



DEASCUOLA

INSEGNARE MATEMATICA E FISICA

# Maturità 2025: in preparazione alla seconda prova scritta per il liceo scientifico

**Relatori:**

Leonardo Sasso

Claudio Zanone



# ***Di che cosa parleremo***

- ① **Uno sguardo alla normativa**  
.....
- ② **Le prove del 2024**  
.....
- ③ **Un po' di storia**  
.....
- ④ **Le nostre idee per la prova scritta di matematica**  
.....
- ⑤ **I materiali per allenarsi**  
.....

# **① Uno sguardo alla normativa**

# ***Prova d'esame***

## ***Predisposizione e struttura***

- La prova è predisposta dal Ministero
- La prova consiste nella risoluzione, a scelta del candidato, di **un problema** (scelto tra due) e di **quattro quesiti** (scelti tra otto)

## ***Prova d'esame***

### ***Finalità (dai quadri di riferimento)***

La prova è finalizzata ad accertare l'acquisizione dei **principali concetti e metodi della matematica di base**, anche in prospettiva storico-critica, in relazione ai contenuti previsti dalle vigenti Indicazioni Nazionali per l'intero percorso di studio del Liceo Scientifico e dettagliati nel relativo quadro di riferimento. In particolare la prova mira a rilevare la comprensione e la padronanza del **metodo dimostrativo** nei vari ambiti della matematica e la capacità di **argomentare** correttamente applicando metodi e concetti matematici, attraverso l'uso del ragionamento logico.

# **Prova d'esame**

## **Contenuti (dai quadri di riferimento)**

### **Nuclei tematici fondamentali**

#### **ARITMETICA E ALGEBRA**

Rappresentazioni dei numeri e operazioni aritmetiche

Algebra dei polinomi

Equazioni, disequazioni e sistemi

#### **GEOMETRIA EUCLIDEA E CARTESIANA**

Triangoli, cerchi, parallelogrammi

Funzioni circolari

Sistemi di riferimento e luoghi geometrici

Figure geometriche nel piano e nello spazio

#### **INSIEMI E FUNZIONI**

Proprietà delle funzioni e delle successioni

Funzioni e successioni elementari

Calcolo differenziale

Calcolo integrale

#### **PROBABILITÀ E STATISTICA**

Probabilità di un evento

Dipendenza probabilistica

Statistica descrittiva

## **Prova d'esame**

### **Utilizzo della calcolatrice grafica**

L'Articolo 20, comma 12, dell'O.M. 67 del 31 marzo 2025 riporta quanto segue:

12. Ai fini dello svolgimento della seconda prova scritta è consentito l'uso delle calcolatrici scientifiche o delle calcolatrici grafiche purché non siano dotate della capacità di elaborazione simbolica algebrica (CAS - Computer Algebra System o SAS - Symbolic Algebra System), cioè della capacità di manipolare espressioni matematiche, e non abbiano la disponibilità di connessione INTERNET, elencate in allegato alla nota del Direttore generale della D.G. per gli ordinamenti scolastici, la formazione del personale scolastico e la valutazione del sistema nazionale di istruzione n. 10961 del 17 marzo 2025. Per consentire alla commissione d'esame il controllo dei dispositivi in uso, i candidati che intendono avvalersi della calcolatrice devono consegnarla alla commissione in occasione dello svolgimento della prima prova scritta.

# Prova d'esame

## Valutazione

1. La prova ha un punteggio di 20 punti
2. Il d.m. 769 del 2018 contiene la griglia di valutazione, i cui indicatori saranno declinati in descrittori a cura delle commissioni

| Indicatore (correlato agli obiettivi della prova)                                                                                                                                                         | Punteggio max per ogni indicatore (totale 20) |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| <b>Comprendere</b><br>Analizzare la situazione problematica. Identificare i dati ed interpretarli. Effettuare gli eventuali collegamenti e adoperare i codici grafico-simbolici necessari.                | 5                                             |
| <b>Individuare</b><br>Conoscere i concetti matematici utili alla soluzione. Analizzare possibili strategie risolutive ed individuare la strategia più adatta.                                             | 6                                             |
| <b>Sviluppare il processo risolutivo</b><br>Risolvere la situazione problematica in maniera coerente, completa e corretta, applicando le regole ed eseguendo i calcoli necessari.                         | 5                                             |
| <b>Argomentare</b><br>Commentare e giustificare opportunamente la scelta della strategia risolutiva, i passaggi fondamentali del processo esecutivo e la coerenza dei risultati al contesto del problema. | 4                                             |

## ② Le prove del 2024

# Problemi con parametri

## PROVA ORDINARIA

### PROBLEMA 1

Si consideri  $f_{a,b}(x) = \frac{ax^3+b}{x^2}$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$ .

- a) Determinare i valori dei parametri in modo che la retta  $t$ , di equazione  $7x + y - 12 = 0$ , sia tangente al grafico di  $f_{a,b}(x)$  nel suo punto  $P$  di ascissa  $x = 1$ .

Si ponga, d'ora in avanti,  $a = 1$  e  $b = 4$ .

- b) Studiare la funzione  $f(x) = \frac{x^3+4}{x^2}$  e tracciarne il grafico  $\gamma$ . Scrivere l'equazione dell'ulteriore retta tangente alla curva  $\gamma$  passante per  $P$ .
- c) Al variare del parametro reale  $m$ , determinare il numero di intersezioni tra la retta di equazione  $y - 5 = m(x - 1)$  e la curva  $\gamma$ .
- d) Sia  $S(k)$ , con  $k > \frac{3}{2}$ , l'area della regione finita di piano compresa tra la curva  $\gamma$ , il suo asintoto obliquo, la retta  $t$  e la retta di equazione  $x = k$ . Calcolare il  $\lim_{k \rightarrow +\infty} S(k)$ , fornendo un'interpretazione geometrica del risultato ottenuto.

# Problemi con parametri

## PROVA SUPPLETIVA

### PROBLEMA 2

Si consideri la famiglia di curve  $f_a(x) = \frac{x^2-1}{e^{ax}}$ , con  $a$  parametro reale non nullo, e si indichi con  $\Gamma_a$  il grafico di  $f_a$ .

- a) Verificare che tutti i grafici  $\Gamma_a$  hanno tre punti in comune e scrivere le loro coordinate.
- b) Al variare del parametro  $a$ , individuare gli intervalli di monotonia di  $\Gamma_a$ , le ascisse degli estremi relativi e dei flessi.
- c) Determinare i valori del parametro  $a$  in modo che il punto  $F$ , intersezione di  $\Gamma_a$  con l'asse delle ordinate, sia un punto di flesso. In corrispondenza di tali valori, scrivere le equazioni delle rette tangenti in  $F$ .
- d) Dimostrare che, per ogni valore di  $a \neq 0$ , le curve  $\Gamma_a$  e  $\Gamma_{-a}$  sono simmetriche tra loro rispetto all'asse delle ordinate. Determinare l'area della regione finita di piano delimitata dai grafici  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_{-1}$ .

# Problemi con parametri

## PROVA STRAORDINARIA

### PROBLEMA 1

Sia data la seguente funzione parametrica:

$$y = x^3 + ax^2 + c$$

- a) Si dimostri che per ogni valore dei parametri reali  $a$  e  $c$  ( $a \neq 0$ ), il flesso coincide con il punto medio del segmento che ha per estremi i punti di massimo e di minimo relativi.
- b) Si determinino i valori dei parametri affinché la funzione abbia il massimo in  $x = -2$  e abbia un flesso di ordinata 6.
- c) Si disegni quindi il grafico della funzione  $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4$ , e si calcoli l'area della regione finita di piano compresa tra la funzione, l'asse delle ascisse, l'asse delle ordinate e la retta di equazione  $x = -2$ .
- d) Si dimostri infine che la funzione  $f(x)$  è simmetrica rispetto al suo punto di flesso. Successivamente, si applichi alla funzione  $f(x)$  la traslazione di vettore  $\vec{v}(\alpha, \beta)$ . Determinare  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , affinché la funzione traslata risulti dispari.

# Problemi con parametri

## PROVA STRAORDINARIA

### PROBLEMA 2

Si consideri la funzione  $f(x) = e^{-x^2}$ .

- a) Tracciare, nel medesimo sistema di riferimento, il grafico  $\gamma_1$  della funzione  $f(x)$  e il grafico  $\gamma_2$  della sua funzione derivata, individuando i loro asintoti, estremi e flessi. Successivamente scrivere le coordinate del punto  $P$  in cui  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  si intersecano.
- b) La retta di equazione  $x = t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , incontra  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , rispettivamente, nei punti  $P_1$  e  $P_2$ . Determinare il valore del parametro  $t$ , in modo che la misura del segmento che unisce i due punti abbia misura massima e calcolare il valore di tale misura.
- c) Sia  $\gamma_3$  il grafico rappresentativo della funzione  $f''(x)$ . Calcolare l'area della regione finita delimitata da  $\gamma_2$  e  $\gamma_3$ .
- d) Posto  $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ , calcolare  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{f'(x)}$  spiegando perché, in  $x = 0$ , le funzioni  $F(x)$  ed  $f'(x)$  sono infinitesime dello stesso ordine.

# **Problemi con parametri**

## **SCUOLE ITALIANE ALL'ESTERO**

### **PROBLEMA 2**

Si consideri la funzione  $f_a(x) = \frac{e^{|x|+a}}{|x|+a}$ , con  $a$  parametro reale.

a) Dimostrare che:

- $f_a$  è una funzione pari  $\forall a \in \mathbb{R}$ ;
- $f_a$  ha dominio  $D = \mathbb{R}$  se e solo se  $a > 0$ ;
- $f_a$  è derivabile  $\forall x \in \mathbb{R}$  se e solo se  $a = 1$ .

Si ponga, d'ora in avanti,  $a = 1$ .

b) Studiare la funzione  $f_1$  e tracciare il suo grafico rappresentativo  $\Gamma$ .

c) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico  $\Gamma$  nel suo punto di ascissa 1.

d) A partire dal grafico  $\Gamma$ , dedurre il grafico  $\Omega$  della curva di equazione  $g(x) = \frac{1}{f_1}$ . Determinare l'area della regione finita di piano delimitata da  $\Omega$ , dall'asse delle ascisse e dalle rette  $x = -1$  e  $x = 1$ .

# Problemi con parametri

## SCUOLE ITALIANE ALL'ESTERO

### PROBLEMA 1

Fissato un parametro reale  $k$ , con  $k \neq 0$ , si consideri la funzione  $f_k$  così definita:

$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{k(x+2)}{\sqrt{x+1}} & x > 0 \\ -x^2 + 2k & x \leq 0 \end{cases}$$

Sia  $\Gamma_k$  il grafico di  $f_k$  in un piano cartesiano  $Oxy$ .

- Al variare del parametro  $k$ , dimostrare che la funzione è sempre continua e derivabile in tutto il suo insieme di definizione e discutere la natura del punto stazionario  $P$ , del quale se ne chiedono le coordinate.
- Determinare il valore del parametro  $k$  affinché la retta tangente a  $\Gamma_k$ , nel suo punto di ascissa  $x = 2$ , sia perpendicolare alla retta di equazione  $6x + \frac{\sqrt{3}}{3}y - 1 = 0$ . Successivamente determinare l'equazione di tale retta tangente.
- Si ponga d'ora in avanti  $k = \frac{1}{2}$ . Studiare la funzione  $f_{\frac{1}{2}}(x)$  e tracciarne il grafico  $\Gamma_{\frac{1}{2}}$ . Si consideri il trapezio rettangolo inscritto nella regione finita di piano del II quadrante delimitata dagli assi cartesiani e da  $\Gamma_{\frac{1}{2}}$  e avente base maggiore  $OP$ . Determinare le coordinate del punto  $Q$  appartenente a  $\Gamma_{\frac{1}{2}}$  affinché la superficie di tale trapezio sia massima.
- Determinare l'area della regione finita di piano delimitata da  $\Gamma_{\frac{1}{2}}$ , dall'asse delle ascisse e dalla retta  $x = 3$ .

# Problemi con grafici

## PROVA ORDINARIA

### PROBLEMA 2

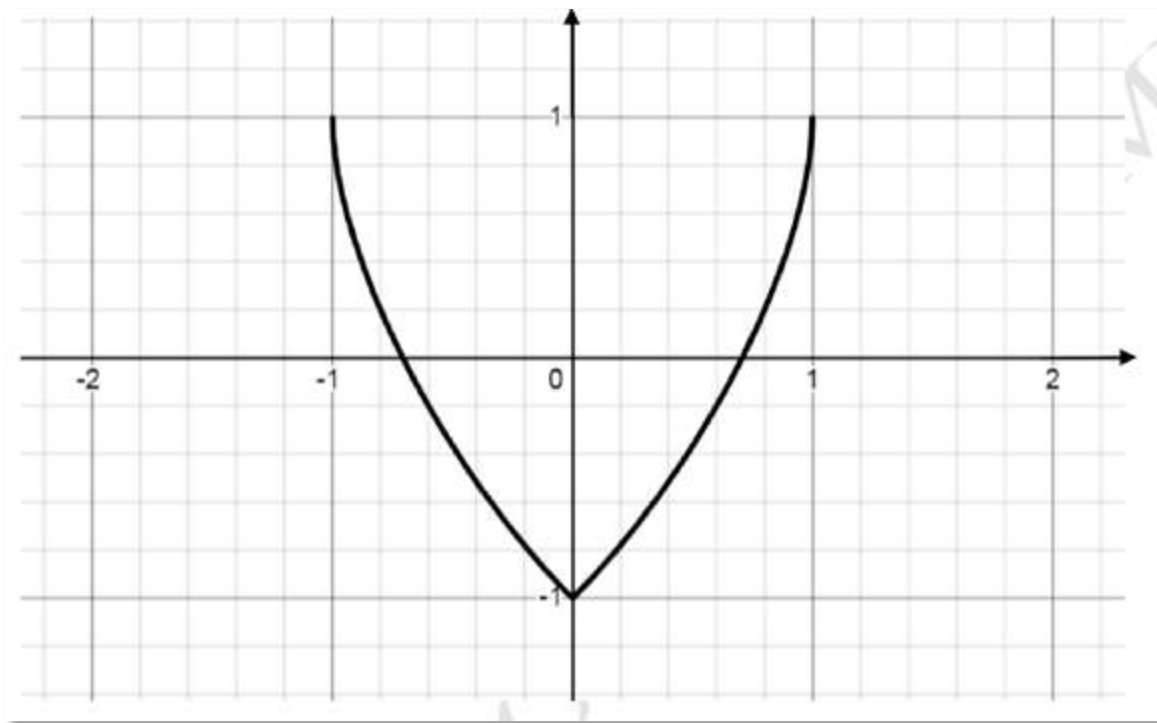
*«All'inizio e alla fine, abbiamo il mistero. [...] A questo mistero la matematica ci avvicina, pur senza penetrarlo». (E. De Giorgi)*

Si consideri la famiglia di funzioni  $f_n(x) = \sqrt[n]{x^2} - \sqrt{ax^2 + bx + 1}$ , con  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$  e  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < 0$ .

