

# la SCUOLA **e**

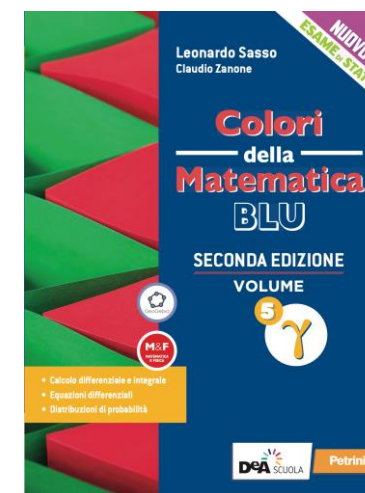
9 marzo 2021





# Dall'idea alla pratica: dialogo tra l'autore e i docenti

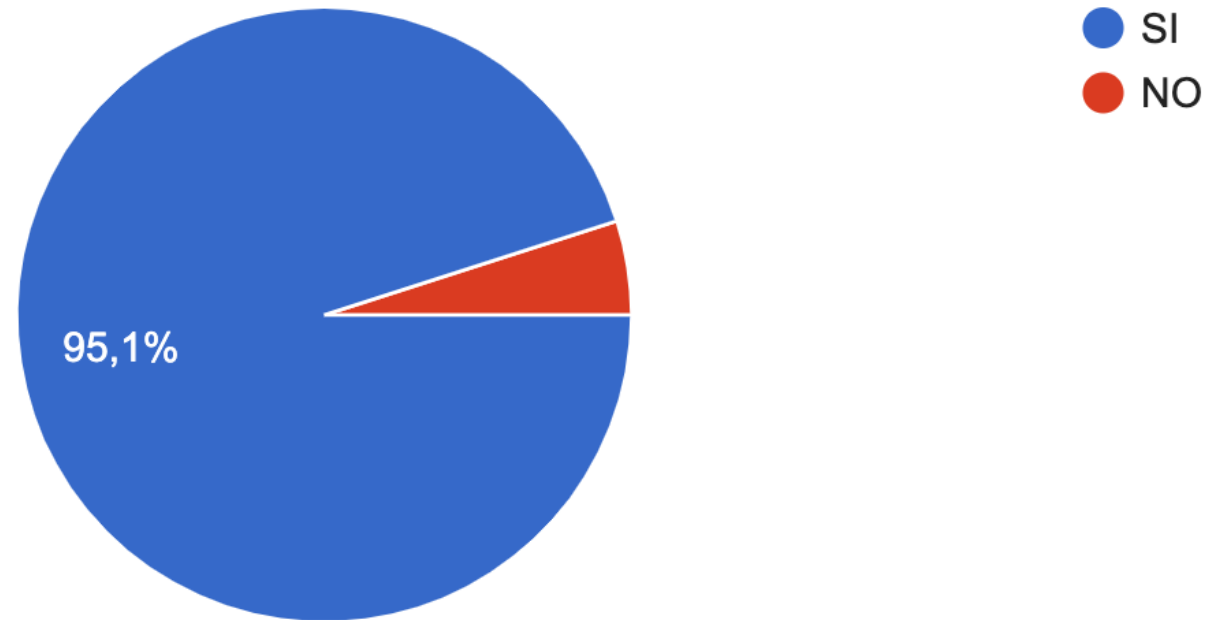
Orsola Caporaso, Magda Fiori, Leonardo Sasso



## GLI STUDENTI E IL LORO LIBRO DI MATEMATICA

Hai mai consultato gli esercizi guidati?

162 risposte



### 3. Come determinare l'equazione di una parabola

Teoria p. 462

#### Esercizi introduttivi

Associazione.

**182** Considera la parabola di equazione  $y = ax^2 + bx + c$ . Associa a ogni condizione della prima colonna l'equazione che la esprime.

- |                                         |                      |
|-----------------------------------------|----------------------|
| a. Passa per il punto $P(1, -1)$ .      | A. $c = 0$           |
| b. Passa per l'origine.                 | B. $a + b + c = -1$  |
| c. Interseca l'asse $y$ in $P(0, -2)$ . | C. $c = -2$          |
| d. Interseca l'asse $x$ in $P(-2, 0)$ . | D. $a - b + c = 1$   |
| e. Passa per il punto $P(-1, 1)$ .      | E. $4a - 2b + c = 0$ |

**183** Considera la parabola di equazione  $y = ax^2 + bx + c$ . Associa a ogni condizione della prima colonna l'equazione che la esprime.

- |                                          |                                       |
|------------------------------------------|---------------------------------------|
| a. Ha il vertice sull'asse $x$ .         | A. $2a + b = 0 \wedge a + b + c = 1$  |
| b. Ha il vertice sull'asse $y$ .         | B. $b = 0$                            |
| c. Ha il vertice nell'origine.           | C. $b = c = 0$                        |
| d. Ha il vertice nel punto $V(1, 1)$ .   | D. $\Delta = 0$                       |
| e. Ha il vertice nel punto $V(-1, -1)$ . | E. $2a - b = 0 \wedge a - b + c = -1$ |

**184** Considera la parabola di equazione  $y = ax^2 + bx + c$ . Associa a ogni condizione della prima colonna l'uguaglianza della seconda colonna che la esprime.

- |                                                                   |                            |
|-------------------------------------------------------------------|----------------------------|
| a. È tangente all'asse $x$ .                                      | A. $(b + 1)^2 = 4ac$       |
| b. È tangente alla bisettrice del primo e del terzo quadrante.    | B. $(b - 1)^2 = 4ac$       |
| c. È tangente alla bisettrice del secondo e del quarto quadrante. | C. $b^2 - 4ac = 0$         |
| d. È tangente alla retta di equazione $y = x + 1$ .               | D. $(b - 1)^2 = 4a(c + 1)$ |
| e. È tangente alla retta di equazione $y = x - 1$ .               | E. $(b - 1)^2 = 4a(c - 1)$ |

#### Equazione di una parabola, dati tre punti

##### 185 ESERCIZIO GUIDATO

Scrivi l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse  $y$ , passante per i punti  $A(-2, 0)$ ,  $B(1, 0)$ ,  $C(0, 3)$ .

1° modo

Imponendo che la parabola di equazione  $y = ax^2 + bx + c$  passi per i punti  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , ottieni il sistema:

$$\begin{cases} 4a - 2b + c = 0 & \text{Passaggio per } A \\ a + b + c = 0 & \text{Passaggio per } B \\ c = 3 & \text{Passaggio per } C \end{cases}$$

Risolviendo il sistema trovi  $a = b = -\frac{3}{2}$  e  $c = 3$ , quindi la parabola cercata ha equazione  $y = -\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 3$ .

