $H \rightarrow$ Avanzate/Colori dinamici:

- nella casella Rosso scrivi $y(P) > 0$;
- nella casella Verde scrivi $y(P) < 0$;
- nella casella Blu scrivi il numero 0;
- chiudi la finestra di dialogo.

Muovi P sulla parabola e attiva la traccia di H e descrivi come si dispone H al variare di P sul grafico di $f(x)$.

Sulla base di queste osservazioni, per quali valori di x si ha $f(x) < 0$?

Per quali valori di x invece si ha $f(x) > 0$?

Senza eseguire calcoli né esplorare il grafico indica quale segno assume $f(x)$ per $x = 0,7$; $x = -1000$; $x = 20$:



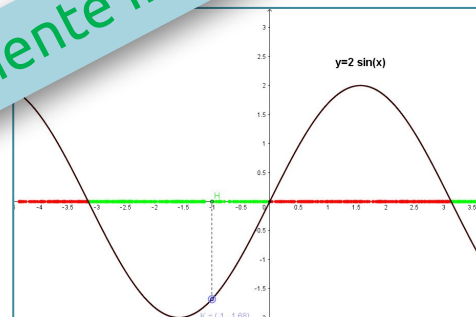
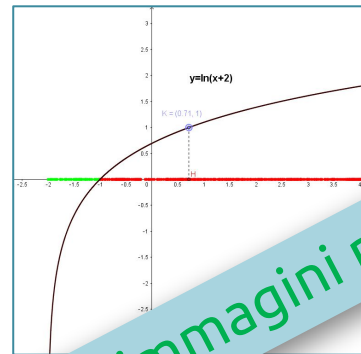
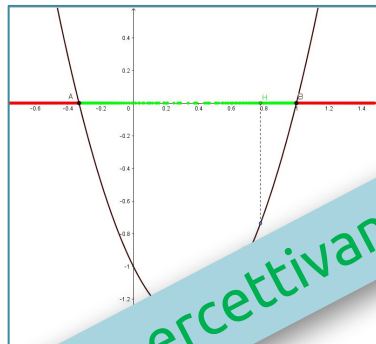
Attività con
GeoGebra
Positivo o
negativo?



Le attività di inizio Unità

Disequazioni in generale

Positivo o negativo?



Costruire percettivamente immagini mentali



Le attività di inizio Unità

Un po' di statistica: la retta di regressione

Aumento delle iscrizioni universitarie



2013-2014	252 457
2014-2015	270 774
2015-2016	276 213
2016-2017	290 329
2017-2018	293 934
2018-2019	300 267
2019-2020	307 553

FIGURA 1

Disegna la nuvola di punti

1. Apri GeoGebra e visualizza il Foglio di calcolo. Intesta la colonna A con l'etichetta *Anni* e la colonna B con l'etichetta *Immatricolazioni*. Nella colonna A, a partire dalla cella A3, inserisci i numeri da 13 a 19, per indicare gli anni che vanno dal 2013 al 2019. Nella colonna B, a partire dalla cella B3, inserisci i dati, in migliaia, relativi al numero di iscritti, approssimati al centinaio: 252.5, 270.8, ecc.

2. Disegna sul piano cartesiano il grafico a punti della relazione *Anni* - *Iscrizioni*. Per farlo, è sufficiente inserire nella colonna C le coordinate corrispondenti.

Nella cella C3 inserisci la formula $= (A3; B3)$ e copiala fino alla cella C9: nella vista Grafici vengono visualizzati i punti aventi le coordinate che hai trovato.

Dimensiona opportunamente la vista Grafici per poter visualizzare i cinque punti: conviene impostare il rapporto di scala AsseX:AsseY su 1:100. Nascondi le etichette dei punti.

I punti disegnati costituiscono la cosiddetta **nuvola di punti** della distribuzione che stiamo esaminando. Ti sembra che ci sia un rapporto di crescita costante di anno in anno? Sì, osservando i punti si può supporre che il rapporto di crescita annuale

sia approssimativamente costante.



Le attività di inizio Unità

Un po' di statistica: la retta di regressione

Definisci, attraverso la barra di inserimento, una generica retta del fascio di centro P con la formula $f(x)=m(x-x(P))+y(P)$.

Muovi lo slider e individua, a occhio, un valore approssimato di m per cui la retta passa o si avvicina il più possibile ai punti: per esempio, $m=8,7$.

Ora valutiamo in modo più rigoroso la pendenza della retta di regressione applicando una procedura detta **metodo dei minimi quadrati**.

5. Intesta la colonna D del Foglio di calcolo con l'etichetta **Scarti**.
A partire dalla cella D3 calcola gli scarti fra i valori della retta approssimante e gli effettivi valori della distribuzione. Inserisci il comando:
`=segmento[(A3,f(A3)), (A3,B3)]`. Copia e incolla la formula fino alla cella D9.

La costruzione realizzata finora è mostrata in Fig. 2.

6. Intesta la colonna E del Foglio di calcolo con l'etichetta **Scarti^2**. Inserisci la formula `=D3^2` nella cella E3, a partire dalla cella E3 calcola i quadrati degli scarti, mediante la formula: `=D3^2`. Copia e incolla la formula fino alla cella E9. Nella cella E10 calcola la somma dei quadrati degli scarti e crea una variabile $s = E10$ dalla Barra di inserimento.

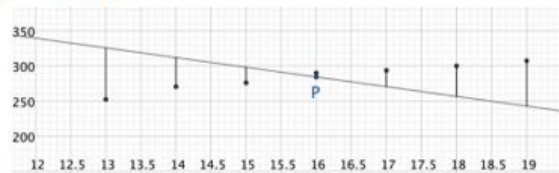


FIGURA 2



Le attività fra gli esercizi

169 ATTIVITÀ Con carta, forbici e goniometro

Ritaglia un triangolo da un foglio di carta.

Piegalo in modo che due vertici si tocchino, restando sullo stesso lato a cui essi appartengono: ottieni in questo modo un pentagono, scomposto in due triangoli e un quadrilatero.

Verifica con il goniometro che questo quadrilatero ha due angoli opposti congruenti: di quale coppia si tratta?

Sapresti spiegare, con una dimostrazione rigorosa, il motivo di ciò che hai osservato?



Esplorare, congetturare, dimostrare

15 ATTIVITÀ Ricava e dimostra le relazioni fra funzioni goniometriche di angoli che differiscono

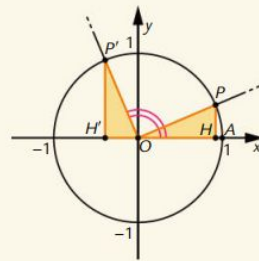
GeoGebra disegna la circonferenza goniometrica di centro O ; sia P un punto della circonferenza di coordinate $(1; 0)$. Crea uno slider α che rappresenti un angolo con ampiezza variabile da 0 a 90° .

Con lo strumento *Angolo di data misura* costruisci l'angolo $\widehat{AOP}$ che ha ampiezza α , dove P è un punto della circonferenza. Chiamiamo H la proiezione di P sull'asse x . Riconosci sul grafico i segmenti che corrispondono a $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$. Costruisci l'angolo $\widehat{AOP'}$ che ha ampiezza $\alpha + \frac{\pi}{2}$ (P' punto della circonferenza); proietta P' sull'asse x ottenendo il punto H' . Che segno hanno le coordinate di P' ?

Riconosci sul grafico i segmenti che si riferiscono a $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ e $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$.

Considera i triangoli OPH e $OP'H'$: che relazione esiste fra loro? Giustifica le tue affermazioni. Segna sulla figura, con gli stessi colori, i segmenti congruenti.

Tenendo conto di tutte le osservazioni precedenti, esprimi $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ e $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ in funzione di $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$.