- a) Verificare che, qualunque sia il valore di  $n$ , la funzione  $f_n$  non è derivabile nel punto di ascissa  $x = 0$ . Determinare il valore di  $n$  in corrispondenza del quale il grafico di  $f_n$  presenta un punto angoloso. Per opportuni valori dei parametri  $a, b$ , il grafico  $\alpha$ , in figura, rappresenta la funzione  $f_2(x) = |x| - \sqrt{ax^2 + bx + 1}$ . Determinare i parametri  $a$  e  $b$ , considerando che  $f_2$  è definita in  $[-1; 1]$  e che il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.

# ***Problemi con grafici***

## **PROVA ORDINARIA**



# Problemi con grafici

## PROVA ORDINARIA

Si ponga, d'ora in avanti,  $a = -1$ ,  $b = 0$ .

- b) Studiare la funzione  $g(x) = |x| + \sqrt{1 - x^2}$ , verificando che non è derivabile negli estremi del dominio e nel punto di ascissa  $x = 0$ . Indicare con  $\beta$  il suo grafico e tracciare la curva  $\gamma = \alpha \cup \beta$ .
- c) La retta  $r$ , di equazione  $x = k$ , con  $-1 < k < 1$ , interseca  $\gamma$  nei punti  $P$  e  $Q$ . Dimostrare che la misura del segmento  $PQ$  è massima quando  $r$  è asse di simmetria di  $\gamma$ .
- d) Verificare che la funzione  $H(x) = \frac{1}{2}(\arcsen(x) + x\sqrt{1 - x^2})$  è una primitiva della funzione  $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$ . Con il metodo che si ritiene più opportuno, calcolare l'area della regione finita di piano delimitata da  $\gamma$ .

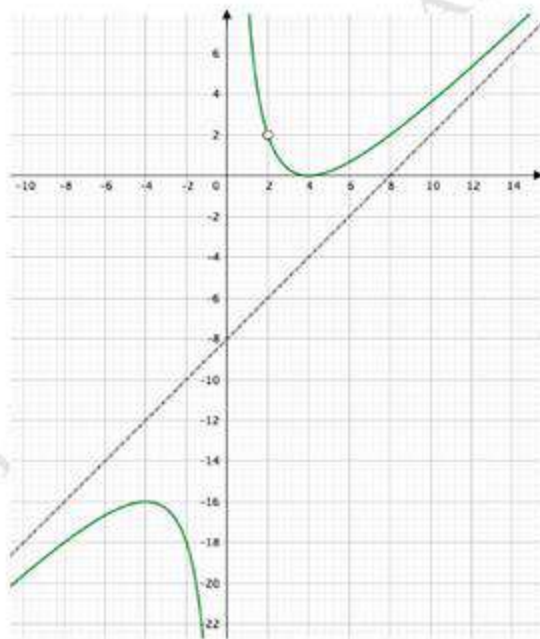
*«Le forme create dal matematico, come quelle create dal pittore o dal poeta, devono essere belle: le idee, come i colori o le parole, devono legarsi armoniosamente. La bellezza è il requisito fondamentale: al mondo non c'è posto perenne per la matematica brutta». (G. H. Hardy)*

# Problemi con grafici

## PROVA SUPPLETIVA

### PROBLEMA 1

Si consideri il grafico  $y$  in figura, rappresentativo di una funzione  $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$ , dove  $A(x)$  e  $B(x)$  sono dei polinomi, definita nel dominio  $D = (-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$ .



# Problemi con grafici

## PROVA SUPPLETIVA

- a) Analizzando il grafico, si deducano lo zero, l'insieme immagine e gli estremi relativi di  $f$ .  
Determinare i valori dei limiti agli estremi del dominio e i valori di  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$  e  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x)$ .  
Scrivere le equazioni degli asintoti di  $f$ .

- b) Supponendo che la funzione  $f$  abbia equazione

$$y = \frac{a(x-b)^2(x-c)}{x(x-d)}$$

determinare i valori dei parametri  $a, b, c, d$ .

- c) Dal grafico  $\gamma$ , dedurre i grafici delle funzioni  $f(|x|)$  e  $\ln(f(x))$  specificando, per ciascuna, dominio, asintoti, estremi e insieme immagine.
- d) Si consideri la funzione  $F(x) = \int_3^x f(t)dt$ , definita nell'intervallo  $[3; 8]$ . Tracciare un suo grafico rappresentativo  $\Gamma$ , specificando l'ascissa del punto di flesso e il coefficiente angolare della retta tangente in tale punto.

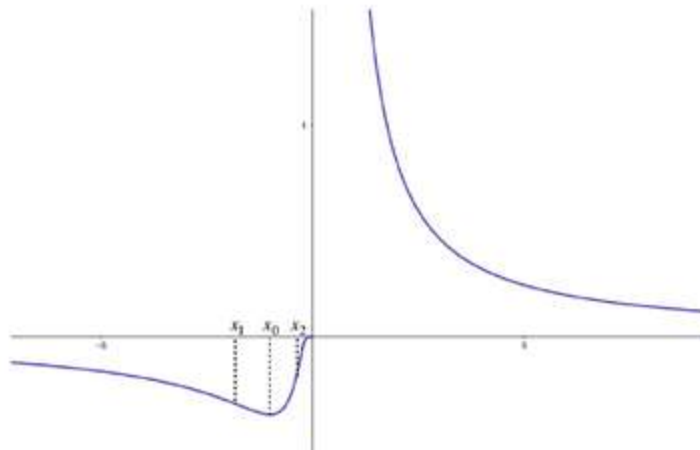
# Problemi con grafici

## SCUOLE ITALIANE ALL'ESTERO

### PROBLEMA 1

Si consideri la funzione  $y = f(x)$  il cui grafico  $\Gamma$  è rappresentato in figura.

Nei punti di ascissa  $x_0$ ,  $x_1$  e  $x_2$  la funzione ammette, rispettivamente, un punto stazionario e due punti di flesso.



a) Individuare, giustificando la risposta, quale tra le seguenti funzioni è rappresentata dal grafico  $\Gamma$ .

$$f_1(x) = xe^{\frac{1}{x}}, \quad f_2(x) = \frac{1}{x}, \quad f_3(x) = xe^{(1-x)}, \quad f_4(x) = \frac{e^{(1-x)}}{x}.$$

## ***Problemi con grafici***

### **SCUOLE ITALIANE ALL'ESTERO**

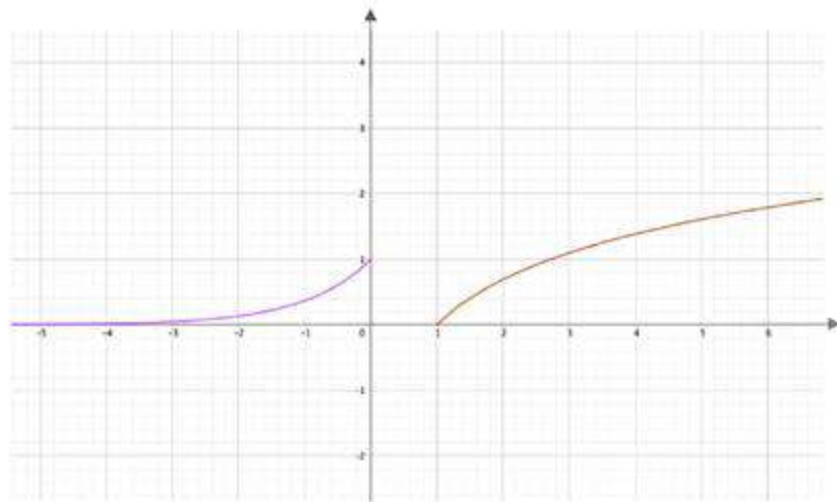
- b) Spiegare perché la funzione in figura non è invertibile nel suo dominio e individuare una opportuna restrizione in cui la funzione è invertibile. Rappresentare il grafico della funzione  $f'$  deducendolo dal grafico  $f$ .
- c) Stabilire, illustrando il ragionamento seguito, se esiste un intervallo  $[a; b]$  in cui entrambe le funzioni  $f_1$  e  $f_2$  soddisfano le ipotesi del teorema di Rolle.  
Determinare l'ampiezza dell'angolo acuto compreso tra le rette  $r$  ed  $s$  tangenti rispettivamente alle funzioni  $f_1$  e  $f_2$  nel loro punto comune di ascissa positiva.
- d) Determinare l'espressione della primitiva di  $y = f_3(x)$  passante per il punto  $P(0, -e)$ . Calcolare il rapporto  $\frac{A_1}{A_2}$  dove  $A_1$  è l'area della regione piana compresa tra l'asse delle ordinate, la retta  $y = 1$  e il grafico di  $f_3$  e  $A_2$  è l'area della regione piana compresa tra il grafico della funzione  $f_3$  e il semiasse positivo delle ascisse.

# Problemi con grafici

## SCUOLE ITALIANE ALL'ESTERO

### PROBLEMA 2

In figura, sono rappresentati i grafici della funzione esponenziale, con  $x < 0$ , e della funzione logaritmica, con  $x > 1$ , entrambe in base naturale.



a) Determinare il polinomio di terzo grado  $P(x)$  in modo che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x < 0 \\ P(x) & 0 \leq x \leq 1 \\ \ln(x) & x > 1 \end{cases}$$

sia continua e derivabile in  $\mathbb{R}$ .

## ***Problemi con grafici***

### **SCUOLE ITALIANE ALL'ESTERO**

- b) Posto  $P(x) = 4x^3 - 6x^2 + x + 1$ , dimostrare che ammette un ulteriore zero distinto da 1. Dopo aver determinato le ascisse dei punti stazionari e studiato la concavità, tracciare il grafico del polinomio completando il grafico  $\gamma$  rappresentativo della funzione  $f$ .
- c) Indicato con  $B$  il punto di flesso di  $P(x)$  e con  $A$  e  $C$  i punti di ascisse, rispettivamente,  $x = 0$  e  $x = 1$ , dimostrare che  $B$  è il centro di simmetria dell'arco di estremi  $A$  e  $C$ . Verificare che le rette tangenti a  $\gamma$ , nei punti  $A$  e  $C$ , sono parallele.
- d) Scrivere l'equazione della retta  $t$ , tangente al grafico  $\gamma$ , nel punto  $B$  di ascissa  $\frac{1}{2}$ . Verificare che  $t$  non ha ulteriori punti in comune con  $\gamma$ . Determinare l'area della regione finita di piano delimitata da  $t$ , da  $\gamma$  e dalla retta di equazione  $x = \frac{3}{2}$ .

## Quesiti: geometria sintetica nel piano

1. È dato un triangolo  $ABC$ , rettangolo in  $B$ . Dimostrare che tale triangolo è isoscele se e solo se l'altezza  $BH$  relativa all'ipotenusa è congruente a metà ipotenusa.
8. Scrive Carlo Emilio Gadda in uno dei racconti de *L'Adalgisa – Disegni milanesi*: «Le stanze del servizio, il bagno, i corridoi, l'anticamera e l'uno de' due gabinetti, eran pavimentati con piastrelle rosse di piccolo formato: esagonali [...]. L'apotema di quelle mattonelle misurava centimetri 5,196: mentrè il raggio del circolo circoscritto raggiungeva i 60 millimetri». Esprimere la relazione esatta tra raggio del cerchio circoscritto ed apotema (ossia il raggio del cerchio inscritto) per un esagono regolare. Verificare il risultato ottenuto alla luce delle misure indicate dallo scrittore. Spiegare perché, utilizzando piastrelle esagonali regolari tutte congruenti, è possibile pavimentare un piano. Con quali altri poligoni regolari, tra loro congruenti, è possibile pavimentare un piano? Motivare la risposta.

## Quesiti: geometria sintetica nel piano

È dato un triangolo  $ABC$  di lati  $AB = a$  e  $BC = \sqrt{3}a$ . Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- Se  $\hat{ACB} = \frac{\pi}{6}$ , allora il triangolo è rettangolo;
- Se il triangolo è rettangolo, allora  $\hat{ACB} = \frac{\pi}{6}$ .

Motivare le risposte.

Sia data una circonferenza  $\Gamma$  e siano  $\hat{ACB}$  e  $\hat{ADB}$  angoli alla circonferenza che insistono sull'arco  $AB$ , con  $AC$  parallelo a  $DB$ . Detto  $O$  il punto di intersezione di  $BC$  e  $AD$ , dimostrare che i triangoli  $ACO$  e  $BOD$  sono isosceli e simili fra di loro.

Fornire una dimostrazione del teorema di Viviani: dato un triangolo equilatero, la somma delle tre distanze di un qualunque punto interno dai lati del triangolo è uguale all'altezza del triangolo stesso.

Si considerino due circonferenze congruenti  $\gamma$  e  $\gamma'$ , di centri rispettivamente  $O$  e  $O'$ , le quali si intersecano nei punti  $A$  e  $B$ . Indicato con  $P$  il punto di intersezione della retta  $BO'$ , distinto da  $B$ , con la circonferenza  $\gamma$ , dimostrare che il quadrilatero  $PO'AO$  è inscritto in una circonferenza.

## ***Quesiti: probabilità classica***

Si lancia 5 volte una moneta truccata che dà testa con probabilità  $p$ .

- Qual è la probabilità di ottenere testa esattamente 2 volte?
- Per quale valore di  $p$  la probabilità di ottenere testa esattamente 2 volte è massima?

In un salvadanaio ci sono 15 monete, di cui 9 sono da 1 euro e le altre 6 da 2 euro. Se ne estraggono 6 contemporaneamente.

- Qual è la probabilità che il valore totale delle monete estratte sia esattamente 10 euro?
- Qual è la probabilità che il valore totale delle monete estratte sia al massimo 10 euro?

Lanciando due dadi regolari a sei facce, qual è la probabilità di:

- ottenere somma 10;
- ottenere per somma un numero multiplo di 2 o di 3;
- ottenere per somma un numero multiplo di 2 e di 3.

## ***Quesiti: probabilità classica***

Un sacchetto contiene nove palline, numerate da 1 a 9. Si estraggono in blocco cinque palline: qual è la probabilità che la somma dei numeri usciti sia maggiore di 15 e minore di 35? Qual è la probabilità che la somma dei numeri usciti sia dispari?

Si consideri una scatola contenente 9 palline, di cui 6 bianche e 3 nere. Si estraggono le palline una ad una senza reinserimento finché non siano estratte 4 palline bianche. Qual è la probabilità che siano necessarie esattamente 4 estrazioni? Qual è la probabilità che siano necessarie esattamente 6 estrazioni?

## Quesiti: geometria analitica nello spazio

Nello spazio con riferimento cartesiano ortogonale  $Oxyz$ , è dato il piano  $\pi : 3x - 2y + 5 = 0$ .

- Determinare le coordinate del punto  $H$ , proiezione ortogonale di  $P(4, 2, 1)$  sul piano  $\pi$ ;
- Determinare l'intersezione della retta  $s: \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases}$  con il piano  $\pi$ .

Verificare che i punti  $O(0,0,0)$ ,  $A(1,4,8)$ ,  $B(-6,0,12)$  e  $C(-7, -4,4)$  sono complanari. Calcolare area e perimetro del quadrilatero  $OABC$  e classificarlo.

Il centro di una superficie sferica  $S$  è il punto di intersezione tra la retta  $r$  individuata dalle equazioni

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 3x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

e la retta  $t$  passante per i punti  $A(-2,3,0)$  e  $B(2, -1, 2)$ . La superficie  $S$  è inoltre tangente al piano  $\alpha$  di equazione  $4x - 2y - 4z + 1 = 0$ . Qual è l'equazione di  $S$ ?