2° modo

Considera la generica parabola di equazione  $y = ax^2 + bx + c$ . Poiché i punti  $A(-2, 0)$  e  $B(1, 0)$  assegnati rappresentano le intersezioni della parabola cercata con l'asse  $x$ , il trinomio  $ax^2 + bx + c$  deve ammettere come zeri  $-2$  e  $1$ , quindi deve essere scomponibile nella forma  $a(x + 2)(x - 1)$ . L'equazione della parabola cercata deve quindi essere del tipo:

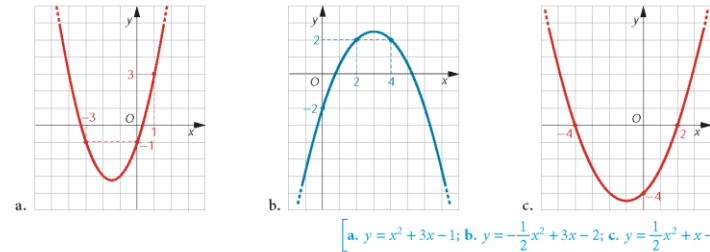
$$y = a(x + 2)(x - 1)$$

Imponendo ulteriormente il passaggio per  $C(0, 3)$ , si ottiene  $a = -\frac{3}{2}$ , quindi la parabola cercata ha equazione  $y = -\frac{3}{2}(x + 2)(x - 1)$ . Svolgendo i calcoli è immediato riconoscere che l'equazione cui siamo pervenuti coincide con quella trovata applicando il metodo precedente.

**Nota** In generale, ogniqualvolta è richiesto di determinare l'equazione di una parabola di cui si conoscono le ascisse  $x_1$  e  $x_2$  dei punti di intersezione con l'asse  $x$ , è utile tenere presente che l'equazione della parabola deve essere del tipo  $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ : così facendo rimane da determinare soltanto il valore del parametro  $a$  in base all'ulteriore condizione fornita dal problema.

### 3. Come determinare l'equazione di una parabola

**186 Interpretazione di grafici** Determina le equazioni delle parabole che hanno i seguenti grafici.

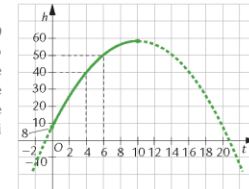


Scrivi l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse  $y$ , che passa per  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

- |                                                  |                                 |                                                        |                                           |
|--------------------------------------------------|---------------------------------|--------------------------------------------------------|-------------------------------------------|
| <b>187</b> $A(-2, -3)$ , $B(0, 1)$ , $C(6, -11)$ | $[y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 1]$ | <b>191</b> $A(0, -4)$ , $B(2\sqrt{2}, 0)$ , $C(2, -2)$ | $[y = \frac{1}{2}x^2 - 4]$                |
| <b>188</b> $A(1, 2)$ , $B(0, 5)$ , $C(2, 1)$     | $[y = x^2 - 4x + 5]$            | <b>192</b> $A(2, 0)$ , $B(4, 0)$ , $C(1, 1)$           | $[y = \frac{1}{3}x^2 - 2x + \frac{8}{3}]$ |
| <b>189</b> $A(-1, 0)$ , $B(1, 6)$ , $C(2, 6)$    | $[y = -x^2 + 3x + 4]$           | <b>193</b> $A(2, 0)$ , $B(1, 1)$ , $C(0, 3)$           | $[y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3]$ |
| <b>190</b> $A(-1, -5)$ , $B(1, 1)$ , $C(2, -2)$  | $[y = -2x^2 + 3x]$              | <b>194</b> $A(-1, 0)$ , $B(3, 0)$ , $C(0, 6)$          | $[y = -2x^2 + 4x + 6]$                    |

#### Realità e modelli

**195 Fuochi d'artificio.** Un fuoco d'artificio viene lanciato nell'istante  $t = 0$  da una piattaforma posta a un'altezza di 8 m. L'altezza  $h$  (in metri) del fuoco d'artificio dopo un tempo di volo  $t$  (in decimi di secondo), con  $0 \leq t \leq 10$ , è espressa dalla funzione rappresentata in figura. Il fuoco d'artificio esplode quando si trova nella posizione di massima altezza. Determina l'equazione della funzione che esprime  $h$  in funzione di  $t$  e stabilisci a quale altezza si trova il fuoco d'artificio quando esplode.



$$[h = -\frac{1}{2}t^2 + 10t + 8; 58 \text{ m}]$$

**196 Internet.** Nel 2010 solo il 2,9% degli utenti di Internet in tutto il mondo accedeva alla Rete da un dispositivo mobile; nel 2016 ci si è avvicinati alla soglia del 40%, con un trend sempre in crescita. In particolare, negli anni 2014-2015-2016 le percentuali degli utenti a livello globale che accedevano a Internet da dispositivo mobile sono state approssimativamente quelle in tabella.

| Anno | Utenti che accedono a Internet da dispositivo mobile (%) |
|------|----------------------------------------------------------|
| 2014 | 29%                                                      |
| 2015 | 33%                                                      |
| 2016 | 39%                                                      |



Assumi per semplicità un modello di crescita di tipo quadratico e individua la funzione  $f(t)$  che esprime il numero corrispondente alla percentuale di utilizzatori che accedono a Internet da dispositivo mobile al tempo  $t$  (assumi che  $t = 0$  corrisponda all'anno 2014,  $t = 1$  all'anno 2015 e così via; quindi per esempio dovrà essere  $f(0) = 29$ ). Utilizzando il modello che hai costruito, stima la percentuale di utenti che accederanno a Internet da dispositivo mobile nel 2020.

$$[f(t) = t^2 + 3t + 29; 83\%]$$

Unità 8 Parabola

Equazione di una parabola, dato il vertice e un punto

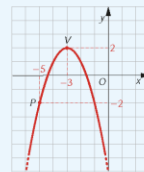
197 ESERCIZIO GUIDATO

Determina l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse  $y$  che ha vertice in  $V(-3, 2)$  e passa per  $P(-5, -2)$ .

1° modo

Imponi che la parabola abbia vertice in  $V$  e passi per  $P$ . Ottieni il sistema:

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = -3 & \text{L'ascissa di } V \text{ è } -3 \\ 9a - 3b + c = 2 & \text{Passaggio per } V \\ 25a - 5b + c = -2 & \text{Passaggio per } P \end{cases}$$



Risolvendo il sistema trovi che  $a = \dots$ ,  $b = \dots$  e  $c = \dots$  quindi la parabola cercata ha equazione  $y = -x^2 - 6x - 7$ .

**Nota** Invece di porre la condizione  $-\frac{b}{2a} = -3$  (l'ordinata del vertice è 2), ti abbiamo suggerito di porre la condizione equivalente del passaggio per  $V$ , perché così ottieni un'equazione di primo grado anziché di secondo.

2° modo

Ricorda che una parabola di vertice  $V(x_v, y_v)$  ha equazione del tipo  $y - y_v = a(x - x_v)^2$ .