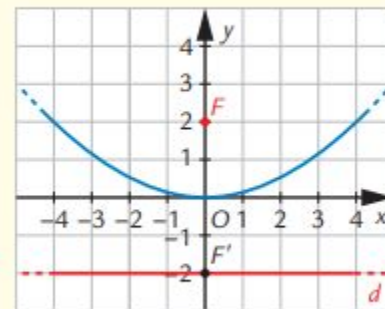
Le attività fra gli esercizi

ATTIVITÀ CON GEOGEBRA

Con il comando *Punto su oggetto*  segna un punto F su d . Costruisci il punto F' simmetrico di F rispetto all'asse x ; da F' traccia la parabola γ tangente a d all'asse x . Con il comando *Parabola*  costruisci la parabola γ' con fuoco in F e direttrice in d . Muovi il punto F e rispondi alle seguenti domande.

- Come è rivolta la concavità della parabola γ' quando F appartiene al semiasse negativo delle y ?
- Nella parabola γ la distanza tra il fuoco e la direttrice è di 2 unità; nella parabola γ' è di 1 unità: quale delle due parabole ha ampiezza maggiore?

[a. verso il basso; b. γ ha ampiezza maggiore di γ']



Le attività fra gli esercizi

207 ATTIVITÀ Con GeoGebra Costruisci un quadrato



$ABCD$ di lato 4 e crea uno slider k che possa variare da 0 a 4 con passo 0,1.

Sui lati AB e BC del quadrato considera i punti E e F a distanza k rispettivamente da A e da B e costruisci il triangolo DEF con lo strumento *Poligono*. GeoGebra visualizza l'area del triangolo nella finestra Algebra.



Porta k a 0, visualizza il foglio di calcolo e osserva i valori di k e dell'area del triangolo nelle colonne diverse. Attiva l'opzione *Visualizza foglio di calcolo* e i dati vengono creati automaticamente.

a. Visualizza i grafici e osserva i dati che hai sul foglio di calcolo.

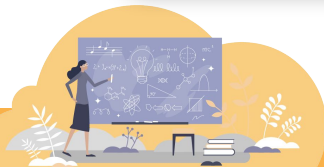
Su quale tipo di curva ti sembrano allineati i punti che hai trovato?

b. Costruisci algebricamente la funzione che rappresenta l'area del triangolo DEF al variare di k , rappresentala in Grafici 2 e verifica che passa per i punti trovati. Per quale valore di k l'area del triangolo DEF è minima?

Foglio di calcolo		
	A	B
1	k	t1
2	0	8
3	0.1	7.8
4	0.2	7.62
5	0.3	7.44
6	0.4	7.28
7	0.5	7.13
8	0.6	6.98
9	0.7	6.85
10	0.8	6.72
11	0.9	6.61
12	1	6.5
13	1.1	6.41
14	1.2	6.32
15	1.3	6.25

$$\left[a. a(k) = \frac{1}{2}k^2 - 2k + 8; b. k = 2 \right]$$

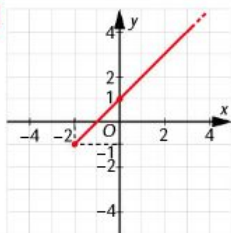
Usare registri rappresentativi diversi



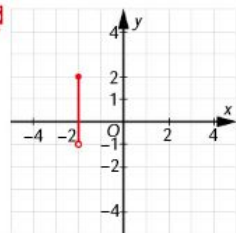
Con GeoGebra

INTERPRETA I GRAFICI Scrivi un sistema misto che rappresenti i segmenti e le semirette rappresentati nelle figure.

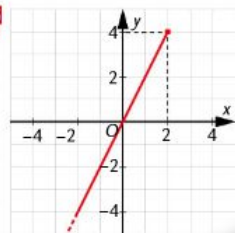
574



575



576



581 Con GeoGebra Verifica le tue rappresentazioni degli **Esercizi 574-579** usando opportunamente la finestra **Algebra** di GeoGebra e i connettivi logici.

Esegui le seguenti costruzioni con GeoGebra

158 Disegna una circonferenza di centro O e un punto P fuori di essa. Con il comando *Tangenti* disegna la retta tangente alla circonferenza nel punto P e verifica che questa retta è perpendicolare a PO , disegnando l'angolo tra le due rette.

159 Disegna una circonferenza di centro O e un punto P su di essa. Con il comando *Retta perpendicolare* disegna la retta passante per P e perpendicolare a OP e verifica che questa retta è tangente alla circonferenza, determinando l'angolo tra la retta e la circonferenza.

NELLA REALTÀ Con GeoGebra L'equazione: $y = 2 - \frac{1}{2}e^{-(x-0,2)^2}$, con $0 \leq x \leq 2$ approssima bene il profilo della sezione trasversale dell'ala di un aereo. Traccia la curva con GeoGebra, utilizzando il comando *Se(<Condizione>, <Allora>)*. Se l'unità di misura degli assi cartesiani è il metro, qual è l'area della sezione trasversale dell'ala dell'aereo? Controlla con GeoGebra il tuo calcolo.

$[\approx 0,0937 \text{ m}^2]$

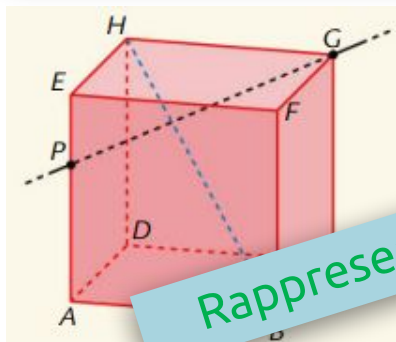
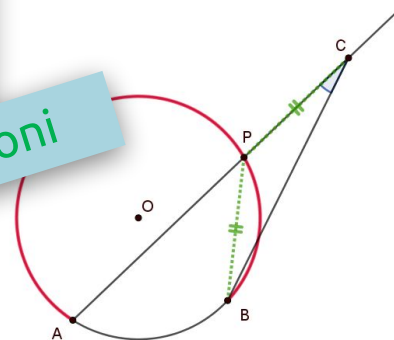
Costruire, confrontare, verificare



Con GeoGebra

195 ATTIVITÀ Con GeoGebra Disegna una circonferenza e prendi due punti A e B su di essa; con il comando *Arco* (<circonferenza>, <punto>, <punto>) definisci il maggiore dei due archi che hanno per estremi A e B ; con il comando *Punto* (<oggetto>) definito da Barra di inserimento prendi sull'arco AB un punto P . Costruisci la semiretta AP ; su di essa, e esternamente rispetto alla circonferenza, prendi un punto C tale che $PC \cong PB$ e congiungi C con B . Muovi il punto P sulla circonferenza e osserva l'ampiezza di $\widehat{ACB}$: cosa puoi dire in proposito? Giustifica geometricamente le tue osservazioni.

[$\widehat{ACB}$ rimane costante al variare di P sull'arco AB]



Rappresentare dinamicamente per individuare relazioni

Con GeoGebra Disegna un cubo $ABCDEFGH$, come in figura. Traccia la diagonale BH . Prendi un generico punto P sullo spigolo AE e costruisci la retta PG . In che relazione è la retta PG con la retta a cui appartiene la diagonale BH ? Muovi P sullo spigolo AE ; esiste una posizione di P per la quale i segmenti PG e BH sono complanari?



Con GeoGebra

ATTIVITÀ CON GEOGEBRA Costruisci nella vista Grafici 3D la sfera che passa per i punti $A(1; 2; 3)$ e $B(0; 0; 0)$ e ha

S T E M

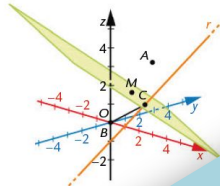
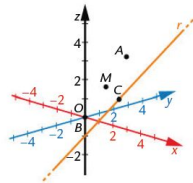
il centro sulla retta $r: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 0 \\ z = -t \end{cases}$. Parallelamente alla costruzione geometrica ricava, attraverso successivi passaggi,

l'equazione della superficie sferica.

Il centro C della sfera è equidistante dai punti A e B : appartiene quindi al piano assiale del segmento AB , cioè al piano perpendicolare ad AB nel suo punto medio.