## ***Quesiti: geometria analitica nello spazio***

Determinare l'equazione della superficie sferica, tangente nell'origine di un sistema di assi cartesiani al piano  $\alpha : x + y - z = 0$ , il cui centro appartiene al piano  $\pi : 2x + y + z + 4 = 0$ .

Nello spazio cartesiano Oxyz sono assegnati i punti  $A(2,0,2)$ ,  $B(2,-1,0)$ ,  $C(-2,0,3)$ ,  $D(0,0,3)$ . Verificare che le rette AB e CD sono sghembe e determinare l'equazione del piano  $\alpha$  passante per AB e perpendicolare alla retta CD.

## Quesiti: geometria analitica nel piano

Il prossimo 5 luglio la terra raggiungerà l'afelio, il punto della propria orbita in cui è massima la distanza dal Sole, pari a circa  $1,52 \cdot 10^{11}$  m. Il perielio è invece il punto che si trova alla minima distanza dal Sole, pari a circa  $1,47 \cdot 10^{11}$  m. Determinare, in un opportuno sistema di riferimento, l'equazione che rappresenta la traiettoria della Terra intorno al Sole.

In un sistema di assi cartesiani  $Oxy$ , si consideri l'iperbole equilatera di equazione  $xy = k$ , con  $k$  parametro reale non nullo. Sia  $t$  la retta tangente all'iperbole in un suo punto  $P$ . Detti  $A$  e  $B$  i punti in cui  $t$  interseca gli assi del riferimento, dimostrare che i triangoli  $APQ$  e  $BPO$  sono equivalenti e che la loro area non dipende dalla scelta di  $P$ .

In un sistema di riferimento cartesiano  $Oxy$ , l'equazione  $xy = k$ , con  $k$  parametro reale non nullo, rappresenta un'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti. Si dimostri che le rette tangenti nei suoi vertici sono perpendicolari alle bisettrici dei quadranti del sistema di riferimento considerato.

Determinare i valori del parametro reale  $k$  per cui la curva  $y = e^{2x} - 8e^x + k$  non ha punti nel semipiano  $y < 0$ .

## ***Quesiti: problemi di massimo e minimo***

Si dimostri che, fra tutti i triangoli rettangoli di perimetro assegnato  $p$ , quello isoscele ha la massima area.

Fra tutti i coni aventi area totale uguale ad  $S$ , determinare quello avente volume massimo.

## Quesiti: analisi

Determinare la funzione polinomiale di quarto grado  $y = p(x)$  sapendo che, in un sistema di riferimento cartesiano, il suo grafico verifica le seguenti condizioni:

- è tangente all'asse  $x$  nell'origine;
- passa per il punto  $(1,0)$ ;
- ha un punto stazionario in  $(2, -2)$ .

Determinare il dominio della funzione  $f(x) = \ln\left(\frac{ax-7}{x^2}\right)$ , con  $a$  parametro reale positivo. Successivamente, individuare il valore di  $a$  in corrispondenza del quale risultano soddisfatte le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo  $[1; 7]$  e le coordinate del punto che ne verifica la tesi.

Determinare i valori dei parametri reali  $a$  e  $b$  della funzione  $f(x) = \frac{ax^2+bx+3}{2x^2+5x-1}$  in modo che essa abbia la retta  $y = 2$  come asintoto orizzontale e un punto stazionario per  $x = 1$ . In corrispondenza dei valori trovati, stabilire se  $f(x)$  presenta ulteriori asintoti.

## Quesiti: analisi

Individuare e classificare i punti in cui la funzione  $f(x) = |x - 1| + \sqrt[3]{x^3 + x^2}$  è continua ma non derivabile.

Dopo aver determinato il dominio della funzione  $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{2 - x}$ , scrivere le equazioni di tutti i suoi asintoti.

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x[\ln(x + 1) - \ln x].$$

Sono date  $f(x) = \frac{x-3}{x-1}$  e  $g(x) = \frac{x+1}{1-x}$ . Calcola  $f'(x)$  e  $g'(x)$ . Confronta e commenta il risultato ottenuto.

Dimostrare che l'equazione  $x^3 + x - \cos x = 0$  ammette un'unica soluzione positiva.

## Quesiti: analisi

Si consideri la funzione integrale  $F(x) = \int_a^x \frac{\cos(\frac{1}{t})}{t^2} dt$ , con  $x \geq a$ , in cui  $a$  indica un parametro reale positivo. Determinare il più grande valore di  $a$  in modo che  $F\left(\frac{2}{\pi}\right) = -\frac{1}{2}$ .

Determinare l'equazione di una funzione polinomiale di primo grado  $y = f(x)$  tale che

$$i) \int_0^1 f(x) dx = 1;$$

$$ii) \int_1^2 f(x) dx = 2.$$

Tra tutte le curve di equazione  $f_a(x) = ax^2 - 2ax - 3a$ , con  $a$  parametro reale non nullo, determinare il valore di  $a$  affinché l'area racchiusa tra la funzione e l'asse delle ascisse valga  $\frac{16}{3}$ .

## Quesiti: dalla storia e dalla realtà

Scrivi Leonardo Sinisgalli, in un brano tratto da *Furor Mathematicus*: «Avevo in mente un capitolo sulle leggi del caso: volevo trovare le parentele tra il triangolo di Tartaglia, relativo ai coefficienti del polinomio  $(a + b)^n$  e il triangolo aritmetico di Pascal, che ci dà la probabilità di fare  $m$  volte croce in  $n$  partite giuocate a testa e croce».

Descrivere il legame esistente tra i coefficienti binomiali ed il calcolo delle probabilità.

Scrivi Paolo Giordano ne *La solitudine dei numeri primi*: «I numeri primi sono divisibili soltanto per 1 e per sé stessi. Se ne stanno al loro posto nell'infinita serie dei numeri naturali, schiacciati come tutti fra due, ma un passo in là rispetto agli altri».

Si considerino la funzione  $f(x) = x^p$  e la sua derivata  $(p - 1)$ -esima  $f^{p-1}$ . Si può dimostrare che, se  $p$  è un numero primo, allora  $p$  divide  $f^{p-1} + 1$ . Verificare la correttezza di tale affermazione per tutti i numeri primi minori di 10.

## Quesiti: dalla storia e dalla realtà

Nel canto 28 del Paradiso di Dante si legge «l'incendio suo seguiva ogni scintilla ed erano tante, che 'l numero loro più che il doppiar de li scacchi s'inmilla». In questi versi, il poeta fa riferimento a un fenomeno di crescita descritto dalla funzione  $f(x) = a^x$ . Per quali valori di  $a$  la funzione è definita e continua su  $\mathbb{R}$ ? Esistono valori di  $a$  in corrispondenza dei quali  $f$  non è invertibile? Motivare la risposta.

Un resistore di resistenza  $R$  è percorso da una corrente variabile nel tempo di intensità  $I(t) = I_0 \frac{a}{t}$ , con  $t > 0$  e le costanti positive  $I_0$  e  $a$  espresse, rispettivamente, in ampère e in secondi. Sapendo che la potenza dissipata nel resistore per effetto Joule è  $P(t) = RI^2(t)$ , determinarne il valor medio nell'intervallo  $[2a; 3a]$ .

Il Gallio-67, radionuclide utilizzato nella diagnostica medica, ha una percentuale di decadimento pari a 1,48% all'ora. Il modello matematico che descrive il fenomeno ha la forma  $g(t) = g_0 e^{-kt}$ , con  $k > 0$  e il tempo  $t \geq 0$  espresso in ore. Determinare la costante  $k$ . Se nell'istante iniziale la massa  $g_0$  risulta di 100 mg, quanti milligrammi di sostanza saranno presenti dopo un giorno?

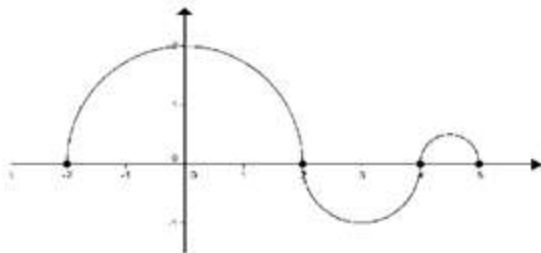
### **③ Un po' di storia**

# *I primi grafici*

## PROVA ORDINARIA - PNI 2010

### PROBLEMA 1

Nella figura che segue è riportato il grafico di  $g(x)$  per  $-2 \leq x \leq 5$  essendo  $g$  la derivata di una funzione  $f$ . Il grafico consiste di tre semicirconferenze con centri in  $(0, 0)$ ,  $(3, 0)$ ,  $(\frac{9}{2}, 0)$  e raggi rispettivi  $2, 1, \frac{1}{2}$ .



- a) Si scriva un'espressione analitica di  $g(x)$ . Vi sono punti in cui  $g(x)$  non è derivabile? Se sì, quali sono? E perchè?
- b) Per quali valori di  $x$ ,  $-2 < x < 5$ , la funzione  $f$  presenta un massimo o un minimo relativo? Si illustri il ragionamento seguito.
- c) Se  $f(x) = \int_{-2}^x g(t) dt$ , si determini  $f(4)$  e  $f(1)$ .
- d) Si determinino i punti in cui la funzione  $f$  ha derivata seconda nulla. Cosa si può dire sul segno di  $f(x)$ ? Qual è l'andamento qualitativo di  $f(x)$ ?

# ***I primi grafici***

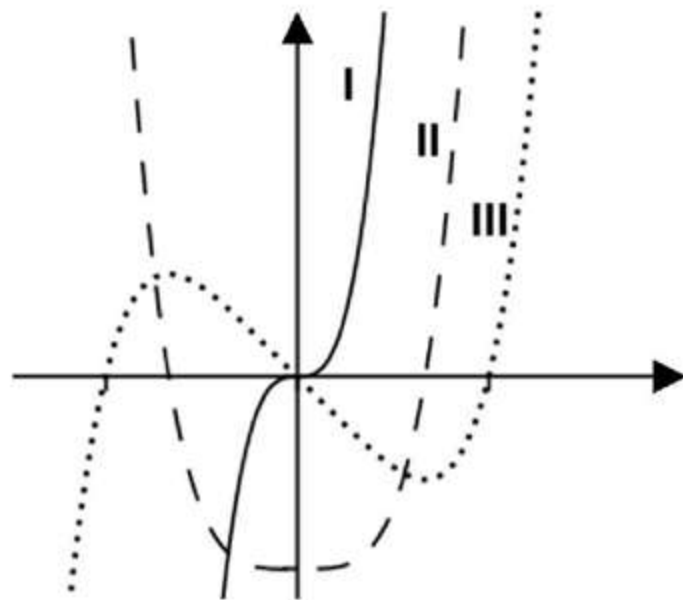
## **PROVA ORDINARIA 2011**

Nella figura a lato, denotati con I, II e III, sono disegnati tre grafici. Uno di essi è il grafico di una funzione  $f$ , un altro lo è della funzione derivata  $f'$  e l'altro ancora di  $f''$ .

Quale delle seguenti alternative identifica correttamente ciascuno dei tre grafici?

|    | $f$ | $f'$ | $f''$ |
|----|-----|------|-------|
| A) | I   | II   | III   |
| B) | I   | III  | II    |
| C) | II  | III  | I     |
| D) | III | II   | I     |
| E) | III | I    | II    |

Si motivi la risposta.

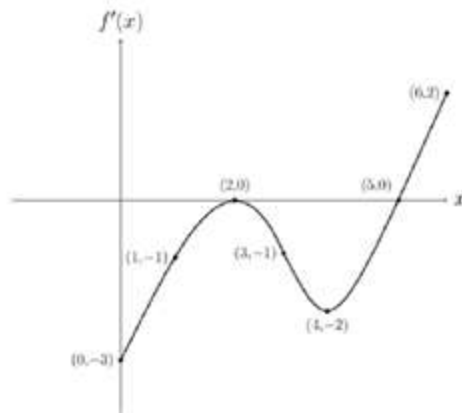


# I primi grafici

## PROVA ORDINARIA - PNI 2011

### PROBLEMA 1

Della funzione  $f$ , definita per  $0 \leq x \leq 6$ , si sa che è dotata di derivata prima e seconda e che il grafico della sua derivata  $f'(x)$ , disegnato a lato, presenta due tangenti orizzontali per  $x = 2$  e  $x = 4$ . Si sa anche che  $f(0) = 9$ ,  $f(3) = 6$  e  $f(5) = 3$ .



1. Si trovino le ascisse dei punti di flesso di  $f$  motivando le risposte in modo esauriente.
2. Per quale valore di  $x$  la funzione  $f$  presenta il suo minimo assoluto? Sapendo che  $\int_0^6 f'(t) dt = -5$  per quale valore di  $x$  la funzione  $f$  presenta il suo massimo assoluto?
3. Sulla base delle informazioni note, quale andamento potrebbe avere il grafico di  $f$ ?
4. Sia  $g$  la funzione definita da  $g(x) = x f(x)$ . Si trovino le equazioni delle rette tangenti ai grafici di  $f$  e di  $g$  nei rispettivi punti di ascissa  $x = 3$  e si determini la misura, in gradi e primi sessagesimali, dell'angolo acuto che esse formano.

# La modellizzazione

## PROVA ORDINARIA 2015

### PROBLEMA 1

Il piano tariffario proposto da un operatore telefonico prevede, per le telefonate all'estero, un canone fisso di 10 euro al mese, più 10 centesimi per ogni minuto di conversazione. Indicando con  $x$  i minuti di conversazione effettuati in un mese, con  $f(x)$  la spesa totale nel mese e con  $g(x)$  il costo medio al minuto;

1. individua l'espressione analitica delle funzioni  $f(x)$  e  $g(x)$  e rappresentale graficamente; verifica che la funzione  $g(x)$  non ha massimi né minimi relativi e dai la tua interpretazione dell'andamento delle due funzioni alla luce della situazione concreta che esse rappresentano.
2. Detto  $x_0$  il numero di minuti di conversazione già effettuati nel mese corrente, determina  $x_1$  tale che:

$$g(x_1) = \frac{g(x_0)}{2}$$

Traccia il grafico della funzione che esprime  $x_1$  in funzione di  $x_0$  e discuti il suo andamento. Che significato ha il suo asintoto verticale?

Sul suo sito web l'operatore telefonico ha pubblicato una mappa che rappresenta la copertura del segnale telefonico nella zona di tuo interesse:



Figura 1

# La modellizzazione

## PROVA ORDINARIA 2017

### PROBLEMA 1

Si può pedalare agevolmente su una bicicletta a ruote quadrate? A New York, al MoMath-Museum of Mathematics si può fare, in uno dei padiglioni dedicati al divertimento matematico (figura 1). È però necessario che il profilo della pedana su cui il lato della ruota può scorrere soddisfi alcuni requisiti.

In figura 2 è riportata una rappresentazione della situazione nel piano cartesiano  $Oxy$ : il quadrato di lato  $DE = 2$  (in opportune unità di misura) e di centro  $C$  rappresenta la ruota della bicicletta, il grafico della funzione  $f(x)$  rappresenta il profilo della pedana.