Poiché la parabola in figura ha vertice in  $V(-3, 2)$ , la sua equazione sarà del tipo  $y - 2 = a[x - (-3)]^2$  ossia:

$$y = a(x + 3)^2 + 2$$

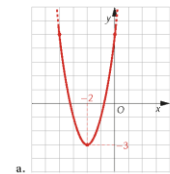
Imponi ora il passaggio per il punto  $P(-5, -2)$ . Otterrai l'equazione:

$$-2 = a(-5 + 3)^2 + 2$$

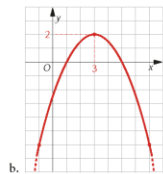
da cui  $a = \dots$  quindi l'equazione della parabola è  $y = -x^2 - 6x - 7$ .

$$[y = -x^2 - 6x - 7]$$

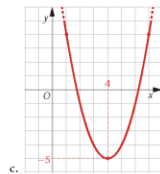
198 Interpretazione di grafici Determina le equazioni delle parabole che hanno i seguenti grafici.



a.



b.



c.

$$[a. y = 2(x + 2)^2 - 3; b. y = -\frac{1}{2}(x - 3)^2 + 2; c. y = (x - 4)^2 - 5]$$

Scrivi l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse  $y$ , che ha il vertice in  $V$  e passa per  $P$ .

|     |           |           |                        |     |                     |                      |                                  |
|-----|-----------|-----------|------------------------|-----|---------------------|----------------------|----------------------------------|
| 199 | $V(0, 0)$ | $P(3, 2)$ | $[y = \frac{2}{9}x^2]$ | 203 | $V(2, -3)$          | $P(0, 0)$            | $[y = \frac{3}{4}x^2 - 3x]$      |
| 200 | $V(1, 1)$ | $P(2, 3)$ | $[y = 2x^2 - 4x + 3]$  | 204 | $V(\frac{3}{2}, 0)$ | $P(\frac{1}{2}, -2)$ | $[y = -2x^2 + 6x - \frac{9}{2}]$ |
| 201 | $V(2, 0)$ | $P(3, 2)$ | $[y = 2x^2 - 8x + 8]$  | 205 | $V(-2, 1)$          | $P(0, 3)$            | $[y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3]$  |
| 202 | $V(0, 3)$ | $P(1, 2)$ | $[y = -x^2 + 3]$       |     |                     |                      |                                  |

## Equazione di una parabola, dato il vertice e un punto

### 197 ESERCIZIO GUIDATO

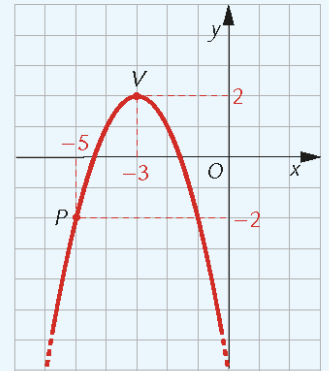
Determina l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse  $y$  che ha vertice in  $V(-3, 2)$  e passa per  $P(-5, -2)$ .

#### 1° modo

Imponi che la parabola abbia vertice in  $V$  e passi per  $P$ . Ottieni il sistema:

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = -3 & \text{L'ascissa di } V \text{ è } -3 \\ 9a - 3b + c = 2 & \text{Passaggio per } V \\ 25a - 5b + c = -2 & \text{Passaggio per } P \end{cases}$$

Risolvendo il sistema trovi che  $a = \dots$ ,  $b = \dots$  e  $c = \dots$  quindi la parabola cercata ha equazione  $y = -x^2 - 6x - 7$ .



**Nota** Invece di porre la condizione  $-\frac{b}{2a} = -3$  (l'ordinata del vertice è 2), ti abbiamo suggerito di porre la condizione equivalente del passaggio per  $V$ , perché così ottieni un'equazione di primo grado anziché di secondo.

#### 2° modo

Ricorda che una parabola di vertice  $V(x_v, y_v)$  ha equazione del tipo  $y - y_v = a(x - x_v)^2$ .

Poiché la parabola in figura ha vertice in  $V(-3, 2)$ , la sua equazione sarà del tipo  $y - 2 = a[x - (-3)]^2$  ossia:

$$y = a(x + 3)^2 + 2$$

Imponi ora il passaggio per il punto  $P(-5, -2)$ . Otterrai l'equazione:

$$-2 = a(-5 + 3)^2 + 2$$

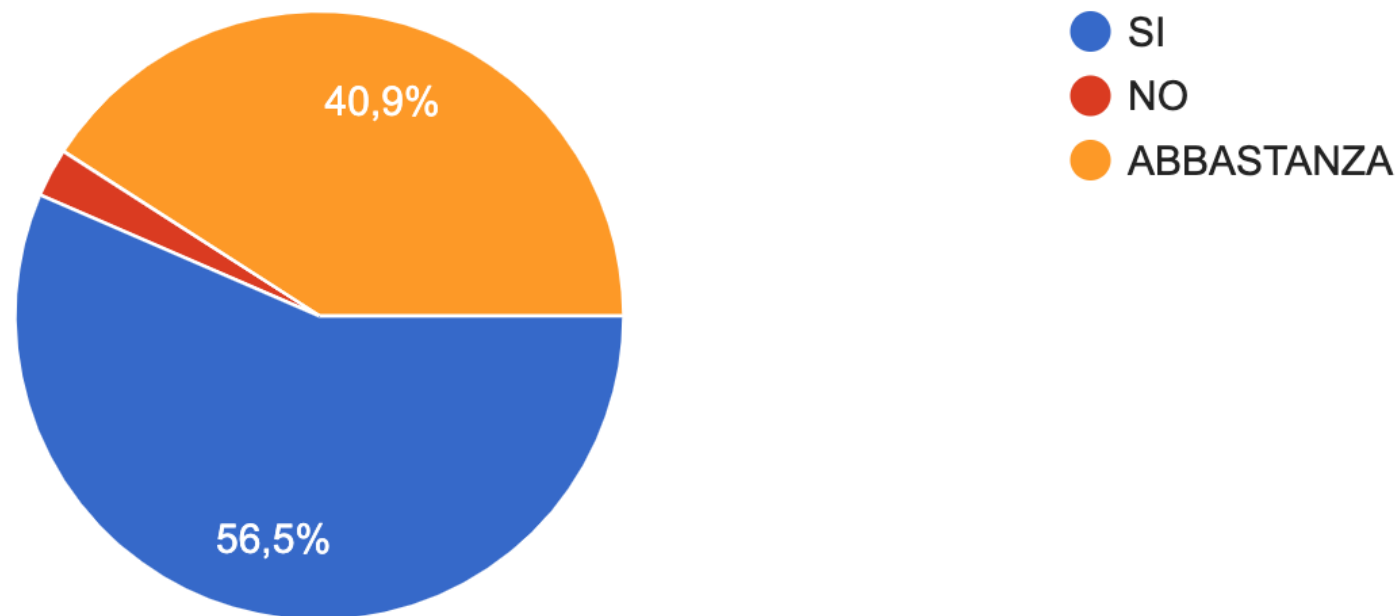
da cui  $a = \dots$  quindi l'equazione della parabola è  $y = -x^2 - 6x - 7$ .

$$[y = -x^2 - 6x - 7]$$

## GLI STUDENTI E IL LORO LIBRO DI MATEMATICA

Se sì, sono stati utili?