Costruzione geometrica

1. Disegna i punti A e B e il loro punto medio M ; disegna la retta r .
2. Disegna il piano per M perpendicolare ad AB e segna il punto di intersezione del piano con la retta r . Traccia il segmento CB , raggio della sfera.
3. Disegna la sfera di centro C e raggio CB .



Calcolo algebrico

1. Le coordinate del punto medio M di AB sono $(\dots; \dots; \dots)$; trova le componenti del vettore $\overrightarrow{BA} = (\dots)$.
Il piano perpendicolare a $\overrightarrow{BA}$ ha equazione: $1(x - \dots) + 2(y - \dots) + 3(z - \dots) = 0 \Leftrightarrow \dots$
Il centro della sfera è il punto di intersezione fra il piano assiale di AB e la retta r :

$$\begin{cases} z = -t \\ x + 2y + 3z - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow C(\dots; \dots; \dots)$$

Il raggio della sfera è: $\overline{CB} = \sqrt{\dots} = \dots$.

3. Trova l'equazione della superficie sferica: $(x - \dots)^2 + y^2 + (z - \dots)^2 = \frac{17}{2} \Leftrightarrow \dots$

Confronta l'equazione che hai ottenuto con l'equazione della superficie sferica che GeoGebra indica nella vista Algebra.

Usare registri rappresentativi diversi



Rendere gli alunni consapevoli con esercizi per competenze diverse e crescenti

1. Esercizi di lezione
2. Accresci le tue competenze
3. Mettiti alla prova
4. Prova finale



Esercizi di lezione suddivisi in quattro categorie

1. Capire i concetti
2. Applicare i procedimenti
3. Risolvere problemi
4. Scrivere e discutere di matematica



Capire i concetti

- Esercizi per riflettere sulle proprietà fondamentali, anche attraverso rappresentazioni grafiche e test a scelta multipla
- Esercizi per l'autovalutazione nella prima fase dell'apprendimento
- Esercizi introduttivi, ma anche per il ripasso e il recupero

Lezione 2 Simmetria

TEORIA PAG. 322

► CAPIRE I CONCETTI

182 Vero o falso?

- In una simmetria centrale, il centro C coincide con il punto medio del segmento che unisce P e il trasformato di P .
- I punti di una retta passante per il centro di una simmetria centrale vengono trasformati in se stessi.
- Una retta che non passa per il centro C di una simmetria centrale viene trasformata in una retta che non passa per il centro C .
- La trasformazione di equazioni $\begin{cases} x' = -x + 8 \\ y' = -y \end{cases}$ è una simmetria centrale di centro $(4; 0)$.

(V) (F)

(V) (F)

(V) (F)

(V) (F)

184 Associa a ciascuna delle seguenti equazioni il grafico corrispondente.

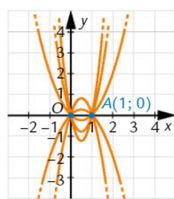
1. $y = x^2 + x + k$

2. $y = \frac{k-3}{k+1}x^2 - 1$

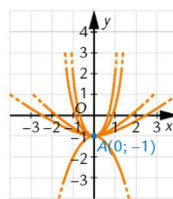
3. $y = kx^2 - kx$

4. $y = x^2 - kx + k$

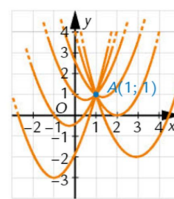
A.



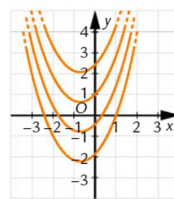
B.



C.



D.



Applicare i procedimenti

- Acquisire tecniche di calcolo e procedure
- Esplorare grafici, anche con Geogebra o la calcolatrice grafica
- Confrontare metodi diversi

► APPLICARE PROCEDIMENTI

Rette tangenti e normali

620 ESERCIZIO SVOLTO Determina le equazioni della retta tangente e della retta normale al grafico della funzione $y = \frac{\sqrt{x+5}}{x-1}$ nel suo punto di ascissa 4. Controlla poi la correttezza dei tuoi risultati con GeoGebra.

SOLUZIONE

La retta tangente nel punto di coordinate $(x_0; f(x_0))$ ha equazione: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, mentre la retta normale ha equazione: $y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

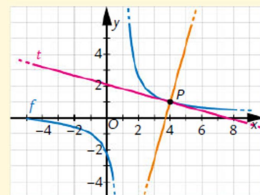
$$\text{Calcoliamo la derivata: } f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+5}}(x-1) - \sqrt{x+5}}{(x-1)^2} = -\frac{x+11}{2(x-1)^2\sqrt{x+5}}$$

Calcoliamo il valore della funzione e della derivata nel punto $x_0 = 4$:

$$f(x_0) = f(4) = 1, \quad f'(x_0) = f'(4) = -\frac{5}{18}.$$

$$\text{La retta tangente ha equazione: } y = 1 - \frac{5}{18}(x - 4) \Leftrightarrow y = -\frac{5}{18}x + \frac{19}{9}.$$

$$\text{La retta normale ha equazione: } y = 1 + \frac{18}{5}(x - 4) \Leftrightarrow y = \frac{18}{5}x - \frac{67}{5}.$$



621 Scrivi l'equazione della retta tangente e della retta normale al grafico della funzione $y = \ln x$, nel suo punto di intersezione con l'asse x. $[y = x - 1; y = 1 - x]$

622 Scrivi l'equazione della retta normale al grafico della funzione $y = x^2 + \ln x$ nel suo punto di ascissa unitaria. $[y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}]$



Risolvere i problemi

- Analizzare situazioni nuove
- Individuare strategie adeguate
- Integrare conoscenze matematiche e strumentali

363 ASTRONOMIA La terza legge di Keplero afferma che il quadrato del periodo T di rivoluzione di un pianeta attorno al Sole è direttamente proporzionale al cubo della sua distanza media d dal Sole stesso:

$$d^3 = kT^2$$

Pianeta	T (anni)	d (10^6 km)
Mercurio	0,24	57,9
Venere	0,62	108,2
Terra	1	149,6
Marte	1,88	227,9
Giove	11,86	778,3
Saturno	29,46	1427
Urano	84,01	2870
Nettuno	164,79	4496,6

- a. Che relazione c'è tra i logaritmi decimali del periodo e della distanza media?
 b. Utilizza i dati della tabella per costruire, con il foglio elettronico, il grafico di $\log d$ in funzione di $\log T$ e trovare il valore del coefficiente k .

$$\left[\text{a. } \log d = \frac{1}{3} \log k + \frac{2}{3} \log T; \text{ b. } k = 3,34 \cdot 10^{24} \text{ km}^3/\text{anni}^2 \right]$$



364 AMBIENTE La scala Richter misura la magnitudo di un terremoto, confrontando l'ampiezza delle onde sismiche di un dato terremoto con quelle di un «evento di magnitudo 0», scelto per avere una lettura sismografica di $1 \cdot 10^{-3}$ millimetri su un sismometro posto a una distanza di 100 chilometri dall'epicentro del terremoto. Secondo questo modello, la magnitudo di un terremoto si può esprimere mediante la legge $M(x) = \log \frac{x}{1 \cdot 10^{-3}}$, dove x è l'oscillazione del sismografo in millimetri per effetto del terremoto.

- a. Verifica che risulta effettivamente $M(1 \cdot 10^{-3}) = 0$.
 b. Sapendo che $\log 2 \approx 0,3$, determina, senza utilizzare la calcolatrice, la magnitudo di un terremoto che registra un'oscillazione di $8 \cdot 10^4$ mm.
 c. Mostra che un terremoto che ha registrato una magnitudo di 5,3 in scala Richter ha avuto una lettura sismografica dieci volte più grande di uno di magnitudo 4,3.

$$[\text{b. } M(8 \cdot 10^4) = 7,9]$$

- b. L'aumento ogni due anni, in percentuale, è costante? Se sì, dimostralo in generale, altrimenti fornisci un controesempio.

$$\left[\text{a. } C(t) = 1200 \cdot 1,05^t; \text{ b. } \frac{C(t+2) - C(t)}{C(t)} = 10,25\% \right]$$

in qualsiasi dispositivo di calcolo che ha una memoria finita, si passa da zero, disponibile sulla macchina, che sommata a uno il valore dell'epsilon-macchina della tua calcolatrice. Per farlo, controlla quale è il più grande valore di x per cui $f(x)$ diventa uguale a zero. L'epsilon-macchina del dispositivo. I risultati riportati nella tabella, l'epsilon-macchina vale 2^{-30} .