Figura 1

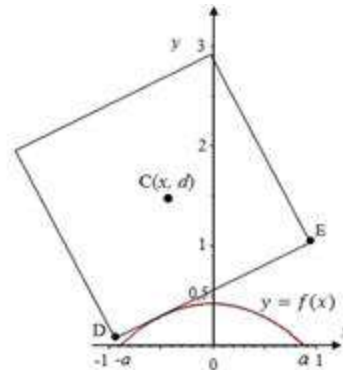


Figura 2

# La modellizzazione

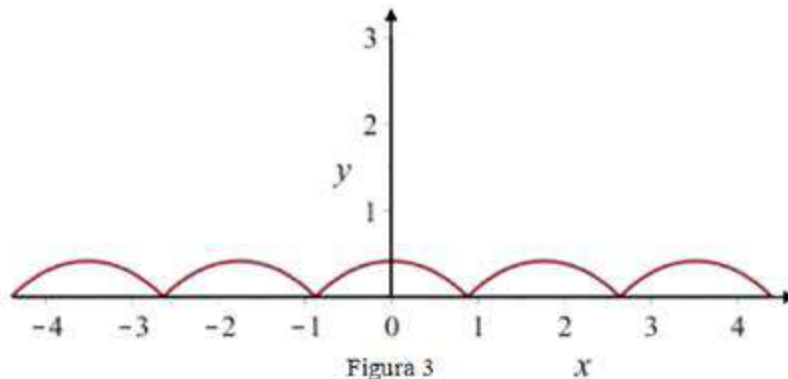
## PROVA ORDINARIA 2017

- 1) Sulla base delle informazioni ricavabili dal grafico in figura 2, mostra, con le opportune argomentazioni, che la funzione:

$$f(x) = \sqrt{2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad x \in \mathbb{R}$$

rappresenta adeguatamente il profilo della pedana per  $x \in [-a; a]$ ; determina inoltre il valore degli estremi  $a$  e  $-a$  dell'intervallo.

Per visualizzare il profilo completo della pedana sulla quale la bicicletta potrà muoversi, si affiancano varie copie del grafico della funzione  $f(x)$  relativo all'intervallo  $[-a; a]$ , come mostrato in figura 3.



# La modellizzazione

## PROVA ORDINARIA 2017

- 2) Perché la bicicletta possa procedere agevolmente sulla pedana è necessario che:
- a sinistra e a destra dei punti di non derivabilità i tratti del grafico siano ortogonali;
  - la lunghezza del lato della ruota quadrata risulti pari alla lunghezza di una “gobba”, cioè dell’arco di curva di equazione  $y = f(x)$  per  $x \in [-a; a]$ .

Stabilisci se tali condizioni sono verificate.<sup>1</sup>

- 3) Considerando la similitudine dei triangoli rettangoli  $ACL$  e  $ALM$  in figura 4, e ricordando il significato geometrico della derivata, verifica che il valore dell’ordinata  $d$  del centro della ruota si mantiene costante durante il moto. Pertanto, al ciclista sembra di muoversi su una superficie piana.

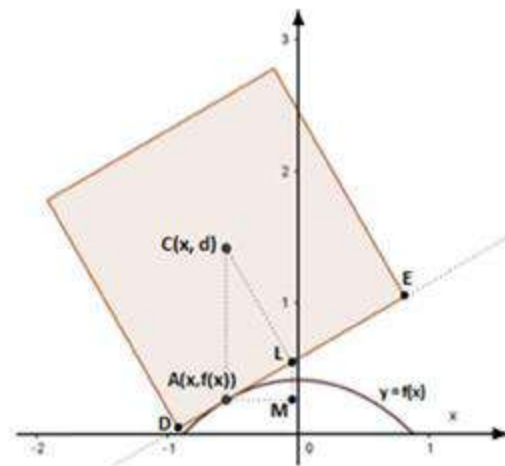


Figura 4

# **La modellizzazione**

## **PROVA ORDINARIA 2017**

Anche il grafico della funzione:

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \text{per } x \in \left[-\frac{\ln(3)}{2}; \frac{\ln(3)}{2}\right]$$

se replicato varie volte, può rappresentare il profilo di una pedana adatta a essere percorsa da una bicicletta con ruote molto particolari, aventi la forma di un poligono regolare.

4) Individua tale poligono regolare, motivando la risposta.

# ***I problemi di matematica e fisica***

## **PROVA ORDINARIA 2019**

### **PROBLEMA 1**

Si considerino le seguenti funzioni:

$$f(x) = ax^2 - x + b$$

$$g(x) = (ax + b) e^{2x - x^2}.$$

- Provare che, comunque siano scelti i valori di  $a$  e  $b$  in  $\mathbb{R}$  con  $a \neq 0$ , la funzione  $g$  ammette un massimo e un minimo assoluti. Determinare i valori di  $a$  e  $b$  in corrispondenza dei quali i grafici delle due funzioni  $f$  e  $g$  si intersecano nel punto  $A(2, 1)$ .
- Si assuma, d'ora in avanti, di avere  $a = 1$  e  $b = -1$ . Studiare le due funzioni così ottenute, verificando che il grafico di  $g$  ammette un centro di simmetria e che i grafici di  $f$  e  $g$  sono tangenti nel punto  $B(0, -1)$ . Determinare inoltre l'area della regione piana  $S$  delimitata dai grafici delle funzioni  $f$  e  $g$ .

# I problemi di matematica e fisica

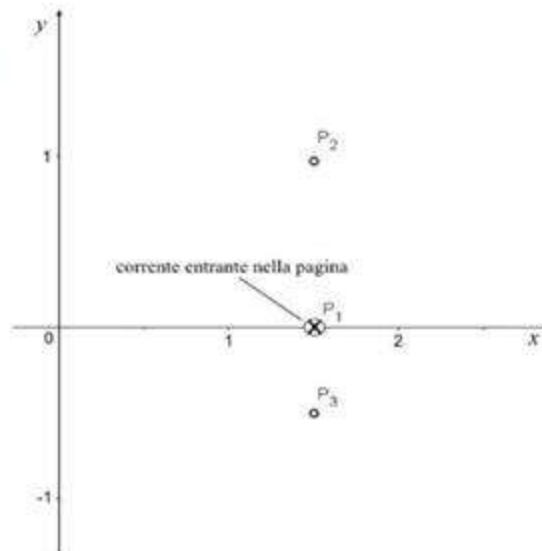
## PROVA ORDINARIA 2019

- Si supponga che nel riferimento  $Oxy$  le lunghezze siano espresse in metri (m). Si considerino tre fili conduttori rettilinei disposti perpendicolarmente al piano  $Oxy$  e passanti rispettivamente per i punti:

$$P_1\left(\frac{3}{2}, 0\right), P_2\left(\frac{3}{2}, 1\right) \text{ e } P_3\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

I tre fili sono percorsi da correnti continue di intensità  $i_1 = 2,0 \text{ A}$ ,  $i_2$  e  $i_3$ . Il verso di  $i_1$  è indicato in figura mentre gli altri due versi non sono indicati.

Stabilire come varia la circuitazione del campo magnetico, generato dalle correnti  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_3$ , lungo il contorno di  $S$ , a seconda dell'intensità e del verso di  $i_2$  e  $i_3$ .



- Si supponga, in assenza dei tre fili, che il contorno della regione  $S$  rappresenti il profilo di una spira conduttrice di resistenza  $R = 0,20 \Omega$ . La spira è posta all'interno di un campo magnetico uniforme di intensità  $B = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ T}$  perpendicolare alla regione  $S$ . Facendo ruotare la spira intorno all'asse  $x$  con velocità angolare  $\omega$  costante, in essa si genera una corrente indotta la cui intensità massima è pari a  $5,0 \text{ mA}$ . Determinare il valore di  $\omega$ .

# I problemi di matematica e fisica

## PROVA ORDINARIA 2019

### PROBLEMA 2

Un condensatore piano è formato da due armature circolari di raggio  $R$ , poste a distanza  $d$ , dove  $R$  e  $d$  sono espresse in metri (m). Viene applicata alle armature una differenza di potenziale variabile nel tempo e inizialmente nulla.



All'interno del condensatore si rileva la presenza di un campo magnetico  $\vec{B}$ . Trascurando gli effetti di bordo, a distanza  $r$  dall'asse di simmetria del condensatore, l'intensità di  $\vec{B}$ , espressa in tesla (T), varia secondo la legge:

$$|\vec{B}| = \frac{kt}{\sqrt{(1^2 + a^2)^3}} r \quad \text{con } r \leq R$$

dove  $a$  e  $k$  sono costanti positive e  $t$  è il tempo trascorso dall'istante iniziale, espresso in secondi (s).

- Dopo aver determinato le unità di misura di  $a$  e  $k$ , spiegare perché nel condensatore è presente un campo magnetico anche in assenza di magneti e correnti di conduzione. Qual è la relazione tra le direzioni di  $\vec{B}$  e del campo elettrico  $\vec{E}$  nei punti interni al condensatore?
- Si consideri, tra le armature, un piano perpendicolare all'asse di simmetria. Su tale piano, sia  $C$  la circonferenza avente centro sull'asse e raggio  $r$ . Determinare la circuizione di  $\vec{B}$  lungo  $C$  e da essa ricavare che il flusso di  $\vec{E}$ , attraverso la superficie circolare delimitata da  $C$ , è dato da

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{2k\pi r^2}{\mu_0 \epsilon_0} \left( \frac{-1}{\sqrt{1^2 + a^2}} + \frac{1}{a} \right)$$

Calcolare la d.d.p. tra le armature del condensatore.

A quale valore tende  $|\vec{B}|$  al trascorrere del tempo? Giustificare la risposta dal punto di vista fisico.

# ***I problemi di matematica e fisica***

## **PROVA ORDINARIA 2019**

- Per  $a > 0$ , si consideri la funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(t) = -\frac{t}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}$ . Verificare che la funzione  $F(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}} - \frac{1}{a}$  è la primitiva di  $f$  il cui grafico passa per l'origine. Studiare la funzione  $F$ , individuandone eventuali simmetrie, asintoti, estremi. Provare che  $F$  presenta due flessi nei punti di ascisse  $t = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}a$  e determinare le pendenze delle rette tangenti al grafico di  $F$  in tali punti.
- Con le opportune motivazioni, dedurre il grafico di  $f$  da quello di  $F$ , specificando cosa rappresentano le ascisse dei punti di flesso di  $F$  per la funzione  $f$ . Calcolare l'area della regione compresa tra il grafico di  $f$ , l'asse delle ascisse e le rette parallele all'asse delle ordinate passanti per gli estremi della funzione. Fissato  $b > 0$ , calcolare il valore di  $\int_{-b}^b f(t) dt$ .

## **④ Le nostre idee per la prova scritta di matematica**

## ***Quali le scelte operate, che ci hanno guidato nella stesura delle simulazioni?***

- Problemi articolati in punti tra loro indipendenti
- Tipologia dei problemi: tradizionali, nella maggioranza dei casi basati sull'analisi di un grafico o sullo studio di una famiglia di funzioni con parametri da determinare
- Modellizzazione: non è più presente nei problemi, talvolta è proposta in qualche quesito
- Argomenti privilegiati: quelli del quinto anno; per rispettare la normativa sono stati evitati collegamenti con la Fisica e argomenti non previsti dal quadro di riferimento (equazioni differenziali, analisi numerica)
- Particolare attenzione a richieste di tipo argomentativo (verifiche, dimostrazioni)
- Uso della calcolatrice grafica : opzionale

# Simulazione 1

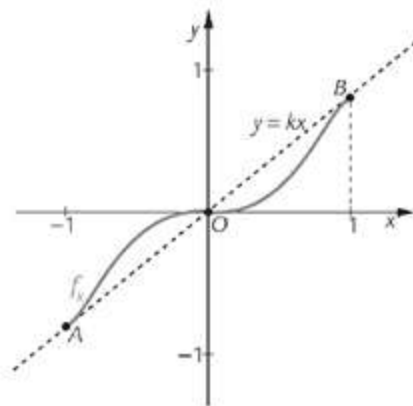
## Problema 1

### Problema 1

La **Fig. 1** mostra il grafico della funzione  $y = f_k(x)$ , dipendente dal parametro  $k$ , con  $k > 0$ , continua e derivabile due volte sull'intervallo  $[-1, 1]$ .

Il grafico della funzione  $f_k$ :

- è simmetrico rispetto all'origine del sistema di riferimento  $Oxy$ ;
- è tangente alla retta  $y = kx$ , nei suoi punti  $A$  e  $B$  di ascissa  $-1$  e  $+1$  rispettivamente;
- ha un punto di flesso a tangente orizzontale in  $x = 0$ .



**Fig.1**

# Simulazione 1

## Problema 1

- 1 Individua, al variare di  $k$ , il dominio e l'insieme immagine della funzione  $g_k(x) = f_k \circ f_k(x)$ .
- 2 Dimostra che anche il grafico di  $g_k$  è simmetrico rispetto all'origine e ha un punto di flesso a tangente orizzontale nell'origine, per ogni  $k > 0$ .
- 3 Individua l'insieme delle soluzioni della disequazione  $g_k(x) < f_k(x)$  e traccia i grafici probabili di  $g_k$ , al variare di  $k > 0$ .

Poni  $k = 1$  e supponi che la funzione  $f_1(x)$  sia un polinomio di quinto grado.

- 4 Individua l'espressione analitica della funzione  $f_1$  e studiala in tutto il suo dominio.  
Calcola l'integrale  $\int_0^1 g_1(x)f_1'(x)dx$  e spiega qual è il suo significato geometrico.

# Simulazione 1

## Problema 2

### Problema 2

La Fig.2 mostra la curva  $\gamma$ , grafico della funzione  $y = f(x)$ , la semiretta  $t_1$ , tangente destra a  $\gamma$  in  $x = 0$ , i punti  $M_1$  e  $F_1$ , rispettivamente il massimo e il flesso di  $\gamma$  contenuti nel primo quadrante. È noto che  $f$  è una funzione continua in  $\mathbf{R}$ , pari, derivabile due volte per  $x \neq 0$  e che  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = e$ .

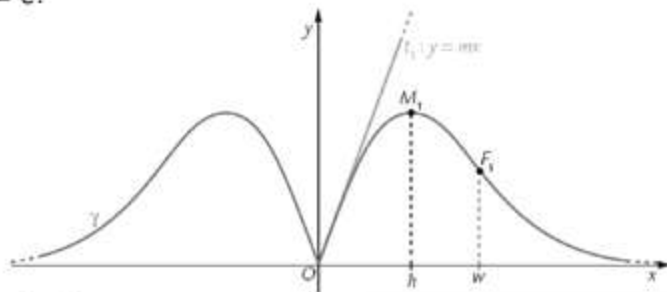


Fig.2

**1** Traccia i grafici probabili delle funzioni  $y = g(x)$ , funzione derivata prima di  $f$ , e di  $y = F(x)$ , funzione integrale di  $f$  relativa al punto  $x = 0$ .

Supponi d'ora in avanti che l'espressione analitica della funzione  $f$  sia  $f(x) = |x| e^{1-x^2}$ .