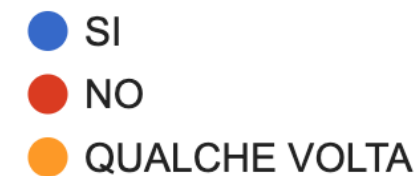
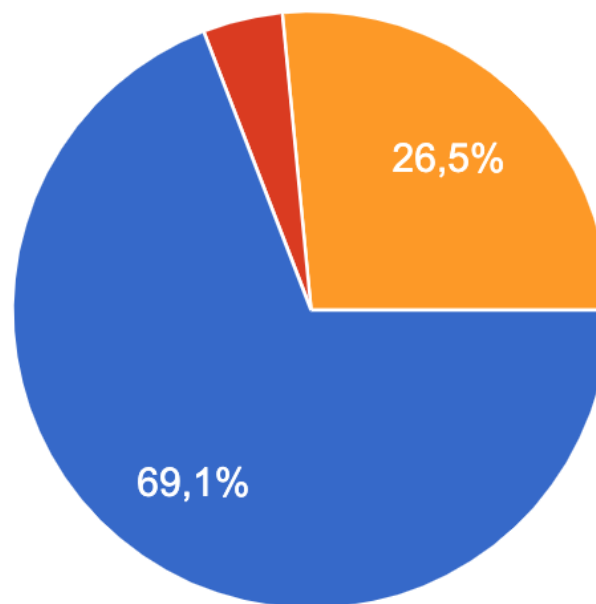
154 risposte



## GLI STUDENTI E IL LORO LIBRO DI MATEMATICA

Leggi le pagine di teoria?

162 risposte



# Circonferenza

 **Problem solving con calcolatrice Casio**

 **Prove intermedie di verifica**

 **Figure animate**

 **Con GeoGebra**

 **Videolezioni**

 **Esercizi interattivi**

## 1. L'equazione della circonferenza

### L'equazione della circonferenza dati il centro e il raggio

Nel biennio hai studiato la circonferenza dal punto di vista *sintetico* (cioè nel piano *euclideo*); in questa Unità riprendiamo lo studio di tale figura, affrontandolo questa volta dal punto di vista *analitico* (cioè nel piano *cartesiano*). Ricordiamo anzitutto la definizione di circonferenza come luogo geometrico.

#### DEFINIZIONE | Circonferenza

Si dice **circonferenza** di **centro**  $C$  e **raggio**  $r$  il luogo dei punti del piano la cui distanza da  $C$  è  $r$ .

In un piano cartesiano, qual è l'equazione di una circonferenza di centro  $C(x_0, y_0)$  e raggio  $r$ ? Per rispondere a questa domanda dobbiamo tradurre in un'equazione la proprietà caratteristica dei punti della circonferenza. Procediamo nel seguente modo.

1. Consideriamo un generico punto  $P(x, y)$  del piano.
2. Osserviamo che  $P$  appartiene alla circonferenza di centro  $C(x_0, y_0)$  e raggio  $r$  se e solo se  $\overline{PC} = r$  (Fig. 1).
3. Ricordando la formula della distanza tra due punti, ciò si traduce analiticamente nella condizione:

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r$$

$\overline{PC}$

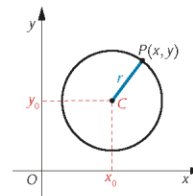


Figura 1

I due membri di questa equazione sono non negativi, quindi possiamo elevarli al quadrato, trovando l'equazione equivalente:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

#### TEOREMA 1 | Equazione della circonferenza, dati il centro e il raggio

L'equazione della circonferenza di centro  $C(x_0, y_0)$  e raggio  $r$  è:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \quad [1]$$

#### ESEMPIO | Equazione della circonferenza, dati centro e raggio

Scriviamo l'equazione della circonferenza di centro  $C(-1, 1)$  e raggio 2.

Applicando la [1] si trova che la circonferenza di centro  $C(-1, 1)$  e raggio 2 ha equazione:

$$(x - (-1))^2 + (y - 1)^2 = 2^2$$

ovvero, semplificando:

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0.$$

La circonferenza è rappresentata in Fig. 2.

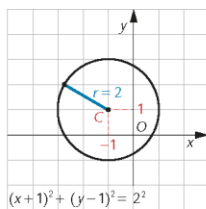


Figura 2

## L'equazione della circonferenza in forma normale

Sviluppando i quadrati, l'equazione

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

diventa:

$$x^2 - 2x_0x + x_0^2 + y^2 - 2y_0y + y_0^2 = r^2$$

ossia, riordinando i termini:

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0$$

Le tre espressioni che abbiamo evidenziato in rosso rappresentano tre numeri reali, che possiamo indicare rispettivamente con  $a$ ,  $b$  e  $c$ :

$$-2x_0 = a, \quad -2y_0 = b, \quad x_0^2 + y_0^2 - r^2 = c \quad [2]$$

In questo modo l'equazione della circonferenza assume la forma:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \quad [3]$$

che viene detta **equazione normale** o **equazione canonica** della circonferenza.

Abbiamo fin qui provato che nel piano cartesiano ogni circonferenza ha equazione del tipo [3], con  $a$ ,  $b$  e  $c$  numeri reali opportuni. Viceversa, ogni equazione della forma [3] è l'equazione di una circonferenza?

Per rispondere a questa domanda dobbiamo chiederci se la [3] si può sempre scrivere nella forma [1]. Ciò equivale al seguente problema algebrico: risolvendo le formule [2] rispetto a  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $r$ , si trovano sempre delle soluzioni reali? Proviamo a fare i calcoli. Risolvendo le [2] rispetto a  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $r$ , otteniamo:

$$x_0 = -\frac{a}{2}, \quad y_0 = -\frac{b}{2}$$

$$r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - c} = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

Da queste relazioni ci accorgiamo che la [3] rappresenta una circonferenza purché sia verificata la condizione:

$$\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c \geq 0 \quad \text{che equivale a} \quad a^2 + b^2 - 4c \geq 0$$

altrimenti il raggio non esiste e l'equazione [3] non rappresenta alcun luogo.

#### TEOREMA 2 | Equazione di una circonferenza in forma normale

Un'equazione algebrica di secondo grado del tipo:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0, \text{ con } a, b, c \in \mathbb{R}$$

rappresenta una **circonferenza** (eventualmente degenera nel centro) se e solo se è verificata la condizione:

$$a^2 + b^2 - 4c \geq 0$$

In tal caso il **centro** e il **raggio** sono dati, rispettivamente, dalle formule (Fig. 3):

$$C\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right); \quad r = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

#### ATTENZIONE!

Se  $a^2 + b^2 - 4c = 0$ , il raggio della circonferenza è **nullo**. La circonferenza si riduce a un unico punto, il suo centro. Si parla in questo caso di circonferenza **degenere**.