$f(x)$
= 1,5
= 1,000976563
= 1,000000954
= 1,000000001
= 1

La lastra di plastica, perde $\frac{1}{3}$ della sua intensità. Qual è la sua

intensità rispetto al valore iniziale? Quanto vale, in percentuale, l'errore?

$$\left[\text{a. } a \left(\frac{2}{3} \right)^t, \text{ dove } a \text{ è l'intensità iniziale; b. } 98,3\%; 1,7\% \right]$$

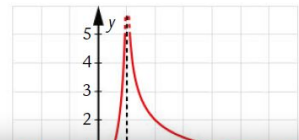
di un capitale iniziale C_0 al tasso di interesse composto i annuo $C(t) = C_0 \cdot (1 + i)^t$.

un tasso annuo $i = 5\%$, quanto vale il montante dopo 2 anni?



Scrivere e discutere di matematica

D 331 TROVA L'ERRORE Davide vuole risolvere graficamente l'equazione $\ln|x-1| = \frac{1}{2}x - 1$, quindi studia la funzione $f(x) = \frac{2\ln|x-1|}{x-2}$ disegnando il grafico in figura, e cercando le intersezioni con la retta $y = 1$. In tal modo trova due soluzioni e dice che le soluzioni del problema sono tre. Dove ha sbagliato?



106 Dimostra che due ellissi sono congruenti se e solo se hanno semiassi di pari lunghezza.



107 ATTIVITÀ CON LA CALCOLATRICE GRAFICA Disegna una circonferenza c di centro C e un punto F interno alla circonferenza. Traccia un punto M sulla circonferenza e disegna il segmento FM . Costruisci l'asse del segmento FM e la retta CM . Chiamo P il punto d'intersezione tra l'asse s e la retta CM . Trova il luogo dei punti P al variare di M .

STEM

- Verifica che P descrive un'ellisse di fuochi C e F .
- Se il centro della circonferenza è $C(-4; 0)$, F ha coordinate $(4; 0)$ e il raggio della circonferenza è 10, determina l'equazione dell'ellisse.

432 TROVA L'ERRORE Valerio afferma che il limite $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2} - x)$ è una forma indeterminata e lo risolve così:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2} - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2} - x)(\sqrt{x^2 + 2} + x)}{\sqrt{x^2 + 2} + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2 + 2} + x} = 0$$

Quale errore ha commesso Valerio?

523 INVENTA TU Fornisci l'esempio di una funzione periodica f tale che $|f|$ abbia lo stesso periodo di f , e l'esempio di una funzione periodica f tale che $|f|$ abbia periodo inferiore a quello di f . Motiva le tue scelte.



Accresci le tue competenze

1. Utilizzare tecniche di calcolo e rappresentare graficamente
2. Interpretare grafici e dati
3. Risolvere problemi e costruire modelli
4. Ragionare, giustificare, argomentare



Accresci le tue competenze

- Consolidare l'utilizzo di tecniche del calcolo
- Potenziare la capacità di rappresentazione e interpretazione dei grafici

► UTILIZZARE LE TECNICHE DEL CALCOLO E RAPPRESENTARE GRAFICAMENTE

Calcola i seguenti limiti.

924 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$

$\left[\frac{1}{4}\right]$

944 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{10 + x\sqrt{x}}$

$[+\infty]$

925 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \ln x^2}{1 + \ln x}$

$[-2]$

945 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3}{\sin x \ln^2 x}$

$[0]$

926 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{2x - \pi}$

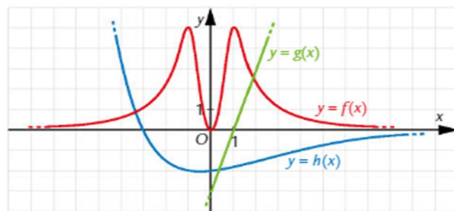
$[0]$

946 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{2x} - 1)\ln^2(1+x)}{x^3}$

$[2]$

► INTERPRETARE GRAFICI E DATI

1007 A partire dalle informazioni che si possono dedurre dai grafici, determina, se possibile, il valore dei seguenti limiti (alcuni limiti si presentano sotto forma indeterminata, quindi non è possibile calcolarli senza ulteriori informazioni).



Accresci le tue competenze

- Science
 - Technology
 - Engineering
 - Mathematics
-
- Fisica, Educazione finanziaria
 - Problemi dalla realtà
 - Educazione civica

► RISOLVERE PROBLEMI E COSTRUIRE MODELLI

1030 SALUTE Uno dei più semplici modelli (il cosiddetto modello SIS) per descrivere la propagazione di una malattia né mortale né immunizzante (come il raffreddore) in una popolazione di N individui è costituito dalla funzione:

$$I(t) = \frac{(rN - \gamma)I_0}{rI_0 + [(rN - \gamma) - rI_0]e^{(\gamma - rN)t}}$$

dove $I(t)$ rappresenta il numero di individui infetti al tempo t , I_0 è il numero di individui infetti nell'istante iniziale di osservazione $t = 0$, r è una costante che rappresenta il tasso di infezione (dipendente dal meccanismo di contagio e dal modo in cui gli individui sono a contatto) e γ è una costante che esprime il tasso di guarigione (dipendente dall'evoluzione della malattia in un individuo).

Discuti, al variare dei parametri, l'evoluzione nel lungo periodo di una malattia secondo questo modello.

[La malattia tende a estinguersi o a diventare endemica, a seconda che ...]



Accresci le tue competenze

- Riflettere e approfondire
- Stimolare sviluppare la creatività

► RAGIONARE, GIUSTIFICARE, ARGOMENTARE

1040 Fornisci l'esempio di una funzione (devi scrivere l'espressione analitica e disegnare la parte di grafico interessata):

- a. che non soddisfa l'ipotesi di continuità del teorema di Weierstrass ma ammette comunque un massimo e un minimo assoluti in un intervallo chiuso e limitato;
- b. che non soddisfa l'ipotesi di continuità del teorema di Weierstrass e per questo non ammette massimo o minimo assoluti in un intervallo chiuso e limitato;
- c. che non soddisfa l'ipotesi di continuità del teorema di esistenza degli zeri ma ammette comunque uno zero all'interno di un intervallo chiuso e limitato;
- d. che non soddisfa l'ipotesi di continuità del teorema di esistenza degli zeri e per questo non ammette zeri all'interno di un intervallo chiuso e limitato.

697 **SAPERNE DI PIÙ** I criteri del confronto presentati nella **Lezione 6** valgono solo se le funzioni prese in considerazione sono positive nell'intervallo di integrazione. Esistono altri criteri validi anche per funzioni con segno variabile. Ad esempio, vale il seguente criterio, detto **criterio della convergenza assoluta per integrali impropri**: sia $f(x)$ definita in $[a; +\infty[$; se l'integrale improprio $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ è convergente, allora lo è anche $\int_a^{+\infty} f(x) dx$.

Utilizza questo criterio per dimostrare che $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ è convergente.