**2** Studia la funzione  $f$  fino alla derivata seconda, verificando che le caratteristiche di  $\gamma$  corrispondono ai risultati ottenuti dallo studio. Individua i punti di massimo e i punti di flesso di  $\gamma$  e determina l'ampiezza dell'angolo acuto  $\alpha$  formato dalle rette tangenti a  $\gamma$  nel suo punto angoloso. Esprimi  $\alpha$  in gradi, primi e secondi.

# Simulazione 1

## Problema 2

- 3** Dimostra analiticamente che qualsiasi omotetia di centro  $O$  e rapporto  $k$  applicata alla curva  $\gamma$ , lascia invariata l'ampiezza dell'angolo  $\alpha$ . Individua le dilatazioni verticali e le dilatazioni orizzontali, con centro nell'origine, che trasformano  $\gamma$  in modo che le rette tangenti destra e sinistra nel suo punto angoloso risultino perpendicolari. Considera una dilatazione qualsiasi con centro nell'origine e stabilisci quale deve essere il rapporto tra il coefficiente di dilatazione orizzontale e il coefficiente di dilatazione verticale affinché la curva trasformata di  $\gamma$  abbia nel suo punto angoloso rette tangenti destra e sinistra perpendicolari.
- 4** Determina l'area del triangolo mistilineo, contenuto nel primo quadrante, delimitato da  $\gamma$ , dall'asse  $y$  e dalla retta tangente a  $\gamma$  nel suo punto di flesso di ascissa positiva.

# Simulazione 1

## Quesiti

**1** È data la funzione  $f(x) = \frac{ax^3 + bx}{x^2 + x + c}$ .

Determina il valore dei parametri reali  $a$ ,  $b$  e  $c$  per i quali la funzione soddisfa tutte le seguenti condizioni:

- il suo dominio è  $\mathbf{R}$ ;
- ha un asintoto obliquo di equazione  $y=2x-2$ ;
- ha un punto stazionario in  $x=0$ ;
- la retta tangente al grafico di  $f$  nel suo punto di ascissa  $x=1$  è parallela alla retta  $y = \frac{9}{8}x$ .

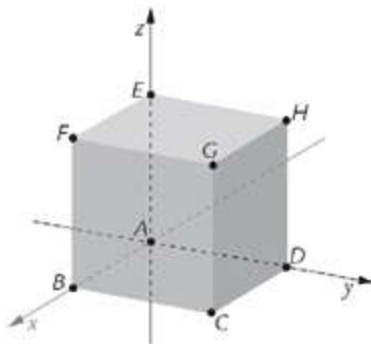
**2** Si lancia 10 volte un dado truccato. È noto che la probabilità che in un singolo lancio esca il numero 6 è  $p_6$  e che gli altri esiti sono equiprobabili. Sapendo che in 10 lanci il numero medio di volte che esce il numero 1 o il numero 6 è 6, determina il valore di  $p_6$ . Successivamente calcola:

- la probabilità che il numero 1 o il numero 6 escano 4 volte;
- la probabilità che il numero 1 o il numero 6 escano almeno 2 volte.

# Simulazione 1

## Quesiti

- 3** Lo spigolo del cubo nella **Fig.3** misura 2. Considera il punto  $M$  di  $AB$  tale che  $\overline{AM} = k\overline{AB}$ , il punto  $N$  di  $AD$  tale che  $\overline{AN} = k\overline{AD}$  e il punto  $P$  di  $GB$  tale che  $\overline{GP} = k\overline{GB}$ , con  $0 \leq k \leq 1$ . Spiega perché i punti  $M, N, P$  e  $H$  sono i vertici di un tetraedro se e solo se  $0 < k < 1$  e determina il valore di  $k$  per cui il volume del tetraedro è massimo.



**Fig.3**

- 4** Stabilisci per quali valori del parametro reale  $a$  l'equazione  $e^x = \sqrt{ax}$  ammette un'unica soluzione.

# Simulazione 1

## Quesiti

**5** È data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{2}{3}x^2} \cdot e^{\frac{2}{3}-x} & x \leq \frac{2}{3} \\ -x^2 + ax + b & x > \frac{2}{3} \end{cases}, \text{ con } a \text{ e } b \text{ parametri reali.}$$

- a.** Individua per quali valori di  $a$  e  $b$  la funzione  $f$  è derivabile in  $x = \frac{2}{3}$ , quindi classifica i punti di non derivabilità di  $f$ .
- b.** Posto  $a = \frac{4}{3}$  e  $b = \frac{2}{9}$ , verifica se la funzione  $f$  soddisfa le ipotesi del Teorema di Lagrange sull'intervallo  $[0, 2]$  e, in tal caso, individua il punto  $c$  di cui il teorema garantisce l'esistenza.

**6** Considera una funzione  $f$ , continua in  $\mathbf{R}$  e tale che  $f(2) = 4$  e  $f(-2) = -\frac{1}{3}$ . Calcola:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_2^{2x} f(t) dt}{\int_{2-4x}^{-1-x} f(t) dt}$$

# Simulazione 1

## Quesiti

- 7** Supponi che il prezzo di un bene sia  $x$  e che la domanda del bene (cioè la quantità richiesta dal mercato) sia espressa, in dipendenza dal prezzo, dalla funzione  $f(x)$ ; in economia si definisce *elasticità della domanda* la funzione:

$$E(x) = x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}$$

La funzione  $E(x)$  esprime approssimativamente di quanto varia, in percentuale, la domanda, in corrispondenza di un aumento dell'1% del prezzo  $x$ .

Considera la seguente funzione  $f$ , che descrive la domanda mensile di un certo modello di condizionatori d'aria:

$$f(x) = (4x + 12)e^{-x} \text{ per } x \geq 1$$

In essa, il prezzo  $x$  è in migliaia di euro ed è espresso senza unità di misura (ossia, se per esempio il condizionatore costa 2000 €, allora  $x = 2$ ).

- a.** Calcola il limite di  $f(x)$  per  $x$  che tende a  $+\infty$  e spiega perché il risultato è coerente con il fatto che  $f(x)$  descrive la domanda di un bene.
- b.** Si dice che la domanda è rigida se l'*elasticità della domanda* è compresa tra  $-1$  e  $0$ . Per quali prezzi la domanda di condizionatori è rigida?

- 8** Considera la funzione  $f(x) = \int_1^x t^2 e^{-t} dt$ . Determina l'equazione della retta tangente al grafico di  $f$  nel suo punto di ascissa  $-1$ .

# Simulazione 2

## Problema 1

### PROBLEMA 1

È data una funzione del tipo:

$$f(x) = k + \frac{ax + b}{e^x}$$

con  $a, b, k$  parametri reali.

- 1** Determina i valori dei parametri in modo che la retta tangente al grafico nel punto di ascissa nulla abbia equazione  $y = 3x$  e che si abbia:

$$\int_0^1 f(x) dx = 2 - \frac{3}{e}$$

- 2** Verificato che la funzione cercata al punto **1** è  $f(x) = 1 + \frac{2x-1}{e^x}$ , studiane zeri e segno, anche con considerazioni grafiche, e stabilisci se ha:

- asintoti, di cui sono richieste le equazioni;
- punti di massimo o minimo relativi o assoluti, di cui sono richieste le coordinate;
- punti di flesso, di cui sono richieste le coordinate.

Utilizza poi i risultati trovati per rappresentare la funzione sul piano cartesiano.

- 3** Determina l'espressione analitica della funzione:

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

e ripeti per questa funzione lo studio effettuato al punto **2**, tenendo conto dei risultati già trovati.

- 4** Trova almeno due modi per dimostrare che esiste ed è unico il punto  $x_0 \in (0, 1)$  per cui si ha  $F(x_0) = 2 - \frac{3}{e}$

# Simulazione 2

## Problema 2

### PROBLEMA 2

In Fig. 1 sono rappresentate due curve,  $\gamma$  e  $\lambda$ , grafici di una funzione  $f(x)$  e della sua funzione derivata prima  $g(x)$ . La retta  $t$  è la tangente a  $\gamma$  in  $T$ .

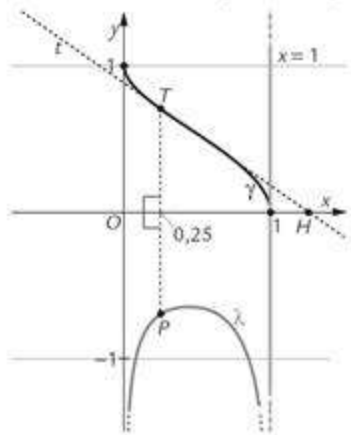


Fig. 1

1 Associa a ciascuna curva la funzione corrispondente, motivando la tua scelta.

Supponendo poi che sia  $g(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{1-\sqrt{x}}}$ , determina l'espressione analitica di  $f(x)$ , verifica che  $f(0,25) = -g(0,25)$  e calcola l'area del triangolo  $OTH$ , dopo aver trovato l'equazione della retta tangente  $t$ .

## Simulazione 2

### Problema 2

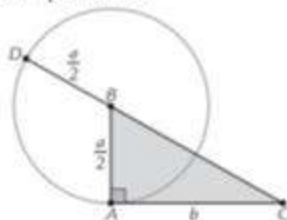
- 2** Verificato che si ha  $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{x}}$ , studia in modo completo la funzione, con particolare riferimento alla presenza di punti di non derivabilità e di punti di flesso, di cui sono richieste le coordinate.
- 3** Traccia i grafici delle funzioni  $p(x) = f(|x|)$  e  $q(x) = -f(|x|)$  e classifica i loro punti di non derivabilità.  
Trova un'espressione analitica per rappresentare la curva costituita dall'unione dei due grafici e la regione piana  $\Omega$  fra essi compresa. Calcola l'area di tale regione di piano.
- 4** Posto  $f_k(x) = \sqrt{k^2 - \sqrt{k^3 x}}$ , con  $k > 0$ , individua una trasformazione piana che muti il grafico di  $f(x)$  in quello della generica funzione  $f_k(x)$  e deduci come variano i grafici delle funzioni  $f_k(x)$  al variare di  $k$ . Quanto vale l'area della regione piana  $\Omega_k$ , corrispondente di  $\Omega$  nella trasformazione individuata?

# Simulazione 2

## Quesiti

- 1** Cartesio ideò un metodo geometrico per risolvere un certo tipo di equazioni di secondo grado. Considera l'equazione scritta nella forma  $x^2 = ax + b^2$  dove  $a$  e  $b$  sono quantità positive note.

Osserva la costruzione in **Fig. 2**: a partire dal triangolo rettangolo  $ABC$ , con cateti di misura  $b$  e  $\frac{a}{2}$ , si è tracciata la circonferenza di centro  $B$  e raggio  $AB$  e si è prolungata l'ipotenusa  $BC$ , determinando il punto  $D$ .



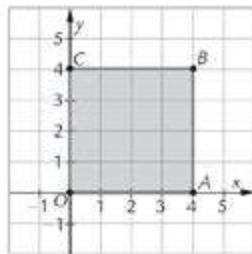
**Fig. 2**

- a. Dimostra che la lunghezza del segmento  $CD$  è una soluzione dell'equazione  $x^2 = ax + b^2$ .
- b. Determina la soluzione positiva dell'equazione con considerazioni geometriche e confronta il risultato ottenuto con quello che otterresti applicando la formula risolutiva per le equazioni di secondo grado.
- 2** La tua classe è composta da 25 studentesse e studenti. Calcola la probabilità che almeno una delle tue compagne o dei tuoi compagni sia nato nel tuo stesso giorno dell'anno. Supponi che in un anno ci siano 365 giorni.

# Simulazione 2

## Quesiti

- 3** Il quadrato in **Fig. 3** è la base di una piramide retta di altezza 4, che ha il vertice nel semispazio  $z > 0$ .



**Fig. 3**

Determina:

- a. le equazioni dei piani che contengono le facce laterali e le equazioni in forma parametrica delle rette che contengono gli spigoli laterali della piramide;
  - b. l'equazione, il centro e il raggio della superficie sferica circoscritta alla piramide.
- 4** Considera la funzione  $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$  e disegna il suo grafico: qual è la natura del punto  $x = 0$ ?
- a. Spiega perché la funzione soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo  $[-\pi, 1]$  e verifica, analiticamente e graficamente, che esistono tre punti di cui il teorema assicura l'esistenza.
  - b. Spiega perché la funzione soddisfa le ipotesi del teorema della media integrale nell'intervallo  $[-\pi, 1]$  e verifica che esiste un unico punto di cui il teorema assicura l'esistenza.

# Simulazione 2

## Quesiti

5 Facendo riferimento alla Fig. 4

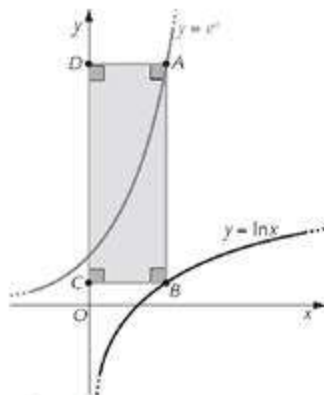


Fig. 4

stabilisci se, fra tutti i rettangoli del tipo  $ABCD$ , ne esiste uno di perimetro minimo o massimo, motivando la tua risposta.

6 È data una funzione  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  continua nell'intervallo  $[0, 1]$  e tale che  $f(0) = 10$ . Calcola il seguente limite:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} k \int_{\frac{1}{k^2}}^{\frac{1}{k}} f(x) dx$$

## Simulazione 2

### Quesiti

**7** Determina i valori di  $a \in \mathbf{R}$  affinché si abbia:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{ax - \sqrt{16x^2 - 3}} = 4$ .

- 8** Una torre ha altezza  $h$  e, da una distanza  $d$  variabile dal suo piede, la sua cima viene vista sotto un angolo di elevazione di ampiezza  $x$ . Supponi che uno strumento di misura dell'angolo sia montato su un carrello, di altezza trascurabile, che si muove di moto armonico, partendo dal piede della torre, con legge oraria  $d(t) = D \sin \omega t$ , essendo  $D$  l'ampiezza del moto e  $\omega$  la sua pulsazione.
- a.** Scrivi l'espressione della funzione  $x = x(t)$ , che descrive l'andamento dell'angolo  $x$  misurato dallo strumento al passare del tempo.
  - b.** Determina la velocità di variazione di  $x$  negli istanti  $t_1 = 0, t_2 = \frac{T}{4}, t_3 = \frac{T}{2}, t_4 = \frac{3}{4}T$ , essendo  $T$  il periodo della funzione  $d(t)$ .