**Con GeoGebra**  
La circonferenza nel piano cartesiano

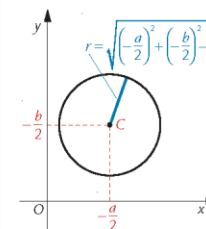
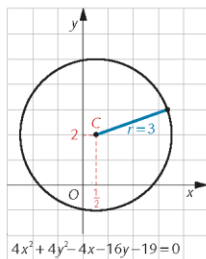
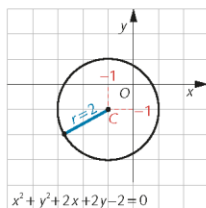


Figura 3



#### OSSERVA

Come puoi renderti conto dagli esempi, l'equazione  $mx^2 + ny^2 + ax + by + c = 0$  (con  $m \neq 0$  e  $n \neq 0$ ) può rappresentare una circonferenza solo a condizione che sia  $m = n$ .

#### ESEMPI Dall'equazione della circonferenza al grafico

Determiniamo quali delle seguenti equazioni rappresentano una circonferenza e, in caso affermativo, rappresentiamole graficamente dopo averne individuato centro e raggio.

- $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 = 0$
- $x^2 + y^2 + 2x - 3y + 4 = 0$
- $4x^2 + 4y^2 - 4x - 16y - 19 = 0$
- $2x^2 + 4y^2 - 4x - 16y - 19 = 0$

a. I coefficienti dell'equazione sono  $a = 2$ ,  $b = 2$ ,  $c = -2$ . Poiché

$$a^2 + b^2 - 4c = 2^2 + 2^2 - 4 \cdot (-2) = 16 > 0$$

l'equazione rappresenta una circonferenza, di centro:

$$C\left(-\frac{2}{2}, -\frac{2}{2}\right) \quad \text{ossia} \quad C(-1, -1)$$

e raggio  $r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 - (-2)} = 2$ .

b. I coefficienti dell'equazione sono  $a = 2$ ,  $b = -3$ ,  $c = 4$ . Poiché

$$a^2 + b^2 - 4c = 2^2 + (-3)^2 - 4 \cdot 4 = -3 < 0$$

l'equazione data **non** rappresenta una circonferenza.

c. Osserva l'equazione:

$$4x^2 + 4y^2 - 4x - 16y - 19 = 0$$

I due termini di secondo grado hanno coefficienti uguali a 4

Dividendo entrambi i membri dell'equazione per 4, otteniamo l'equazione:

$$x^2 + y^2 - x - 4y - \frac{19}{4} = 0$$

Riconosciamo così una possibile equazione di una circonferenza in forma normale. In base alle note formule, ricaviamo che il centro della circonferenza è il punto  $C\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ , mentre il raggio è:

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (2)^2 - \left(-\frac{19}{4}\right)} = \sqrt{\frac{1}{4} + 4 + \frac{19}{4}} = \sqrt{9} = 3$$

Si tratta dunque dell'equazione di una circonferenza.

d. Osserva l'equazione:

$$2x^2 + 4y^2 - 4x - 16y - 19 = 0$$

I due termini di secondo grado hanno coefficienti diversi tra loro

Non si tratta perciò dell'equazione di una circonferenza.

#### Equazioni di circonferenze particolari

È importante osservare che ciascuno dei tre coefficienti  $a$ ,  $b$  o  $c$  dell'equazione di una circonferenza in forma canonica può essere *nullo*. In corrispondenza dell'annullarsi di uno o più di tali coefficienti si possono presentare i casi riassunti in Tab. 1 (escludendo i casi degeneri).

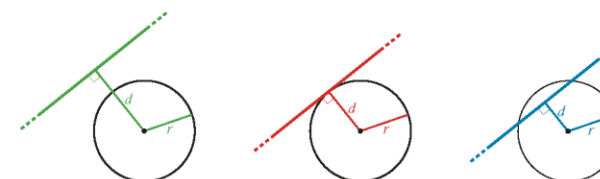
Tabella 1

|                                                                                                                              |                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Se $a = 0$ , l'equazione della circonferenza è $x^2 + y^2 + by + c = 0$ , quindi $C\left(0, -\frac{b}{2}\right)$ .           | Se $b = 0$ , l'equazione della circonferenza è $x^2 + y^2 + ax + c = 0$ , quindi $C\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$ .                                 | Se $c = 0$ , l'equazione della circonferenza è $x^2 + y^2 + ax + by = 0$ , quindi è soddisfatta dalle coordinate di $O(0, 0)$ .                    |
|                                                                                                                              |                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                    |
| La circonferenza ha il centro sull'asse y.                                                                                   | La circonferenza ha il centro sull'asse x.                                                                                                         | La circonferenza passa per l'origine.                                                                                                              |
| Se $a = b = 0$ , l'equazione della circonferenza è $x^2 + y^2 + c = 0$ .                                                     | Se $b = c = 0$ , l'equazione della circonferenza è $x^2 + y^2 + ax = 0$ .                                                                          | Se $a = c = 0$ , l'equazione della circonferenza è $x^2 + y^2 + by = 0$ .                                                                          |
|                                                                                                                              |                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                    |
| Il centro deve appartenere sia all'asse y (perché $a = 0$ ) sia all'asse x (perché $b = 0$ ), quindi coincide con l'origine. | La circonferenza ha il centro sull'asse x (perché $b = 0$ ) e passa per l'origine (perché $c = 0$ ). La circonferenza risulta tangente all'asse y. | La circonferenza ha il centro sull'asse y (perché $a = 0$ ) e passa per l'origine (perché $c = 0$ ). La circonferenza risulta tangente all'asse x. |

## 2. La circonferenza e la retta

### Posizioni reciproche di una retta e una circonferenza dal punto di vista geometrico

Consideriamo, nel piano cartesiano, una *circonferenza* e una *retta*. Sappiamo dalla geometria che una retta si dice *esterna*, *tangente* o *secante* a una circonferenza rispettivamente se non incontra la circonferenza, la incontra in un punto (ovvero in due punti coincidenti) oppure la incontra in due punti distinti. Queste tre situazioni si verificano a seconda che la distanza della retta dal centro della circonferenza sia rispettivamente *maggiore*, *uguale* o *minore* del raggio della circonferenza (Fig. 4).



a. La retta è *esterna* se e solo se  $d > r$ .  
b. La retta è *tangente* se e solo se  $d = r$ .  
c. La retta è *secante* se e solo se  $d < r$ .

Figura 4

Esercizi p. 408

# RICORDA

La distanza  $d$  del punto  $P(x_0, y_0)$  dalla retta di equazione  $ax + by + c = 0$  è espressa dalla formula:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Per stabilire la reciproca posizione di una retta e una circonferenza di date equazioni, basta quindi confrontare il raggio della circonferenza con la distanza del centro della circonferenza dalla retta.