Mettiti alla prova

456 Considera la funzione $y = f(x) = e^{-x^n}$, con $n > 1$ numero naturale.

- Dimostra che se n è pari la funzione ha un asintoto orizzontale per $x \rightarrow \pm\infty$, mentre se n è dispari ha un asintoto orizzontale per $x \rightarrow -\infty$.
- Dimostra che se n è pari la funzione ha un massimo assoluto, mentre se n è dispari non ha estremi assoluti.
- Dimostra che se n è pari la funzione non ha flessi, mentre se n è dispari ne ha esattamente due, di cui uno per $x = 0$ che risulta a tangente orizzontale.
- Se n è dispari, sia x_F il punto di flesso diverso da $x = 0$. Calcola la sua espressione in dipendenza da n , dimostra che è sempre minore di 1, e che $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_F = 1$.
- Traccia un grafico della funzione nei due casi n pari e n dispari.

b. se n è pari, la funzione è crescente se $x < 0$, decrescente se $x > 0$; se n è dispari, la funzione è sempre decrescente; c. $f''(x) = -nx^{n-2}(n-1-nx^n)e^{-x^n}$, che è sempre non negativa se n è pari, mentre ha due zeri se n è dispari e studiando il segno...; d. $x_F = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$

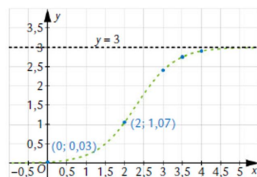
457 Per modellizzare la crescita di una popolazione di batteri si cerca una funzione $f(t)$ che abbia le seguenti proprietà:

- $f(t) > 0$ nel suo dominio;
- $f(t)$ sia crescente nel suo dominio;
- $f(t)$ abbia un asintoto orizzontale destro.

- Individua quale tra le seguenti funzioni è adatta allo scopo, motivando la risposta (a, b, c sono numeri reali positivi):

- $y = ate^{bt+c}$;
- $y = \frac{a}{1+be^{-ct}}$;
- $y = \frac{a}{1-b \ln(ct)}$.

- La figura a lato riporta dei dati raccolti in laboratorio riguardo alla numerosità di una particolare popolazione batterica (in unità di 1000) in funzione del tempo (misurato in secondi). Ricava i valori di a, b, c a partire dalle informazioni presenti nel grafico (usa tutte le cifre significative fornite).

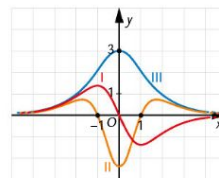


- Calcola le espressioni della derivata prima e della derivata seconda di $f(t)$ e disegna i grafici aiutandoti con il grafico di $f(t)$, in particolare calcolando il punto di flesso di $f(t)$. Che cosa rappresentano queste funzioni rispetto alla popolazione dei batteri? Quale interpretazione si può dare al punto di flesso t_F ?

- Considera la funzione $y = \frac{2,97t^2}{t^2 + 2(t+1)} + 0,03$ e studiane il grafico tralasciando lo studio della derivata seconda.

Può essere utilizzata per modellizzare la popolazione batterica in alternativa alla funzione dei punti precedenti? Motiva la tua risposta. [a. 2; b. $a = 3, b = 99, c = 2$; c. $t_F = \ln\sqrt{99}$; d. Sempre positiva, asintoto orizzontale $y = 3$, minimo assoluto per $t = 0$, massimo assoluto per $t = -2$]

867 DALLA MATEMATICA ALLA FISICA In figura sono riportati i grafici di una funzione $y = f(x)$, della sua derivata prima $y = f'(x)$ e della sua derivata seconda $y = f''(x)$.



- Associa a ciascun grafico la corrispondente funzione, motivando in modo esauriente la tua scelta. Osservando che il grafico della funzione $f(x)$ presenta una simmetria elementare, spiega perché anche i grafici delle sue derivate devono presentare simmetrie elementari e stabilisci di quale tipo sono.

- Supponi che la funzione $f(x)$ abbia la forma:

$$y = f(x) = a(1 + bx^2)^{-2}$$

con a e b parametri reali diversi da 0.

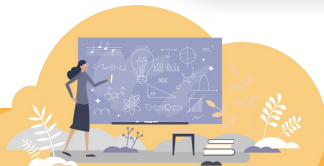
Determina i valori di a e b deducendo dal grafico le informazioni necessarie. Giustifica l'andamento della funzione $f(x)$, con particolare riferimento ad asintoti, punti stazionari e punti di flesso.

Se una sorgente puntiforme sonora emette un'onda sferica con potenza P , un osservatore a distanza r da essa percepisce un'intensità uguale a $I = \frac{P}{4\pi r^2}$.

- Dimostra la relazione appena enunciata, ricordando che l'intensità è la potenza trasmessa per unità di superficie.

- Supponi che un osservatore sia fermo, all'istante $t = 0$, a distanza r_0 dalla sorgente e che cominci ad allontanarsi da essa con moto rettilineo uniformemente accelerato, con accelerazione a . Mostra che la legge $I = I(t)$ con cui varia nel tempo l'intensità percepita dall'osservatore ha un'espressione analitica del tipo $f(t)$, con opportuni valori di a e b , che devi specificare. Determina, in particolare, la velocità di variazione dell'intensità dopo 4 s, supponendo $P = 100$ W, $a = 0,5$ m/s², $r_0 = 10$ m.

[a. Il grafico di $f(x)$ è il III, quello di $f'(x)$ il I, quello di $f''(x)$ il II; b. $a = 3$; $b = \frac{1}{5}$; d. $-0,01$ W/(m²s)]

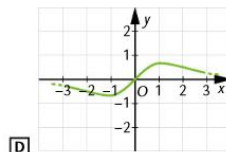
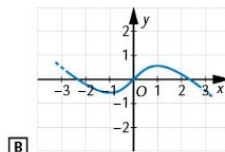
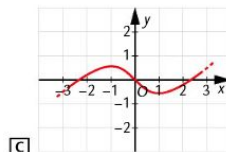
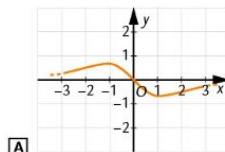
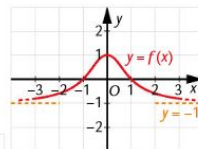


Le prove finali

► PROBLEMA

1 In figura è rappresentato il grafico della funzione $y = f(x)$.

- a. Indica quale tra i seguenti potrebbe essere il grafico di una sua primitiva e spiega il motivo della tua scelta.



- b. Scegli quale tra le seguenti equazioni può corrispondere al grafico della funzione f . Motiva adeguatamente la tua risposta.

A $y = x^2 - x^4$

B $y = \frac{x^2 + 1}{1 - x^2}$

C $y = 1 - \arctan(x^2)$

D $y = \frac{1 - x^2}{x^2 + 1}$

Assumendo che $f(x)$ sia la funzione appena individuata, determina l'espressione analitica della primitiva F di f che ha un flesso appartenente alla retta di equazione $y = 2 - x$. Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico di F nel suo punto di flesso.

- c. Stabilisci se la funzione F ammette asintoti e in caso affermativo determina le equazioni di tali rette.
- d. Calcola il valore A dell'integrale $\int_{-1}^1 f(x) dx$. Determina l'equazione di una parabola con concavità rivolta verso il basso, passante per i punti $A(-1; 0)$ e $B(1; 0)$, che individua con l'asse x una regione di area A .



Le prove finali

► PROBLEMA

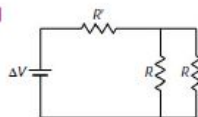


Figura 1

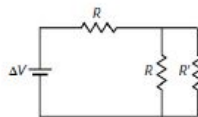


Figura 2

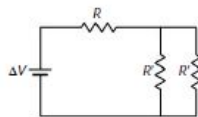


Figura 3

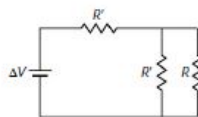


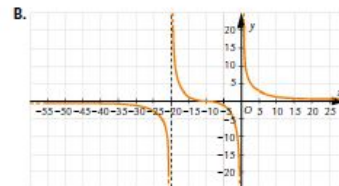
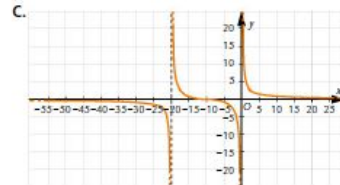
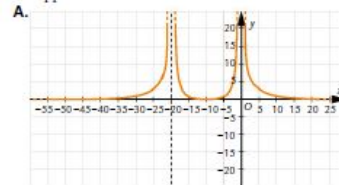
Figura 4

Nei quattro circuiti rappresentati nelle figure è $R = 10,0 \, \Omega$, $R' = x \, \Omega$ e $\Delta V = 10,0 \, \text{V}$.