# Esempio di griglia

| Indicatori                                                                                                                                                                          | Livelli | Descrittori                                                                                                                                                                                                                                                                                       | Punti | Evidenze                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                              |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                                                                                                     |         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |       | Problema 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | Problema 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | Quesiti                                                                                                                                                                                                                                      |
| Comprendere<br>Analizzare la situazione problematica, identificare i dati ed interpretarli. Effettuare gli eventuali collegamenti e adoperare i codici grafico-simbolici necessari. | L1      | Esamina la situazione proposta in modo superficiale o frammentario. Formula ipotesi esplicative non adeguate. Non riconosce modelli, analogie o leggi.                                                                                                                                            | 1     | <input type="checkbox"/> Comprende le richieste del problema.<br><input type="checkbox"/> Interpreta le situazioni presentate nelle figure.<br><input type="checkbox"/> Individua la regione finita di piano di cui calcolare l'area.<br><input type="checkbox"/> Utilizza il linguaggio simbolico.                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | <input type="checkbox"/> Comprende le richieste del problema.<br><input type="checkbox"/> Interpreta il grafico dato nel testo.<br><input type="checkbox"/> Individua la regione di piano illimitata.<br><input type="checkbox"/> Individua la regione limitata di piano di cui calcolare l'area.<br><input type="checkbox"/> Utilizza il linguaggio simbolico.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | <input type="checkbox"/> 1<br><input type="checkbox"/> 2<br><input type="checkbox"/> 3<br><input type="checkbox"/> 4<br><input type="checkbox"/> 5<br><input type="checkbox"/> 6<br><input type="checkbox"/> 7<br><input type="checkbox"/> 8 |
|                                                                                                                                                                                     | L2      | Esamina la situazione proposta in modo parziale. Formula ipotesi esplicative non del tutto adeguate. Riconosce modelli o analogie o leggi in modo non sempre appropriato.                                                                                                                         | 2     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                              |
|                                                                                                                                                                                     | L3      | Esamina la situazione proposta in modo parziale. Formula ipotesi esplicative complessivamente adeguate.                                                                                                                                                                                           | 3     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                              |
|                                                                                                                                                                                     | L4      | Esamina la situazione proposta in modo quasi completo. Formula ipotesi esplicative complessivamente adeguate. Riconosce modelli o analogie o leggi in modo generalmente appropriato.                                                                                                              | 4     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                              |
|                                                                                                                                                                                     | L5      | Esamina criticamente la situazione proposta in modo completo ed esauriente. Formula ipotesi esplicative adeguate. Riconosce modelli o analogie o leggi in modo appropriato.                                                                                                                       | 5     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                              |
| Individuare<br>Conoscere i concetti matematici utili alla soluzione. Analizzare possibili strategie risolutive ed individuare la strategia più adatta.                              | L1      | Non conosce o conosce solo parzialmente i concetti matematici utili alla soluzione della prova, non è in grado di individuare relazioni tra le variabili in gioco e non riesce a individuare gli strumenti formali opportuni.                                                                     | 1     | <input type="checkbox"/> Conosce il teorema di Archimede.<br><input type="checkbox"/> Conosce la definizione di continuità.<br><input type="checkbox"/> Conosce la definizione di derivabilità.<br><input type="checkbox"/> Conosce la definizione di asintoto.<br><input type="checkbox"/> Conosce la definizione di minimo assoluto.<br><input type="checkbox"/> Individua la strategia per determinare il minimo assoluto.<br><input type="checkbox"/> Individua la strategia per studiare le funzioni $o(k)$ e $o'(k)$ .<br><input type="checkbox"/> Individua la strategia per calcolare l'area. | <input type="checkbox"/> Conosce la definizione di derivata.<br><input type="checkbox"/> Individua la strategia per dimostrare la relazione data.<br><input type="checkbox"/> Individua la strategia per studiare la funzione $f'(x)$ .<br><input type="checkbox"/> Individua la strategia per ricavare il grafico di $f(x)$ .<br><input type="checkbox"/> Individua la strategia per ricavare il grafico di $f''(x)$ .<br><input type="checkbox"/> Conosce il concetto di primitiva.<br><input type="checkbox"/> Conosce la formula per il calcolo della retta tangente al grafico di una funzione in un punto.<br><input type="checkbox"/> Conosce il concetto di integrale improprio.<br><input type="checkbox"/> Individua la strategia per il calcolo dell'area. | <input type="checkbox"/> 1<br><input type="checkbox"/> 2<br><input type="checkbox"/> 3<br><input type="checkbox"/> 4<br><input type="checkbox"/> 5<br><input type="checkbox"/> 6<br><input type="checkbox"/> 7<br><input type="checkbox"/> 8 |
|                                                                                                                                                                                     | L2      | Conosce solo parzialmente i concetti matematici utili alla soluzione della prova o non imposta correttamente il procedimento risolutivo. Individua con difficoltà o errori gli strumenti formali opportuni.                                                                                       | 2     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                              |
|                                                                                                                                                                                     | L3      | Conosce superficialmente i concetti matematici utili alla soluzione della prova e individua le relazioni fondamentali tra le variabili. Non riesce a impostare correttamente tutto il procedimento risolutivo.                                                                                    | 3     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                              |
|                                                                                                                                                                                     | L4      | Conosce i concetti matematici utili alla soluzione della prova e le possibili relazioni tra le variabili, individua gran parte delle strategie risolutive, anche se non sempre le più adeguate ed efficienti.                                                                                     | 4     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                              |
|                                                                                                                                                                                     | L5      | Conosce i concetti matematici utili alla soluzione della prova e tutte le relazioni tra le variabili, che utilizza in modo adeguato. Individua le strategie risolutive, anche se non sempre le più efficienti. Individua gli strumenti di lavoro formali opportuni.                               | 5     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                              |
|                                                                                                                                                                                     | L6      | Conosce e padroneggia i concetti matematici utili alla soluzione della prova, formula congetture, effettua chiari collegamenti logici e utilizza nel modo migliore le relazioni matematiche note. Individua strategie di lavoro adeguate ed efficienti e procedure risolutive anche non standard. | 6     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                              |

# Esempio di griglia

|                                                                                                                                                                                                    |    |                                                                                                                                                                                        |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                              |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Sviluppare il processo risolutivo<br>Risolvere la situazione problematica in maniera coerente, completa e corretta, applicando le regole ed eseguendo i calcoli necessari.                         | L1 | Formalizza le situazioni problematiche in modo inadeguato. Non applica correttamente gli strumenti matematici e disciplinari rilevanti per la soluzione.                               | 1 | <input type="checkbox"/> Determina l'area delle regioni colorate nei tre casi.<br><input type="checkbox"/> Calcola i limiti della funzione $a(k)$<br><input type="checkbox"/> Studia la continuità di $a(k)$<br><input type="checkbox"/> Calcola la derivata $a'(k)$<br><input type="checkbox"/> Calcola i limiti della funzione $a'(k)$ per studiare la derivabilità di $a(k)$ .<br><input type="checkbox"/> Studia il segno di $a'(k)$ per determinare il minimo di $a(k)$ .<br><input type="checkbox"/> Calcola la derivata $a''(k)$ .<br><input type="checkbox"/> Studia la concavità di $a(k)$ .<br><input type="checkbox"/> Studia l'andamento della funzione $a'(k)$ .<br><input type="checkbox"/> Calcola la derivata $a'''(k)$ .<br><input type="checkbox"/> Studia la concavità di $a'(k)$ .<br><input type="checkbox"/> Traccia i grafici delle funzioni.<br><input type="checkbox"/> Calcola l'area. | <input type="checkbox"/> Dimostra la relazione data dal testo.<br><input type="checkbox"/> Calcola dominio, segno e zeri di $f'(x)$ .<br><input type="checkbox"/> Calcola i limiti e gli asintoti di $f'(x)$ .<br><input type="checkbox"/> Calcola le derivate di $f'(x)$ .<br><input type="checkbox"/> Studia l'andamento e la concavità di $f'(x)$ .<br><input type="checkbox"/> Traccia il grafico di $f'(x)$ .<br><input type="checkbox"/> Traccia il grafico di $f(x)$ .<br><input type="checkbox"/> Calcola i limiti di $f''(x)$ .<br><input type="checkbox"/> Calcola $f''(x)$ e ne studia il segno per determinare l'andamento di $f'(x)$ .<br><input type="checkbox"/> Traccia il grafico di $f''(x)$ .<br><input type="checkbox"/> Calcola la derivata della funzione data, per verificare che sia la primitiva richiesta.<br><input type="checkbox"/> Calcola l'equazione della retta tangente.<br><input type="checkbox"/> Imposta l'integrale improprio per dimostrare che l'area non è finita.<br><input type="checkbox"/> Calcola l'intersezione tra i grafici di $f'(x)$ e $g(x)$ per calcolare l'area richiesta.<br><input type="checkbox"/> Calcola l'integrale per determinare l'area richiesta. | <input type="checkbox"/> 1<br><input type="checkbox"/> 2<br><input type="checkbox"/> 3<br><input type="checkbox"/> 4<br><input type="checkbox"/> 5<br><input type="checkbox"/> 6<br><input type="checkbox"/> 7<br><input type="checkbox"/> 8 |
|                                                                                                                                                                                                    | L2 | Formalizza le situazioni problematiche in modo superficiale. Non applica gli strumenti matematici e disciplinari rilevanti per la risoluzione.                                         | 2 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                              |
|                                                                                                                                                                                                    | L3 | Formalizza le situazioni problematiche in modo parziale. Applica gli strumenti matematici e disciplinari rilevanti per la risoluzione in modo non sempre corretto.                     | 3 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                              |
|                                                                                                                                                                                                    | L4 | Formalizza le situazioni problematiche in modo quasi completo. Applica gli strumenti matematici e disciplinari rilevanti per la risoluzione in modo generalmente corretto.             | 4 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                              |
|                                                                                                                                                                                                    | L5 | Formalizza le situazioni problematiche in modo completo ed esauriente. Applica gli strumenti matematici e disciplinari rilevanti per la risoluzione in modo ottimale.                  | 5 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                              |
| Argomentare<br>Commentare e giustificare opportunamente la scelta della strategia risolutiva, i passaggi fondamentali del processo esecutivo e la coerenza dei risultati al contesto del problema. | L1 | Descrive il processo risolutivo in modo superficiale. Comunica con un linguaggio non appropriato. Non valuta la coerenza con la situazione problematica proposta.                      | 1 | <input type="checkbox"/> Argomenta i casi che si presentano nel calcolo dell'area delle regioni colorate.<br><input type="checkbox"/> Argomenta lo studio della funzione $a(k)$ .<br><input type="checkbox"/> Spiega la strategia di ricerca del minimo assoluto di $a(k)$ .<br><input type="checkbox"/> Argomenta lo studio della funzione $a'(k)$ .<br><input type="checkbox"/> Argomenta la scelta della strategia per il calcolo dell'area.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | <input type="checkbox"/> Argomenta la dimostrazione che conduce all'espressione di $f'(x)$ .<br><input type="checkbox"/> Argomenta lo studio della funzione $f'(x)$ .<br><input type="checkbox"/> Spiega come si può ricavare il grafico di $f(x)$ da quello di $f'(x)$ .<br><input type="checkbox"/> Spiega come si può ricavare il grafico di $f''(x)$ da quello di $f'(x)$ .<br><input type="checkbox"/> Spiega perché la funzione data $f(x)$ è la primitiva cercata.<br><input type="checkbox"/> Argomenta il calcolo della retta tangente al grafico.<br><input type="checkbox"/> Spiega perché l'area non è finita.<br><input type="checkbox"/> Spiega la strategia per il calcolo dell'area finita.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | <input type="checkbox"/> 1<br><input type="checkbox"/> 2<br><input type="checkbox"/> 3<br><input type="checkbox"/> 4<br><input type="checkbox"/> 5<br><input type="checkbox"/> 6<br><input type="checkbox"/> 7<br><input type="checkbox"/> 8 |
|                                                                                                                                                                                                    | L2 | Descrive il processo risolutivo in modo parziale. Comunica con un linguaggio non sempre appropriato. Valuta solo in parte la coerenza con la situazione problematica proposta.         | 2 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                              |
|                                                                                                                                                                                                    | L3 | Descrive il processo risolutivo in modo quasi completo. Comunica con un linguaggio generalmente appropriato. Valuta nel complesso la coerenza con la situazione problematica proposta. | 3 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                              |
|                                                                                                                                                                                                    | L4 | Descrive il processo risolutivo in modo completo ed esauriente. Comunica con un linguaggio appropriato. Valuta in modo ottimale la coerenza con la situazione problematica proposta.   | 4 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                              |

Totale: /20

## **⑤ I materiali per allenarsi**

# Nei volumi

## Verso l'esame: problemi

La sezione **verso l'esame: problemi** (alla fine di ogni unità) contiene problemi di matematica di varia tipologia, in particolare problemi **dalla funzione al grafico, dal grafico alla funzione, con i parametri, dalla realtà, dalla geometria, ecc...**

### Verso l'esame: problemi

**Problema 1**  
**Dal grafico**  
Considera la funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , pari, il cui grafico è riportato in figura. Nel grafico sono indicati i punti di estremo relativo, i punti di flesso e le tangenti nel punto di flesso di ascissa 1 e nel punto di intersezione con l'asse x di ascissa 3.

a. Deduci il grafico della funzione  $y = f'(x)$ .  
b. Tenendo conto del grafico tracciato al punto precedente, discuti, al variare del parametro  $k$ , il numero di soluzioni dell'equazione  $f'(x) = k$ .  
c. Traccia i grafici delle due funzioni separate, studiandone continuità e derivabilità:  
 $y = \lfloor f'(x) \rfloor$  e  $y = f'(x)$ .  
d. Individua a quale delle seguenti due famiglie di funzioni può appartenere la funzione  $f$ , dandone una adeguata giustificazione:  
 $f_1(x) = ax^4 + bx^3 + c$        $f_2(x) = x \lfloor x \rfloor^2 + bx^2 + c$

Faccendo riferimento alla famiglia individuata, determina i valori di  $a$ ,  $b$ ,  $c$  che corrispondono alla funzione  $f$ .

**Problema 2**  
**Con i parametri**  
Considera la famiglia di funzioni  $f_k$  definita da  $f_k(x) = \frac{4x^2 - 4k}{x^3}$ , dove  $k$  è un parametro reale.

a. Traccia un grafico qualitativo delle funzioni della famiglia, in dipendenza del parametro  $k$ .  
b. Specifica per quali valori di  $k$  i grafici delle funzioni presentano sia punti di estremo relativo, sia punti di flesso. Supposta verificata questa condizione, verifica che il quadrilatero che ha come vertici i due punti di estremo relativo e i due punti di flesso è un parallelogramma, la cui area è costante al variare di  $k$ . Determina inoltre l'equazione cartesiana del luogo descritto dai punti di estremo relativo e del luogo descritto dai punti di flesso.  
c. Determina  $k$  in modo che la tangente al grafico della funzione nel suo punto di intersezione con il semiasse delle ascisse positive sia parallela alla retta di equazione  $y = 2x$ . Verificato che  $k = 4$ , traccia il grafico della funzione  $y = f_k(x)$ .  
d. Deduci dal grafico della funzione  $y = f_k(x)$  il grafico di  $y = \ln f_k(x)$ . Dimostra in particolare che la funzione  $y = \ln f_k(x)$  ha un solo zero.