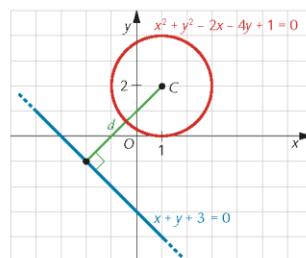
## ESEMPIO Posizione reciproca tra una retta e una circonferenza

Stabiliamo se la retta di equazione  $x + y + 3 = 0$  è esterna, tangente o secante rispetto alla circonferenza di equazione  $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ .

La circonferenza ha centro  $C(1, 2)$  e raggio  $r = 2$ .  
Determiniamo la distanza  $d$  di  $C$  dalla retta:

$$d = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

Poiché  $d > r$ , concludiamo che la retta è *esterna* alla circonferenza.



## Posizioni reciproche di una retta e una circonferenza dal punto di vista analitico

Come si possono tradurre le condizioni geometriche riassunte poc'anzi in termini *analitici*? Sappiamo che l'equazione di una circonferenza è del tipo:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

mentre l'equazione di una retta è del tipo:

$$y = mx + q \quad \text{o} \quad x = k$$

Il problema di determinare i punti d'intersezione tra la circonferenza e la retta si traduce allora, dal punto di vista analitico, nel risolvere il sistema formato dalle loro equazioni:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ y = mx + q \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ x = k \end{cases}$$

Per sostituzione, si può facilmente pervenire all'*equazione risolvente* del sistema, che risulterà di *secondo* grado. Indicato con  $\Delta$  il discriminante di tale equazione, a seconda che risulti:

$$\Delta < 0 \quad \Delta = 0 \quad \Delta > 0$$

la retta sarà rispettivamente:

$$\text{esterna} \quad \text{tangente} \quad \text{secante}$$

rispetto alla circonferenza.

Graficamente, le situazioni che possono presentarsi sono quelle illustrate nelle Figg. 5 e 6.

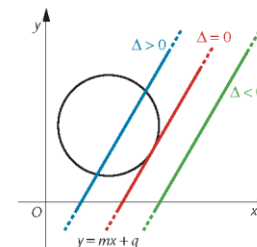


Figura 5

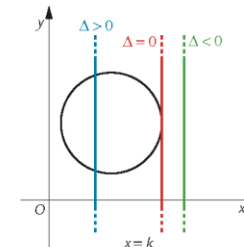


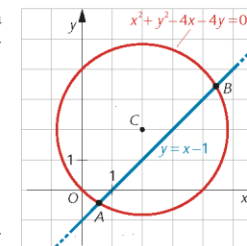
Figura 6

## ESEMPIO Punti d'intersezione tra una retta e una circonferenza

Verifichiamo che la circonferenza di equazione  $x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0$  e la retta di equazione  $y = x - 1$  sono secanti e determiniamo i loro punti d'intersezione.

### • Verifica grafica

Tracciando il grafico della circonferenza e della retta, si vede che la retta interseca la circonferenza in due punti distinti  $A$  e  $B$ .



### • Verifica algebrica

Impostiamo il sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0 \\ y = x - 1 \end{cases}$$

Per sostituzione, otteniamo l'equazione risolvente del sistema:

$$x^2 + (x - 1)^2 - 4x - 4(x - 1) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 10x + 5 = 0$$

Poiché  $\frac{\Delta}{4} = 15 > 0$ , il sistema ammette due soluzioni reali distinte, quindi la retta e la circonferenza sono *secanti*.

### • Calcolo delle coordinate dei punti d'intersezione

Concludendo la risoluzione del sistema, si trovano le soluzioni:

$$\begin{cases} x = \frac{5 - \sqrt{15}}{2} \\ y = \frac{3 - \sqrt{15}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{5 + \sqrt{15}}{2} \\ y = \frac{3 + \sqrt{15}}{2} \end{cases}$$

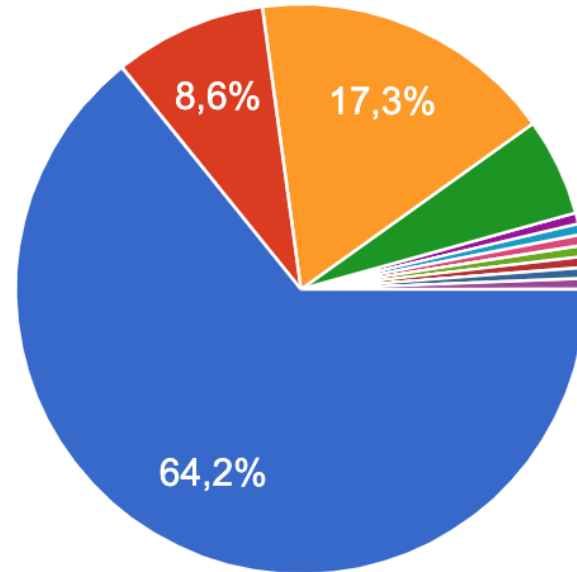
Pertanto i punti d'intersezione tra la retta e la circonferenza sono:

$$A\left(\frac{5 - \sqrt{15}}{2}, \frac{3 - \sqrt{15}}{2}\right) \quad \text{e} \quad B\left(\frac{5 + \sqrt{15}}{2}, \frac{3 + \sqrt{15}}{2}\right)$$

## GLI STUDENTI E IL LORO LIBRO DI MATEMATICA

Per ripassare, ti sono utili le mappe in fondo ad ogni capitolo?

162 risposte



- SI
- NO
- No, uso solo gli appunti
- No, mi creo una mappa mia
- Non le guardo perché reputo migliore...
- creo una mia mappa consultando il lib...
- Mi riguardo direttamente le pagine di t...
- Abbastanza



## Percorso delle idee

## Circonferenza

Unità 7

### Equazione di una circonferenza

#### In forma normale

L'equazione:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

rappresenta una circonferenza di centro

$$C\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) \text{ e raggio}$$

$$r = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

a condizione che questa espressione risulti  $\geq 0$

#### ESEMPIO

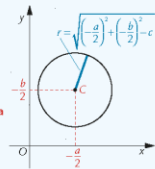
La circonferenza di equazione

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 3 = 0$$

ha centro  $C$  e raggio  $r$  dati da:

$$C\left(-\frac{-4}{2}, -\frac{2}{2}\right) \Rightarrow C(2, -1)$$

$$r = \sqrt{2^2 + (-1)^2 - (-3)} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$



#### Dati centro e raggio

L'equazione:

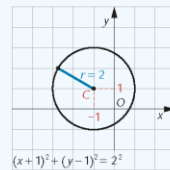
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Rappresenta la circonferenza di centro  $C(x_0, y_0)$  e raggio  $r$ .

#### ESEMPIO

La circonferenza che ha centro in  $C(-1, 1)$  e raggio  $r = 2$  ha equazione  $(x - (-1))^2 + (y - 1)^2 = 2^2$  cioè, svolgendo i calcoli:

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$$



### Metodi per individuarla

#### Algebrico

Si individuano i valori dei coefficienti  $a, b, c$  dell'equazione in forma normale della circonferenza resolvendo un opportuno sistema di equazioni.