- Calcola la resistenza equivalente e l'intensità della corrente che circola in ciascun circuito.
- Calcola la potenza dissipata in ogni circuito per effetto Joule e ordina i quattro circuiti per potenza decrescente, nel caso in cui sia $x = 20,0$.

Se i_1 e i_4 sono le intensità delle correnti che circolano rispettivamente nei circuiti delle Figg. 1 e 4, poni $f(x) = \frac{i_1}{i_4}$ e $g(x) = \frac{i_4}{i_1}$, dove $i_0 = 1,00 \, \text{A}$, considerando x come una variabile reale indipendente dalle limitazioni fisiche del problema.

- Traccia il grafico di $f(x)$ e individua i suoi intervalli di monotonia.
- Ricava le informazioni necessarie sulla funzione $g(x)$, per individuare, fra i seguenti grafici, quello che potrebbe rappresentarla.



Trova il punto di intersezione tra i grafici di $f(x)$ e $g(x)$ e interpreta fisicamente il risultato ottenuto.

- Determina le espressioni analitiche e i domini delle funzioni $f \circ g$ e $g \circ f$.



Un esempio di approccio a «spirale»: le funzioni

- Approccio «a spirale» dal primo al quinto anno
- Interpretazione e risoluzione grafica
- Nel biennio si può anteporre il concetto di funzione al calcolo letterale e alla risoluzione di equazioni e disequazioni
- Si riprende il concetto in esercizi e attività in vari ambiti



Lezione 3

TEORIA

RIFLETTI SULLA TEORIA

UNITÀ 5 | Le funzioni

Esplora con GeoGebra
Ricavare il dominio e l'immagine di una funzione dal diagramma cartesiano

1 Ricavare il dominio di una funzione dal diagramma cartesiano

Dal diagramma di una funzione è possibile ricavare il dominio, proiettando il grafico sull'asse x .
Immagina di proiettare tutti i punti del grafico sull'asse x e di considerare quale parte dell'asse x hai ricoperto: questo è il dominio della funzione.

Esempio 8 - Dominio di una funzione dal diagramma

Osserva il grafico in Fig. 9.

Proiettando tutti i suoi punti sull'asse x , si trova il dominio della funzione, che in questo caso è:

$$\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 6\}$$

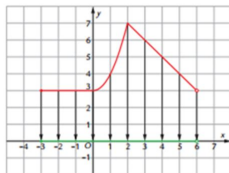


FIGURA 9

2 Insieme immagine di una funzione dal diagramma cartesiano

In maniera analoga, dal grafico di una funzione è possibile ricavare l'insieme immagine, proiettando il grafico sull'asse y .
Immagina questa volta di proiettare tutti i punti del grafico sull'asse y e di considerare quale parte dell'asse y stesso hai ricoperto: questo è l'insieme immagine della funzione.

Esempio 9 - Immagine di una funzione dal diagramma

Considera lo stesso grafico dell'esempio precedente (Fig. 10).

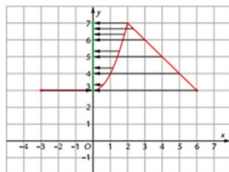
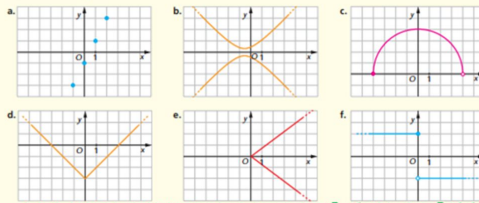


FIGURA 10

Proiettando tutti i punti sull'asse y , si trova l'insieme immagine della funzione, che in questo caso è: $\text{im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 3 \leq y \leq 7\}$

Determinare dominio e insieme immagine dal diagramma cartesiano

Osserva ognuno dei grafici, stabilisci se rappresenta una funzione e, in caso affermativo, determina il dominio e l'insieme immagine.



[a. $\text{dom}(f) = [-1; 1]$; $\text{im}(f) = [0; 2]$; b. non è una funzione; c. $\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$; $\text{im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 1\}$; d. $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$; $\text{im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -1\}$; e. non è una funzione; f. $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$; $\text{im}(f) = \{2\}$]

Interpretare un grafico

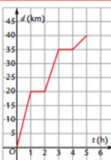
ESERCIZIO SVOLTO Il grafico in figura rappresenta la posizione di Luca, in funzione del tempo, durante un'escursione in bicicletta.

Rispondi alle domande.

- Quante ore è durata l'escursione?
- Quanti chilometri ha percorso Luca in totale?
- Per quanto tempo Luca è rimasto fermo?

SOLUZIONE

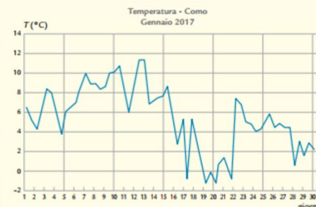
- Il tempo è rappresentato sull'asse delle ascisse, quindi l'intervallo in cui si è svolta l'escursione corrisponde al dominio della funzione: $0 \leq t \leq 5$. La durata è 5 ore.
- La posizione è rappresentata sull'asse delle ordinate, quindi la distanza percorsa corrisponde all'insieme immagine della funzione: $0 \leq d \leq 40$. Luca ha percorso 40 km.
- Dal grafico puoi notare che per $1 \leq t \leq 2$ e per $3 \leq t \leq 4$ la posizione resta invariata: prima al chilometro 20 e dopo al chilometro 35. Luca è quindi rimasto fermo due ore in totale.



NELLA REALTÀ La figura rappresenta l'andamento della temperatura registrata alle ore 12 di ogni giorno del mese di gennaio 2017 nella città di Como.

- Tra quali valori, minimo e massimo, circa, è variata la temperatura durante l'intero mese?
- Come cambia questo insieme di valori se restringi il dominio soltanto ai primi quindici giorni del mese?
- E se lo restringi ai successivi quindici giorni del mese?

[a. minimo -1°C , massimo tra 11°C e 12°C ; b. minimo circa 4°C , massimo non cambia; c. minimo non cambia, massimo circa 9°C]



2 Frazioni algebriche e funzioni

Una funzione definita tramite una frazione algebrica si dice anche **funzione razionale**, in quanto è un rapporto di polinomi (in latino, la parola "ratio" significa "rapporto").

Consideriamo in particolare le funzioni numeriche definite da frazioni algebriche che contengono una sola variabile. Dando un valore numerico alla variabile, che riveste il ruolo di variabile indipendente, la frazione assume a sua volta un valore numerico, che è l'immagine del valore assegnato alla variabile indipendente. In tal caso, le condizioni di esistenza della frazione individuano il **dominio** della funzione.

Esempio 3 - Funzione definita tramite una frazione algebrica

- La frazione algebrica $\frac{1}{x}$ definisce la funzione $y = f(x) = \frac{1}{x}$ che a un numero reale associa il suo reciproco, se esiste. Per $x = 0$ la frazione non è definita: la condizione di esistenza della frazione è $x \neq 0$.
Il dominio della funzione è pertanto: $\text{dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
- La frazione algebrica $\frac{1-2x}{x^2-4}$ definisce la funzione $y = g(x) = \frac{1-2x}{x^2-4}$, che non è definita per i valori di x che annullano il denominatore.
Scomponiamo il denominatore e determiniamo le condizioni di esistenza della frazione:
 $x^2 - 4 = (x-2)(x+2) \rightarrow \text{C.E.: } x \neq -2 \wedge x \neq 2$
Il dominio della funzione è pertanto: $\text{dom}(g) = \mathbb{R} - \{-2; 2\}$.

221 - 223 ▶

Facciamo riferimento alla funzione dell'ultimo esempio e calcoliamo il valore che essa assume per $x = \frac{1}{2}$:

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1-2 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{4}-4} = \frac{0}{-\frac{15}{4}} = 0$$

Il valore $x = \frac{1}{2}$ è quindi uno **zero** della funzione $g(x)$.