**Problema 3**  
**Dalla geometria**  
I lati di un triangolo rettangolo misurano  $k$ ,  $2k$  e  $k\sqrt{5}$ , essendo  $k$  un numero reale positivo.

a. Calcola, in gradi e primi sessagesimali, l'ampiezza degli angoli acuti del triangolo. Determina  $k$  in modo che l'altezza relativa all'ipotenusa abbia lunghezza uguale a 2 e le misure delle proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa.  
b. Una retta parallela all'ipotenusa, avente distanza  $x$  dal vertice dell'angolo retto, divide il triangolo ottenuto in un triangolo  $T$  e un quadrilatero  $Q$ . Verifica che il rapporto tra l'area di  $T$  e l'area di  $Q$ , in funzione di  $x$ , è espresso da  $f(x) = \frac{x^2}{4 - x^2}$ .  
c. Traccia il grafico della funzione  $f$ , senza tenere conto dei limiti geometrici.  
d. Deduci, a partire dal grafico di  $f$ , i grafici delle tre funzioni seguenti e studiane la continuità e la derivabilità:  
 $y = f'(x)$        $y = \lfloor f'(x) \rfloor$        $y = f'(x)$

(Valutazione dei limiti: 4/10)

**Problema 4**  
**Dalla trigonometria**  
La curva  $y$  in figura è una semicirconferenza e  $P$  un punto variabile su di essa.

a. Fornisci un'espressione analitica di  $y$  e l'intervallo di variabilità dell'angolo  $\alpha$ , in radianti.  
b. Costruisci la funzione  $f(\alpha) = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}$ , studiala e rappresenta il suo grafico nell'intervallo  $[-\pi, \pi]$  in un piano  $\alpha y$ , tralasciando lo studio della derivata seconda ed evidenziando la parte relativa al problema geometrico.  
c. Determina l'angolo acuto formato dalle due tangenti al grafico nel suo punto angolare, approssimando il risultato ai secondi.  
d. Discuti, al variare di  $m$ , il numero di soluzioni dell'equazione  $f(\alpha) = m\alpha$ , nell'intervallo  $[0, \pi]$ .

# Nei volumi

## Prove di autoverifica: mini-simulazioni d'esame

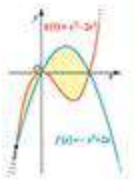
**Verso l'esame: autoverifica**

### L'integrale definito

**Problema**

12. Fai riferimento alle due funzioni  $f$  e  $g$  il cui grafico è riportato nella figura a lato.

- Determina l'area complessiva della regione colorata.
- Determina il volume del solido che si ottiene da un'rotazione completa intorno all'asse  $x$  del segmento parabolico  $\Gamma$  limitato dal grafico della funzione  $f$  e dall'asse  $x$ .
- Determina la retta parallela all'asse  $x$  che divide il segmento parabolico  $\Gamma$  in due parti equivalenti.
- Posto:  
$$F(x) = \int_0^x (f(t) - e^t) dt \text{ e } G(x) = \int_0^x g(t) dt$$
calcola il limite:  
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{G(x)}$$



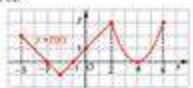
**Quesiti**

13. Determina l'area della regione finita di piano limitata dai grafici delle funzioni:  
 $y = \frac{3}{2}x^2$ ,  $xy = 6$ ,  $y = x^2 - \frac{7}{2}x$

14. Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico della funzione  $f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$  nel suo punto di ascissa 1.

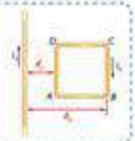
15. La funzione  $f: [-5, 6] \rightarrow \mathbb{R}$  il cui grafico è riportato in figura è costruito negli intervalli  $[-5, -2]$  e  $[-2, 2]$  da due segmenti e nell'intervallo  $[2, 6]$  da un arco di parabola. Posto  $F(x) = \int_{-5}^x f(t) dt$ :

- determina  $F(-5)$ ,  $F(-1)$ ,  $F(2)$ ,  $F(4)$ ,  $F(6)$ ;
- traccia il grafico della funzione  $F(x)$ .



**MATEMATICA E FISICA**

16. Un filo rettilineo di lunghezza infinita è percorso da una corrente  $i_1 = 1 \text{ A}$  nel verso indicato in figura, una spira quadrata, compianata al filo, è percorsa da una corrente  $i_2 = 2 \text{ A}$  in senso orario. I due lati  $AD$  e  $BC$  della spira sono paralleli al filo e si trovano a distanze  $d_1 = 5 \text{ cm}$  e  $d_2 = 10 \text{ cm}$  da esso. Determina il modulo della forza che si esercita sul lato  $AB$  della spira, specificando direzione e verso di tale forza.



La **prova di autoverifica** (alla fine di ogni unità) è strutturata come una minisimulazione d'esame (1 problema e 4 quesiti) e privilegia problemi di matematica con richieste simili a quelle proposte nelle prove ministeriali più recenti.

# Nei volumi

## Competenze per l'esame

Alla fine di ogni tema si trovano **problemi** e **quesiti** suddivisi per **competenze**, per prepararsi all'esame. Sono stati inseriti problemi e quesiti tratti dalle prove ministeriali degli ultimi anni.

**Tema C Competenze per l'esame**

**Calcolare e applicare**

**Problemi**

**1.1** Considera le due funzioni  $f(x) = x^3 - 1$  e  $g(x) = e^{3x} - 1$ .

- Determina la primitiva  $A(x)$  di  $f(g(x))$  che ammette per asintoto orizzontale sinistro la retta di equazione  $4y - 11 = 0$ .
- Determina la primitiva  $B(x)$  di  $f(x) \cdot g(x)$  il cui punto di massimo relativo ha ordinata 2.
- La funzione  $y = \begin{cases} f(x), & \text{se } x < 0 \\ g(x), & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$  ammette primitiva in  $\mathbb{R}$ ? Motiva la risposta.
- La funzione  $y = \begin{cases} A(x), & \text{se } x < 0 \\ B(x), & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$  ammette primitiva in  $\mathbb{R}$ ? Motiva la risposta.

**1.2** a. Scrivi l'equazione della parabola  $\gamma$ , con asse parallelo all'asse  $y$ , che interseca l'asse  $x$  nell'origine e nel punto  $G(6, 0)$ , sapendo che ha la concavità rivolta verso l'alto e che forma con l'asse  $x$  un segmento parabolico di area  $\frac{4}{3}$ .

b. Scrivi l'equazione della parabola  $\delta$ , con asse coincidente con l'asse  $x$ , vertice nell'origine e passante per il punto  $P$  di ascissa 3 della parabola  $\gamma$ .

c. Considera la regione  $R$  di piano delimitata dalle due parabole  $\gamma$  e  $\delta$ ; calcola l'area di  $R$ .

d. Calcola il volume del solido ottenuto dalla rotazione completa di  $R$  attorno all'asse  $y$ .

**Soluzioni:**  
 a.  $A(x) = -\frac{3}{4}e^{4x} - \frac{11}{4}$ ; b.  $B(x) = -\frac{1}{4}e^{4x}(2x^2 - 2x - 1) - \frac{e^4}{3}x + \frac{1}{3}$

### Quesiti

- 1.6** Il grafico della funzione  $f(x) = \sqrt{x}$  divide in due porzioni il rettangolo  $ABCD$  avente vertici  $A(1, 0)$ ,  $B(4, 0)$ ,  $C(4, 2)$  e  $D(1, 2)$ . Calcola il rapporto tra le aree delle due porzioni.  
*(Sezione ordinaria 2015)*  $\left[\frac{7}{2}\right]$
- 1.7** Definisci il numero  $E = \int_1^4 x e^x dx$ , dimostra che risulta  $\int_0^1 x^2 e^x dx = e - 2E$  e poi esprimi l'integrale  $\int_0^1 x^3 e^x dx$  in termini di  $e$  ed  $E$ .  
*(Sezione ordinaria 2017)*  $[6E - 2e]$
- 1.8** Calcola l'area della regione  $R$  di piano sottesa dalla curva  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$  per  $4 \leq x \leq 9$ . Sapendo inoltre che la retta di equazione  $x = k$  divide  $R$  in due figure di egual area, determina il valore di  $k$ .  
*(Sezione ordinaria 2018, opzione sportiva)*  $\left[2; k = \frac{25}{4}\right]$
- 1.9** Determina le ascisse dei punti di massimo e di minimo locali della funzione:  
 $f(x) = \int_1^x (e^{2t} - 2t^2 - 1) dt$   
*(Sezione ordinaria 2019, Scelte italiane all'estero, Australia)*  $\left[x = 0 \text{ minimo relativo}, x = \frac{5}{2} \text{ massimo relativo}\right]$
- 1.10** Determina l'espressione analitica della funzione  $y = f(x)$  sapendo che la retta  $y = -2x + 5$  è tangente al suo grafico in un punto del II quadrante e che  $f'(x) = -2x^4 + 6$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .  
*(Riduzione da funzione ordinaria 2015)*  $\left[f(x) = -\frac{2}{5}x^5 + 6x + \frac{47}{5}\right]$
- 1.11** Determina quali sono i valori del parametro  $k \in \mathbb{R}$  per cui la funzione  $y(x) = 2e^{kx+2}$  è soluzione dell'equazione differenziale  $y'' - 2y' - 3y = 0$ .  
*(Sezione ordinaria 2016)*  $[k = -1 \vee k = 3]$

# Nei volumi Simulazioni d'esame

Alla fine di ogni tema si trovano **simulazioni** complete d'esame, anche queste aggiornate rispetto alle «tendenze» delle ultime prove ministeriali.

## Simulazioni d'esame

Tema M

**Simulazione 1**

**Problemi**

1.1 Sono date le due famiglie di funzioni:

$$g_a(x) = \frac{e^{-x} - a}{x^2 - 5x} \quad e \quad h_b(x) = \arctan x - x$$

con  $a$  e  $b$  parametri reali, diversi da zero.

a. Studia, al variare di  $a$  e  $b$ , le singolarità delle due famiglie di funzioni e individua le equazioni degli eventuali asintoti.

b. Posto:

$$f(x) = \begin{cases} g_a(x) & x > 0 \\ h_b(x) & x \leq 0 \end{cases}$$

determina i valori di  $a$  e  $b$  per i quali la funzione  $f$  ammette un salto (singolarità di prima specie) e specifica l'entità del salto.

Poni d'ora in poi  $a = 1$  e  $b = 4$ .

c. Individua il numero di zeri della funzione  $f$  e per ciascuno di essi, se non è possibile, indica un intervallo a cui lo zero appartiene. Traccia perché il teorema di Weierstrass è applicabile alla funzione  $f$  nell'intervallo  $[-1, 1]$  e, in modo approssimato, i punti di cui il teorema garantisce l'esistenza.

d. Calcola il valore, se esiste, di ciascuno dei seguenti limiti:

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

**Soluzioni delle simulazioni d'esame**

## Simulazioni d'esame

Tema O

**Simulazione 1**

**Problemi**

1. In figura è rappresentato il grafico  $\Gamma$  della funzione  $F(x) = \int_a^x f(t) dt + c$ , con  $c \in \mathbb{R}$ . È noto che la funzione  $f$  è continua sull'intervallo  $[-k, k]$ , che i punti  $B$ ,  $C$ ,  $D$  sono stazionari e che la curva  $\Gamma$  presenta una simmetria rispetto all'asse  $y$ .

- Spiega perché la costante  $c$  è positiva e dimostra che la funzione  $f$  è dispari.
- Traccia i grafici probabili delle funzioni  $y = f(x)$  e  $y = g(x) = \frac{f(x)}{F(x)}$ . Individua un'espressione che esprime l'integrale  $\int_0^a g(x) dx$  e spiega qual è il suo significato geometrico.

Supponi d'ora in avanti che la funzione  $F$  sia un polinomio di quarto grado.

- Sapendo che la retta tangente a  $\Gamma$  in  $A_2$  è  $t_2: y = -6x + 6$  e che il valor medio della funzione  $f$  sull'intervallo  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$  è  $\frac{1}{4}$ , individua le equazioni delle funzioni  $F$ ,  $f$  e  $g$ . Determina le coordinate dei punti stazionari e dei punti di flesso delle funzioni  $F$  e  $f$  e l'equazione della retta tangente al grafico di  $g$  nell'origine.
- Calcola:
  - l'area della regione finita di piano  $\Sigma$  delimitata da  $\Gamma$  e dall'asse  $x$ ;
  - la somma delle aree delle regioni finite di piano delimitate dal grafico di  $f$ , dall'asse  $x$  e dalle rette  $x = -1$  e  $x = 1$ ;
  - il volume del solido ottenuto dalla rotazione completa di  $\Sigma$  attorno all'asse  $x$ ;
  - il volume del solido ottenuto dalla rotazione completa di  $\Sigma$  attorno all'asse  $y$ .

**Soluzioni delle simulazioni d'esame**

# Per il docente

## Altre simulazioni

### Problema 1

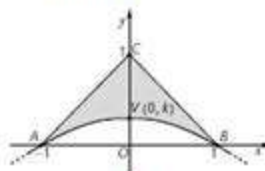


Fig. 1

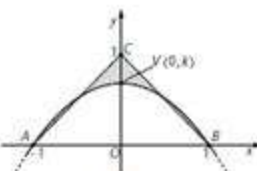


Fig. 2

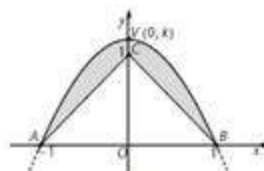


Fig. 3

Nelle **Figg. 1, 2, 3** sono mostrati un triangolo  $ABC$  e una parabola  $y$ , che passa per i punti fissi  $A$  e  $B$  e ha vertice variabile  $V(0, k)$ , con  $k > 0$ : l'area evidenziata è quella della regione di piano delimitata dalla curva e dai lati  $AC$  e  $BC$  del triangolo, in tre casi diversi.

**1** Determina i valori di  $k$  per i quali si ottengono le tre diverse configurazioni rappresentate nelle **Figg. 1, 2, 3**. In seguito trova l'espressione analitica della funzione  $y = a(k)$  che descrive l'andamento dell'area evidenziata in tutti e tre i casi, al variare di  $k > 0$ .

**2** Verificato che la funzione cercata al punto **a.** è

$$a(k) = \begin{cases} 1 - \frac{4}{3}k & \text{se } 0 < k \leq \frac{1}{2} \\ 4k - 7 + \frac{4}{k} - \frac{2}{3k^2} & \text{se } \frac{1}{2} < k < 1 \\ \frac{4}{3}k - 1 & \text{se } k \geq 1 \end{cases}$$

studiane la continuità, la derivabilità e determina le equazioni degli eventuali asintoti. Mostra che l'area evidenziata nelle figure ha un valore minimo assoluto.

**3** Traccia i grafici della funzione  $y = a(k)$  e della sua derivata prima  $y = a'(k)$  e stabilisci se  $a'(k)$  è a sua volta derivabile, motivando le tue risposte.

**4** Calcola, in un piano cartesiano  $kOy$ , l'area della regione finita di piano compresa tra i grafici di  $a(k)$ ,  $a'(k)$ , l'asse  $y$  e la retta verticale di equazione  $k = \frac{2}{3}$ .

## Problema 2

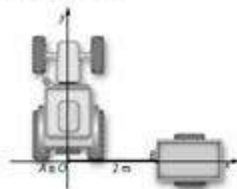


Fig. 4

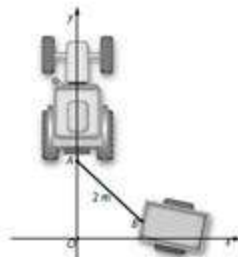


Fig. 5



Fig. 6

Un trattore è agganciato al suo rimorchio con una barra rigida di lunghezza  $l = 2$  m. Inizialmente trattore e rimorchio sono disposti perpendicolarmente uno all'altro, come in Fig. 4.

In seguito, il trattore si muove con velocità costante lungo l'asse  $y$ , nel suo verso positivo: in tal modo l'estremo  $A$  della barra si trova sempre sull'asse  $y$ , mentre l'estremo  $B$  si muove (Fig. 5), descrivendo una curva che viene detta *trattrice*: la sua caratteristica consiste nel fatto che in ogni suo punto  $B$  il segmento  $AB$  è tangente alla curva stessa (Fig. 6).