#### ESEMPIO

La circonferenza di centro  $C(-3, 4)$  e passante per  $P(2, 1)$  si trova resolvendo il sistema:

$$\begin{cases} -\frac{a}{2} = -3 & \leftarrow \text{L'ascissa del centro deve essere } -3 \\ -\frac{b}{2} = 4 & \leftarrow \text{L'ordinata del centro deve essere } 4 \end{cases}$$

$$2^2 + 1^2 + a \cdot 2 + b \cdot 1 + c = 0$$

imponendo che la coppia  $(2, 1)$  soddisfi l'equazione  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

Si trova  $a = 6, b = -8, c = -9$ .

L'equazione è:

$$x^2 + y^2 + 6x - 8y - 9 = 0$$

#### Geometrico

Si individuano il centro e il raggio della circonferenza, poi si utilizza l'equazione:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

#### ESEMPIO

La circonferenza di centro  $C(-3, 4)$  passante per  $P(2, 1)$  ha raggio:

$$r = \overline{CP} = \sqrt{(2 - (-3))^2 + (1 - 4)^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$$

L'equazione della circonferenza è:

$$(x - (-3))^2 + (y - 4)^2 = (\sqrt{34})^2$$

Ossia, svolgendo i calcoli:

$$x^2 + y^2 + 6x - 8y - 9 = 0$$

### Circonferenza e retta

Data una circonferenza di raggio  $r$  e una retta, indichiamo con:

- $\Delta$  il discriminante dell'equazione risolvendo il sistema formato dalle equazioni della retta e della circonferenza;
- $d$  la distanza del centro della circonferenza dalla retta.

Ci sono tre possibili posizioni della retta rispetto alla circonferenza.

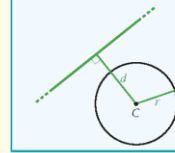
#### Retta esterna

Questo caso si verifica se e solo se:

$$\Delta < 0$$

oppure, equivalentemente, se e solo se:

$$d > r$$



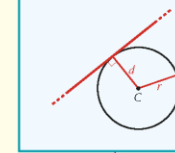
#### Retta tangente

Questo caso si verifica se e solo se:

$$\Delta = 0$$

oppure, equivalentemente, se e solo se:

$$d = r$$



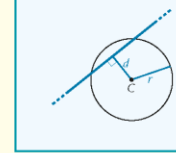
#### Retta secante

Questo caso si verifica se e solo se:

$$\Delta > 0$$

oppure, equivalentemente, se e solo se:

$$d < r$$



### Tangenti passanti per $P(x_0, y_0)$

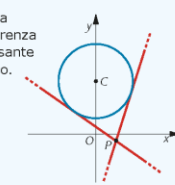
Esistono se  $P$  è esterno alla circonferenza (due tangenti) o se vi appartiene (una tangente).

#### $P$ è esterno alla circonferenza

Due metodi per determinarla:

- si impone che sia nullo il discriminante dell'equazione risolvendo il sistema formato dall'equazione della circonferenza e dall'equazione della generica retta passante per  $P$ ;
- si impone che la distanza del centro della circonferenza dalla generica retta passante per  $P$  sia uguale al raggio.

**N.B.** Il secondo metodo è di solito preferibile perché richiede meno calcoli.

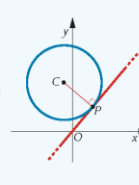


#### $P$ appartiene alla circonferenza

Due metodi per determinarla:

- si scrive l'equazione della retta passante per il punto  $P$  e perpendicolare alla retta  $CP$ ;
- si usa la formula di sdoppiamento.

**N.B.** I metodi adottati nel caso in cui  $P$  è esterno continuano a essere validi, ma non sono convenienti ai fini di risparmiare calcoli.



Che cosa ti ha spinto a scrivere un testo così attento alle esigenze dei docenti e degli studenti?

I ragazzi oggi hanno ancora bisogno delle dimostrazioni rigorose? Non è preferibile una maggiore comprensione e fruibilità dell'argomento piuttosto che insistere con il rigore?

# IL RIGORE

## «AL MOMENTO GIUSTO»

# IL RIGORE

## «A SECONDA DEL CONTESTO»

# Limiti di funzioni reali di variabile reale

## 1. Introduzione intuitiva al concetto di limite

### Esempi introduttivi al concetto di limite

In questo paragrafo vogliamo introdurre la prima fondamentale operazione del calcolo infinitesimale, quella di *limite*. Per avvicinarci a questo concetto, analizziamo insieme alcuni esempi, in cui cominciamo a familiarizzare con la nozione di limite a livello intuitivo.

#### ESEMPIO Limite finito quando $x$ tende a un valore finito

Consideriamo la funzione:

$$y = f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

e studiamo il suo comportamento quando  $x$  assume valori sempre più prossimi a 3.

##### • Analisi numerica

Osserviamo che la funzione non è definita per  $x = 3$ , tuttavia possiamo calcolarne le immagini per valori di  $x$  «vicini» a 3. Attribuito per esempio a  $x$  i valori indicati in tabella, con l'aiuto di una calcolatrice otteniamo i valori approssimati di  $y$  riportati.

| $x$ | 2,9 | 2,99 | 2,999 | 3            | 3,001 | 3,01 | 3,1 |
|-----|-----|------|-------|--------------|-------|------|-----|
| $y$ | 5,9 | 5,99 | 5,999 | Non definita | 6,001 | 6,01 | 6,1 |

→ 6 ←

Vediamo che quando la variabile  $x$  assume valori sempre più prossimi a 3 i corrispondenti valori di  $y$  si avvicinano sempre più a 6. Per esprimere questo comportamento della funzione in prossimità del valore  $x = 3$  scriviamo:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$$

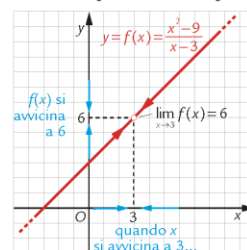
che si legge: «il limite della funzione  $f(x)$  per  $x$  che tende a 3 è 6».

##### • Interpretazione grafica

Si può avere conferma di questo comportamento della funzione anche tracciando il suo grafico; poiché

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = x + 3 \quad \text{per } x \neq 3$$

il grafico della funzione è una retta, privata del suo punto di ascissa 3.



**Approfondimenti**

**Matematica nella storia**

**Problem solving con calcolatrice Texas Instruments**  
 **Prove intermedie di verifica**

**Con GeoGebra**

**Videolezioni**

**Esercizi interattivi**

#### ESEMPIO Limite finito quando $x$ tende a infinito

Consideriamo la funzione:

$$y = f(x) = \frac{x - 1}{x + 1}$$

e studiamo il suo comportamento quando  $x$  assume valori positivi via via sempre più grandi.