Per determinare gli zeri di una funzione frazionaria occorre individuare i valori di x che annullano il numeratore, ma non il denominatore (infatti questi ultimi non appartengono al dominio).

Esempio 4 - Zeri di una funzione frazionaria

Determiniamo gli zeri delle seguenti funzioni:

a. $f(x) = \frac{5}{x^2+1}$

b. $g(x) = -\frac{3x+2}{(3x-2)^2}$

- Il denominatore della frazione non si annulla mai, perché è la somma della quantità x^2 , non negativa, e del numero positivo 1. Si ha quindi: $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$.
Il numeratore non dipende dal valore di x ed è costantemente uguale a 5, per cui la funzione non ammette zeri.
- Il denominatore della frazione si annulla per $x = \frac{2}{3}$. Si ha quindi:
 $\text{dom}(g) = \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$.
Annuliamo il numeratore: $3x+2=0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$.
Il valore $x = -\frac{2}{3}$ è uno zero della funzione, perché annulla il numeratore e appartiene al dominio.

220 - 227 ▶

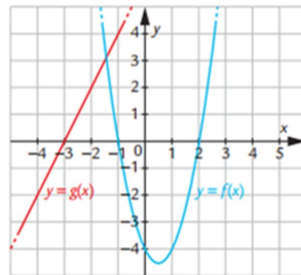
581 In figura sono riportati i grafici di due funzioni polinomiali $f(x)$ e $g(x)$.

- a. Determina il dominio delle funzioni:

$$a(x) = \frac{f(x)}{g(x)}; b(x) = \frac{g(x)}{f(x)}; c(x) = [f(x) \cdot g(x)]^{-1}.$$

- b. Determina gli zeri delle funzioni $a(x)$ e $b(x)$.
c. La funzione $c(x)$ possiede zeri? Perché?

[a. $\mathbb{R} - \{-3\}$; $\mathbb{R} - \{-1; 2\}$; $\mathbb{R} - \{-3; -1; 2\}$; b. -1, 2; -3; c. no]



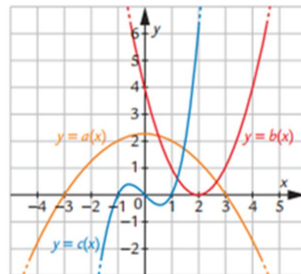
582 In figura sono riportati i grafici di tre funzioni polinomiali: $a(x)$, $b(x)$ e $c(x)$.

- a. Determina il dominio delle funzioni:

$$f(x) = \frac{a(x) \cdot b(x)}{c(x)}; g(x) = \frac{a(x)}{b(x) \cdot c(x)}; h(x) = \frac{c(x)}{a(x) \cdot b(x)}.$$

- b. Determina gli zeri delle tre funzioni.

[a. $\mathbb{R} - \{-1; 0; 1\}$; $\mathbb{R} - \{-1; 0; 1; 2\}$; $\mathbb{R} - \{-3; 2; 3\}$; b. -3, 2, 3; -3, 3; -1, 0, 1]



La funzione esponenziale

1 Funzione esponenziale

Definite le potenze con esponente reale, possiamo costruire una nuova funzione.

DEFINIZIONE Funzione esponenziale

Si chiama **funzione esponenziale di base a** la funzione di equazione $f(x) = a^x$, con $a > 0$ e $a \neq 1$.

Per definizione di potenza a esponente reale, x può essere un numero reale qualsiasi: il **dominio** della funzione è $\mathbb{R}$.

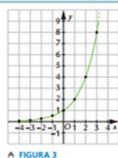
La funzione a^x , con $a > 0$, assume soltanto valori positivi al variare di x . L'insieme immagine della funzione è $\mathbb{R}^+$.

Si esclude il valore $a = 1$ perché $f(x) = 1^x = 1$ risulta essere la funzione costante uguale a 1. Disegniamo per punti il grafico di due funzioni esponenziali, una con base $a > 1$ e l'altra con $0 < a < 1$. Per semplicità, calcoliamo i valori delle funzioni per ascisse intere; sappiamo tuttavia che le due funzioni sono calcolabili per qualunque valore reale di x , quindi sono definite anche negli intervalli fra ascisse intere.

Funzione con base $a > 1$: $y = 2^x$

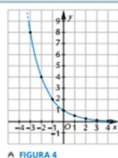
Funzione con base $0 < a < 1$: $y = (\frac{1}{2})^x$

x	2^x
-4	$2^{-4} = \frac{1}{16}$
-3	$2^{-3} = \frac{1}{8}$
-2	$2^{-2} = \frac{1}{4}$
-1	$2^{-1} = \frac{1}{2}$
0	$2^0 = 1$
1	$2^1 = 2$
2	$2^2 = 4$
3	$2^3 = 8$



A FIGURA 3

x	$(\frac{1}{2})^x$
-4	$(\frac{1}{2})^{-4} = 16$
-3	$(\frac{1}{2})^{-3} = 8$
-2	$(\frac{1}{2})^{-2} = 4$
-1	$(\frac{1}{2})^{-1} = 2$
0	$(\frac{1}{2})^0 = 1$
1	$(\frac{1}{2})^1 = \frac{1}{2}$
2	$(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$
3	$(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$



A FIGURA 4

Ripetendo i due grafici su uno stesso piano cartesiano si può notare che l'uno è simmetrico dell'altro rispetto all'asse y ; la **simmetria** si rileva anche dalle due equazioni:

$$\text{infatti } y = (\frac{1}{2})^x = 2^{-x} \text{ si ottiene da } y = 2^x \text{ con la trasformazione } \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

13 - E1

Se nella tabella proseguissimo nella ricerca dei valori della funzione $y = 2^x$, potremmo notare che i valori di y crescono molto rapidamente al crescere dei valori di x . Confrontando gli andamenti della funzione esponenziale e di una funzione di equazione $y = x^n$, con $x \neq 1$ e $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, possiamo notare una **velocità di crescita** più rapida da parte di $y = 2^x$ rispetto a $y = x^n$, comunque grande sia n (vedi Esercizio 23).

23 - E2

Per verificare questa proprietà quando n ha valori elevati, occorre considerare valori di x molto grandi. Per esempio, se $n = 20$ deve essere $x \approx 143$ e la corrispondente ordinata è nell'ordine di 10^{45} .

E8

LIBRO

La funzione logaritmica

1 Logaritmo e funzione logaritmica

Analizziamo la funzione esponenziale $y = 2^x$ e chiediamoci quali operazioni consentano di ricavare la controimmagine di un certo valore di y .

Con riferimento al grafico di Fig. 8 facciamo qualche esempio:

- la controimmagine di $y = 8$ è il valore di x tale che $2^x = 8$, cioè $x = 3$;
- la controimmagine di $y = \frac{1}{2}$ è il valore di x tale che $2^x = \frac{1}{2}$, cioè $x = -1$.

Si tratta in entrambi i casi di individuare quale esponente attribuire alla base 2 per ottenere il risultato prefissato.

In generale, la controimmagine di un certo valore $y = b$ relativo a una funzione esponenziale $y = a^x$, è l'esponente che dobbiamo attribuire alla base a per ottenere il valore b . Possiamo ricavare questo esponente attraverso un nuovo operatore matematico: il logaritmo.

DEFINIZIONE Logaritmo in base a di b

Dati due numeri reali positivi a e b , con $a \neq 1$, si chiama **logaritmo in base a del numero b** , e si indica con $\log_a b$, l'esponente al quale si deve elevare la base a per ottenere b . Il numero b si dice **argomento del logaritmo**.

Esempio 1 - Logaritmo di un numero b in una base data a

$$\bullet \log_2 \sqrt{5} = \frac{1}{2}, \text{ in quanto } 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} \quad \bullet \log_{\frac{1}{3}} 9 = -2 \text{ in quanto } (\frac{1}{3})^{-2} = 9$$

13 - E3

Sappiamo che la funzione $y = a^x$, per $a > 0$ e $a \neq 1$, è biettiva e quindi invertibile. Ora che abbiamo un modo di scrivere le controimmagini di tutti i valori da essa assunti, definiamo la sua funzione inversa e rappresentiamola analiticamente:

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$$

L'inversa di una funzione esponenziale è detta **funzione logaritmica**.