1. Facendo riferimento alla Fig. 6, indica con  $f(x)$  la funzione che ha per grafico la trattrice e dimostra che vale la relazione:  $f'(x) = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$ , per  $0 < x \leq 2$ , avendo adottato come unità di misura sul piano cartesiano il metro.
2. Prescindendo dalle limitazioni del problema precedente, studia in modo completo la funzione  $y = f(x)$  e traccia il suo grafico. Sfruttando le informazioni ricavate, deduci poi i grafici delle funzioni  $y = f(x)$  e  $y = f''(x)$ , giustificando le tue scelte.
3. Verifica che la funzione  $f(x) = \ln\left(\frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}\right) - \sqrt{4-x^2}$  è la primitiva di  $f'(x)$  il cui grafico passa per il punto di coordinate  $(2, 0)$  e quindi è l'equazione della trattrice. Determina l'equazione della retta parallela alla bisettrice del secondo e del quarto quadrante tangente alla trattrice.
4. Spiega perché la regione illimitata di piano del quarto quadrante, compresa tra il grafico di  $f'(x)$  e gli assi cartesiani, non ha area finita. In seguito determina l'area della regione finita di piano compresa tra la retta di equazione  $x = 1$ , il grafico di  $f''(x)$  e il grafico della funzione  $g(x) = \frac{4}{x^2}$ .

## Quesiti

1. Considera la funzione  $f(x) = \frac{\sin(kx) + x}{\sin(kx) + 2x}$  e discuti il valore del limite  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ , al variare del parametro  $k \in \mathbb{R}$ . In seguito determina il valore di  $k$  affinché sia  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$  e stabilisci se per questo valore di  $k$  è possibile applicare il teorema di De l'Hôpital al calcolo del limite  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ . In ogni caso calcola quest'ultimo limite e stabilisci se la funzione  $f(x)$  ammette asintoti orizzontali.

2. Studia la convergenza dei seguenti integrali:  $\int_0^{\infty} \frac{dt}{1+e^t}$ ,  $\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{1+e^t}$ .

In seguito, mostra che la funzione  $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+e^t}$  ammette un asintoto orizzontale e un asintoto obliquo, di cui ti sono richieste le equazioni.

3. La sfera in Fig. 7 ha centro  $C(0, 0, 3)$  e raggio  $r = 2$ . Scrivi l'equazione che rappresenta la sua superficie  $\Sigma$ .

Supponi che nell'origine del sistema di riferimento sia posizionata una sorgente luminosa puntiforme, che proietta l'ombra della sfera sul piano di equazione  $z = 6$ .

a. Determina il raggio della circonferenza  $\gamma$  che delimita l'ombra e rappresenta la circonferenza analiticamente come intersezione tra un'opportuna superficie sferica e il piano.

b. Scrivi le equazioni parametriche delle due rette tangenti a  $\Sigma$  che stanno sul piano di equazione  $x = 0$  e determina le coordinate dei punti di tangenza.

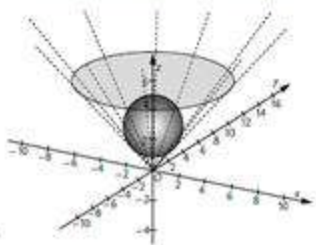


Fig. 7

4. In un'azienda informatica vengono prodotti tre tipi di videogiochi: A, B, C. Le probabilità che una partita a uno dei tre giochi duri più di 20 minuti sono rispettivamente del 25%, del 45% e del 35%. Supponi che la probabilità di scegliere uno dei tre giochi a caso sia la stessa per tutti e calcola la probabilità che, se una partita è durata più di 20 minuti, non sia stata effettuata con il gioco C. Esprimi il risultato in percentuale, arrotondato all'unità.

5. Un foglio A4, che ha dimensioni 210 mm e 297 mm, viene piegato come in Fig. 8, ossia in modo che il vertice C risulti posizionato nel punto H, con  $H \in AB$ .

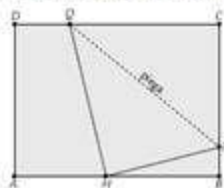


Fig. 8

Indicata con  $x$  la distanza di  $P$  da  $C$ , verifica che la funzione che esprime la lunghezza della piega è  $l(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-105}}$ . Determina quindi la posizione del punto  $P$  affinché la lunghezza della piega sia minima e calcola il valore di tale lunghezza.

6. In Fig. 9 è mostrato il grafico di una funzione  $f(x)$ , definita nell'intervallo  $[-3, 9]$ : gli archi  $\widehat{DE}$  ed  $\widehat{EF}$  sono semicirconferenze; l'arco  $\widehat{BC}$  è un tratto di parabola.

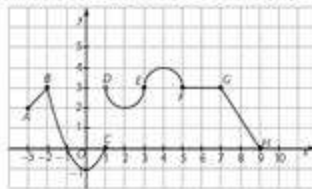


Fig. 9

a. Individua e classifica i punti di non derivabilità della funzione e determina almeno due intervalli in cui la funzione soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle. Trova poi le coordinate dei punti di cui il teorema assicura l'esistenza, senza eseguire calcoli.

b. Considera la funzione  $F(x) = \int_{-3}^x f(t) dt$  e, senza eseguire calcoli, spiega perché ammette un punto di minimo e stabilisci per quale valore di  $x$  ciò si verifica. Calcola poi  $F(-3)$ ,  $F(-2)$ ,  $F(-1)$ ,  $F(1)$ ,  $F(3)$ ,  $F(5)$ ,  $F(7)$ ,  $F(9)$ , ricorrendo al calcolo integrale solo se necessario.

### Problema 1

La Fig. 1 mostra il grafico della funzione  $y = f_a(x)$ , definita su tutto  $\mathbb{R}$ , che presenta due punti di flesso a tangente verticale, un punto di minimo assoluto di ascissa  $x = a$ , con  $a > 0$ , e che tende a  $+\infty$  per  $x \rightarrow \pm\infty$ .

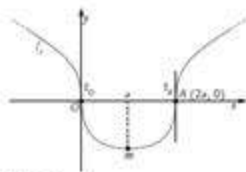


Fig. 1

1. In base alle informazioni che puoi dedurre dal grafico, studia la funzione  $g(x) = -e^{f_a(x)}$ , fino alla derivata prima, prestando particolare attenzione ai punti di estremo relativo e ai punti di non derivabilità.

Supponi d'ora in poi  $f_a(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2ax}$ , con  $a > 0$ .

2. Studia la funzione  $f_a$  e stabilisci se il suo grafico è compatibile con quello rappresentato nella Fig. 1.

Dimostra che per ogni  $a > 0$  il grafico della funzione  $f_a$  presenta una particolare simmetria e individua una traslazione che trasforma  $f_a$  in una funzione pari. Se fosse  $a < 0$ , il grafico della funzione  $f_a$  sarebbe deducibile da quello di  $f_{|a|}$  mediante una trasformazione geometrica. Spiega il perché.

3. Determina l'equazione  $y = p(x)$  del luogo geometrico che viene descritto, al variare di  $a$ , dai punti di minimo del grafico di  $f_a$ . Determina l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico di  $p$  e dal suo simmetrico rispetto alla bisettrice del secondo e quarto quadrante.

4. Stabilisci per quale valore del parametro  $a$  il grafico della funzione  $f_a$  risulta tangente nel suo punto di minimo del grafico di  $f_a$ . Determina l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico di  $p$  e dal suo simmetrico rispetto alla bisettrice del secondo e quarto quadrante.

a.  $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{f_1(x) - 2}{\sqrt{x} - 4}$

b.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\int_2^{\sqrt{x}} f_1(t) dt}{(x - 4)^2}$

### Problema 2

Considera la semicirconferenza di diametro  $\overline{AB} = 2r$  (con  $r > 0$ ) e centro  $O$ , origine di un sistema di riferimento cartesiano  $Oxy$  rispetto al quale il punto  $B$  appartiene al semiasse delle ascisse positive e la semicirconferenza appartiene al semipiano delle ordinate non negative.

Detto  $C$  il punto dell'asse  $x$  di ascissa  $+2r$ , traccia le rette  $a$  e  $b$  per  $C$  parallele rispettivamente all'asse  $y$  e alla bisettrice del secondo e quarto quadrante.

1. Considera il punto  $P(x, y)$  sulla semicirconferenza; da esso conduci la parallela alla retta  $a$ , che incontra la retta  $b$  nel punto  $M$ , e la parallela alla retta  $b$ , che incontra la retta  $a$  nel punto  $N$ . Verifica che la somma  $\overline{PM} + \sqrt{2} \cdot \overline{PN}$  è espressa dalla funzione  $S(x) = 6r - 3x - \sqrt{r^2 - x^2}$  e determina le coordinate di  $P$  che minimizzano tale funzione.

2. Poni d'ora in avanti  $r = 1$  e studia la funzione  $S(x)$  fino alla derivata seconda. Deduci dall'analisi di  $S$  le caratteristiche dei grafici di  $S'(x)$  e  $S''(x)$  e individua le simmetrie di cui essi godono.

3. Giustifica perché la funzione  $S'$  è invertibile nel suo dominio e determina l'equazione della retta tangente al grafico della sua funzione inversa  $h$  nel punto di ascissa  $-3$ , senza trovare l'espressione analitica di  $h$ .

4. Traccia il grafico della funzione  $g(x) = S(|x|)$ , spiega quali sono le sue caratteristiche e classifica i suoi punti di non derivabilità. Determina l'ampiezza in gradi, primi e secondi dell'angolo formato dalle due semi tangenti nel suo punto angoloso. Calcola l'area delimitata dal grafico della funzione  $g$ , dalle semi tangenti nel suo punto angoloso e dalle rette di equazioni  $x = -1$  e  $x = 1$ .

## Quesiti

- 1 Nella Fig. 2 sono rappresentati il grafico della funzione  $f$ , derivabile tre volte in  $\mathbb{R}$ , e quello della retta tangente nel suo punto di flesso  $F$ .

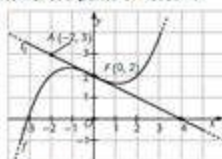


Fig. 2

In base ai dati forniti, determina il valore del limite seguente:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x) + x - 4}{x^2}$ .

- 2 In Fig. 3 è raffigurata una recinzione alta 1,5 m situata alla distanza  $BO = 1,0$  m dal muro di un edificio. Qual è la lunghezza minima di una scala che, appoggiata a terra oltre la recinzione e appoggiata inoltre alla recinzione stessa, raggiunge il muro dell'edificio?

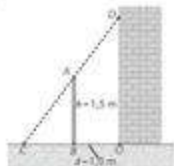


Fig. 3

- 3 È data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{se } -4 \leq x < 0 \\ c \sin x + d & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \sqrt{5-x} & \text{se } 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

con  $a, b, c, d$  parametri reali.

- Per quali valori di  $a, b, c, d$  la funzione  $f$  soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo  $[-4, 4]$ ?
- Determina il valore che verifica il teorema per i valori trovati.

- 4 La Fig. 4 mostra il grafico di una funzione dispari, derivata di una funzione  $f(x)$  continua in  $\mathbb{R}$ , il cui grafico passa per l'origine.

In Fig. 4 sono indicati anche gli asintoti di  $f'$ .

- Analizza la derivabilità della funzione  $f$  e classifica i punti di non derivabilità.
- Dimostra che la funzione  $f$  è pari.
- Traccia un grafico probabile della funzione  $f$ , sapendo che  $f(1) = 0$ .

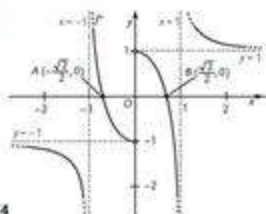


Fig. 4

- 5 La Fig. 5 mostra il grafico della funzione  $f(x)$ , densità di probabilità della variabile aleatoria continua  $X$ .

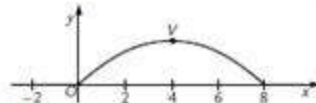


Fig. 5

Sapendo che nell'intervallo  $[0, 8]$  la curva rappresentata è un arco di parabola, determina:

- l'espressione analitica della funzione  $f$ ;
- l'espressione analitica di  $F$ , funzione di ripartizione di  $X$ ;
- la probabilità che  $X > 6$ ;
- il valor medio e la varianza di  $X$ .

- 6 Calcola il seguente limite:  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{2x}}$ .

- 7 Considera la funzione  $f(x) = \int_e^{x^2} (\ln^2 t) dt$  per  $x \geq 1$ .

Senza risolvere l'integrale:

- dimostra che la funzione  $f$  ha un unico zero;
- scrivi l'equazione della retta tangente al grafico di  $f$  nel punto in cui esso interseca l'asse delle  $x$ .

- 8 Dati il piano  $\pi_1$  di equazione  $x + 2y + 3z - 8 = 0$  e i punti  $A(2, 3, 0)$  e  $B(0, 1, 2)$ , verifica che i punti  $A$  e  $B$  appartengono al piano  $\pi_1$  e individua i punti  $C_1$  e  $C_2$  del piano  $\pi_2$ , perpendicolare a  $\pi_1$  e contenente la retta  $AB$ , in modo che il triangolo  $BC_1C_2$  sia equilatero, con  $AB$  altezza relativa alla base  $C_1C_2$ .

## *Per simulare la prova in classe*

- Appuntamento il **7 maggio alle ore 7:00**: pubblicheremo una nuova prova che potrai assegnare il giorno stesso nella tua classe.
- A partire dalle ore **14:00 dello stesso giorno** troverai la risoluzione e la griglia di valutazione della simulazione.



DEASCUOLA

INSEGNARE MATEMATICA E FISICA

# Spazio alle domande

# ***Videolezioni***

<https://formazione.deascuola.it/insegnare-matematica-e-fisica/>

Insegnare **Matematica e Fisica**

nella scuola Secondaria di **Secondo grado**





# Area Matematica: esame di Stato

- **simulazioni di seconda prova**, realizzate da C. Giuliano Albo, Leonardo Sasso e Claudio Zanone, con svolgimento e griglia di valutazione
- una **simulazione dotata di videorisoluzioni**, realizzata da Elia Bombardelli e Gabriele Dalla Torre
- **video**, a cura di Elia Bombardelli, Gabriele Dalla Torre e Marta Polesello, con lo svolgimento di alcuni quesiti tipici e tratti dalle prove ministeriali
- attività con la **calcolatrice grafica**
- **richiami di teoria**, per la revisione di concetti, formule e teoremi
- schede di **guida ai metodi risolutivi**



Esame di Stato



# ESAME DAY - 7 maggio 2025



- **ore 7:00:** pubblicazione della **simulazione di seconda prova** da assegnare alla classe
- **dalle ore 14:00:** pubblicazione della **risoluzione** e della **griglia di valutazione** della simulazione



Esame Day

# Scopri «Tutti i colori della Matematica Edizione BLU»

Consulta la [scheda sul sito](#)

Richiedi copia digitale:

<https://deascuola.it/work/evaluate/tutti-i-colori-della-matematica-edizione-blu-secondo-biennio-e-quinto-anno-e-moduli-24017/>