DEFINIZIONE Funzione logaritmica

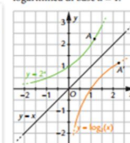
Si dice **funzione logaritmica (elementare)** ogni funzione, avente come dominio $\mathbb{R}^+$, definita da un'equazione del tipo $y = \log_a x$, con $a > 0$ e $a \neq 1$.

Per visualizzare il grafico di una funzione logaritmica a partire dal grafico della funzione esponenziale, operiamo una simmetria rispetto alla bisettrice $y = x$ del grafico di quest'ultima (Fig. 9 e Fig. 10).

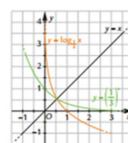
Ricorda che la funzione $y = a^x$ con base $a = 1$ è la funzione costante $y = 1^x = 1$ che non è biettiva e quindi non è invertibile. Ne segue che non è definita la funzione logaritmica di base $a = 1$.

LOGARITMO IN BASE 10 E LOGARITMO IN BASE e

Il logaritmo in base 10 è detto anche **logaritmo decimale** e si indica con il simbolo $\log$; ossia: $\log x = \log_{10} x$. Il logaritmo in base e è detto anche **logaritmo naturale** e si indica con il simbolo $\ln$; ossia: $\ln x = \log_e x$.



A FIGURA 9 $a > 1$



A FIGURA 10 $0 < a < 1$

E12

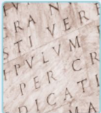
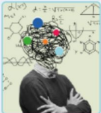
LIBRO



Uno strumento in più per apprendere... DEAFLIX!

Deaflix Matematica SS2G

Secondaria di II grado ↑

 Italiano grammatica	 Italiano antologia	 Italiano letteratura	 Latino grammatica
 Latino letteratura	 Matematica	 Fisica	 Inglese grammatica
◦ Numeri (2) ◦ Geometria analitica (7) ◦ Goniometria e trigonometria (3) ◦ Analisi (4) ◦ Algebra (6) ◦ Statistica e probabilità (2) ◦ Esponenziali e logaritmi (2)			
 Inglese letteratura	 Francese grammatica	 Spagnolo grammatica	



INSEGNARE MATEMATICA

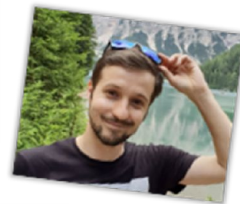
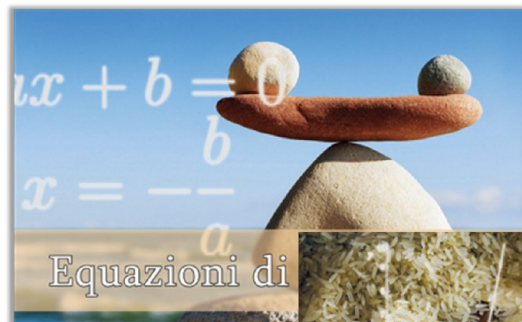


DEASCUOLA



Uno strumento in più per apprendere... DEAFLIX!

29 playlist per trattare gli argomenti fondamentali della matematica della Scuola Secondaria di Secondo Grado



INSEGNARE MATEMATICA



DEASCUOLA

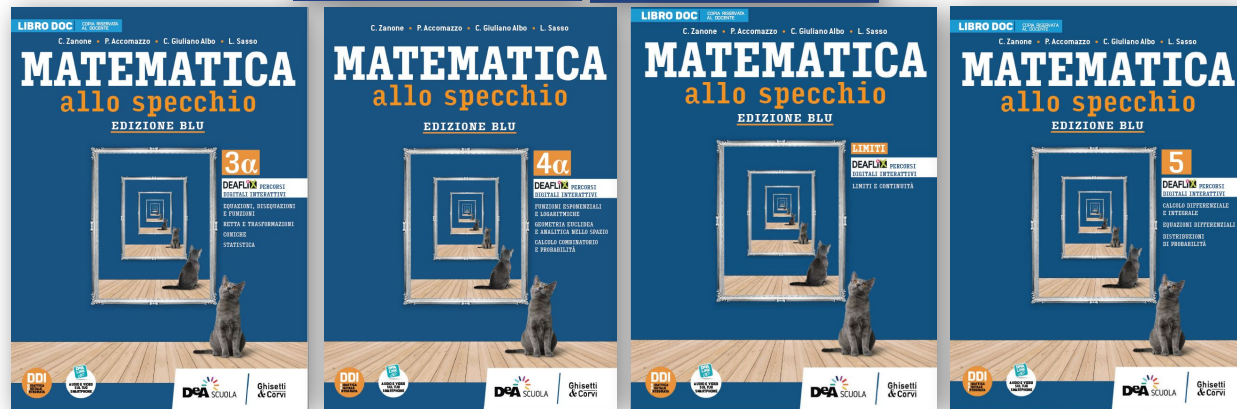
Scopri Matematica allo Specchio

Edizione **Blu**

Scheda del libro

Rivolto a:
Licei Scientifici

Per maggiori
informazioni
contatta il tuo
agente di zona,
[clicca qui](#).



INSEGNARE MATEMATICA

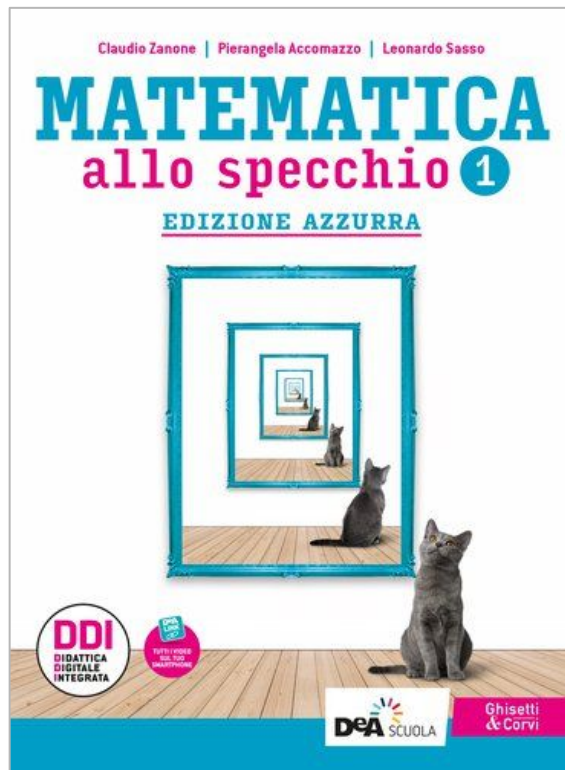
Scopri Matematica allo Specchio

Edizione **Azzurra**

Scheda del libro

Rivolto a:
Altri Licei

Per maggiori informazioni
contatta il tuo agente di
zona, [clicca qui](#).



INSEGNARE MATEMATICA

Scopri Matematica allo Specchio

Edizione **Rossa**

Scheda del libro

Rivolto a:
Istituti Tecnici Economici

Per maggiori informazioni
contatta il tuo agente di
zona, [clicca qui](#).



INSEGNARE MATEMATICA

Scopri Matematica allo Specchio

Edizione Verde

Scheda del libro

Rivolto a:
Istituti Tecnici

Per maggiori informazioni
contatta il tuo agente di
zona, [clicca qui](#).



INSEGNARE MATEMATICA

Spazio alle domande



I prossimi appuntamenti

Webinar

INSEGNARE MATEMATICA

**Insegnare con... Tutti i colori
della Matematica Edizione
bianca**

02 Marzo 2023, 15:00

con: Leonardo Sasso

Iscriviti qui

Webinar

INSEGNARE MATEMATICA

**Insegnare con... Tutti i colori
della Matematica Edizione
azzurra**

06 Marzo 2023, 15:00

con: Leonardo Sasso

Iscriviti qui



INSEGNARE MATEMATICA



DEASCUOLA