##### • Analisi numerica

Attribuito per esempio a  $x$  i valori indicati in tabella, con l'aiuto di una calcolatrice otteniamo i valori approssimati di  $y$  riportati.

| $x$ | 100    | 200    | 300    | 400    | 500    | 1000   | 10 000 |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $y$ | 0,9802 | 0,9900 | 0,9934 | 0,9950 | 0,9960 | 0,9980 | 0,9998 |

→ 1

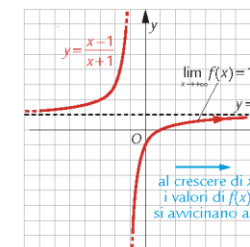
Vediamo così che quando la variabile  $x$  assume valori positivi sempre più grandi (si dice «tendenti a  $+\infty$ ») i corrispondenti valori di  $y$  si avvicinano sempre più a 1. Per esprimere questo comportamento della funzione scriviamo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

che si legge: «il limite della funzione  $f(x)$  per  $x$  che tende a più infinito è 1».

##### • Interpretazione grafica

Il grafico della funzione  $y = f(x) = \frac{x - 1}{x + 1}$  presenta la retta di equazione  $y = 1$  come asintoto orizzontale.



#### ESEMPIO Limite infinito quando $x$ tende a un valore finito

Consideriamo la funzione:

$$y = f(x) = \frac{1}{|x|}$$

e studiamo il suo comportamento quando la variabile  $x$  assume valori sempre più prossimi a 0.

##### • Analisi numerica

La funzione non è definita per  $x = 0$ , tuttavia possiamo calcolarne le immagini per valori di  $x$  «vicini» a 0. Attribuito per esempio a  $x$  i valori indicati in tabella otteniamo i valori di  $y$  riportati.

| $x$ | -0,1 | -0,01 | -0,001 | -0,0001 | 0            | 0,0001 | 0,001 | 0,01 | 0,1 |
|-----|------|-------|--------|---------|--------------|--------|-------|------|-----|
| $y$ | 10   | 100   | 1000   | 10 000  | Non definita | 10 000 | 1000  | 100  | 10  |

→ i valori di  $y$  diventano sempre più grandi ←

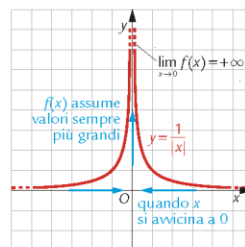
Vediamo così che quando  $x$  assume valori sempre più vicini a 0 i corrispondenti valori di  $y$  diventano sempre maggiori, ovvero «tendono a  $+\infty$ ». Scriveremo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

che si legge: «il limite della funzione  $f(x)$  per  $x$  che tende a 0 è più infinito».

• **Interpretazione grafica**

Il grafico della funzione  $y = f(x) = \frac{1}{|x|}$  presenta l'asse  $y$  come asintoto verticale.



**ESEMPIO** Limite infinito quando  $x$  tende a infinito

Consideriamo la funzione:

$$y = f(x) = 2^x$$

e studiamo il suo comportamento quando  $x$  assume valori positivi via via sempre più grandi.

• **Analisi numerica**

Attribuendo per esempio a  $x$  i valori indicati in tabella, con l'aiuto di una calcolatrice otteniamo i valori di  $y$  riportati.

| $x$ | 10   | 15     | 20        | 25         |
|-----|------|--------|-----------|------------|
| $y$ | 1024 | 32 768 | 1 048 576 | 33 554 432 |

i valori di  $y$  diventano (rapidamente) sempre più grandi

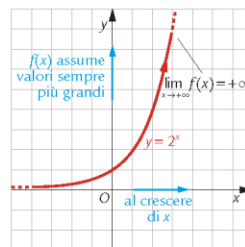
Vediamo così che quando la variabile  $x$  assume valori positivi via via più grandi (tendenti a  $+\infty$ ) anche i corrispondenti valori di  $y$  diventano sempre maggiori (ovvero tendono anch'essi a  $+\infty$ ). Scriveremo allora:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

che si legge: «il limite della funzione  $f(x)$  per  $x$  che tende a più infinito è più infinito».

• **Interpretazione grafica**

La funzione esaminata è una funzione esponenziale che, come è noto, al crescere di  $x$  assume valori che tendono «rapidamente» a  $+\infty$ .



Gli esempi esaminati sono esemplificazioni di ciascuno dei seguenti comportamenti che può avere una funzione quando  $x \rightarrow x_0$  oppure quando  $x \rightarrow \pm\infty$ .

| Descrizione del comportamento della funzione a parole                                                                                                                                                     | In simboli                                                                                                                                                                                               |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Al tendere di $x$ a $x_0$ , con $x_0 \in \mathbb{R}$ , la funzione tende a un valore finito $l$ .                                                                                                         | $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$                                                                                                                                                                      |
| Al tendere di $x$ a $x_0$ , con $x_0 \in \mathbb{R}$ , la funzione tende ad assumere valori positivi (negativi) via via più grandi in valore assoluto, ossia la funzione tende a $+\infty$ ( $-\infty$ ). | $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ oppure $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$                                                                                                               |
| Al tendere di $x$ a $+\infty$ ( $-\infty$ ) ossia via via che $x$ assume valori positivi (negativi) sempre più grandi in valore assoluto, $f(x)$ tende a un valore finito $l$ .                           | $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$<br>$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$                                                                                                                       |
| Al tendere di $x$ a $+\infty$ ( $-\infty$ ) ossia via via che $x$ assume valori positivi (negativi) sempre più grandi in valore assoluto, $f(x)$ tende a $+\infty$ oppure a $-\infty$ .                   | $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ oppure $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$<br>$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ oppure $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ |

Quando i due limiti di una funzione  $f(x)$  per  $x \rightarrow +\infty$  e  $x \rightarrow -\infty$  sono entrambi uguali a  $l$ , compendieremo le due scritture  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$  dicendo che  $f$  ammette come limite  $l$  per  $x \rightarrow \infty$  (senza precisare il segno dell'infinito) e scriveremo:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$ .

**Esempi introduttivi al concetto di limite destro e limite sinistro**

Per poter dire che il limite di una funzione per  $x \rightarrow x_0$ , con  $x_0 \in \mathbb{R}$ , è  $l$ , è necessario controllare che  $f(x)$  tenda a  $l$  sia quando  $x$  si avvicina a  $x_0$  per valori *minori* di  $x_0$  (ossia «da sinistra» rispetto a  $x_0$ ) sia quando  $x$  si avvicina a  $x_0$  per valori *maggiori* di  $x_0$  (ossia «da destra» rispetto a  $x_0$ ) (Fig. 1):



Figura 1

Può accadere che il comportamento della funzione «a destra» e «a sinistra» di  $x_0$  sia diverso, oppure che una funzione sia definita solo per valori maggiori o minori di  $x_0$  e che quindi abbia senso cercare il limite solo «da destra» o «da sinistra».

Per indagare queste situazioni si parla di **limite destro** e di **limite sinistro** e si scrive:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \quad \text{per indicare il limite sinistro} \quad \quad \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \quad \text{per indicare il limite destro}$$

**ESEMPIO** Limite destro e limite sinistro

Consideriamo la funzione  $f(x) = \frac{|x|}{x}$  e studiamo il suo comportamento quando  $x$  assume valori vicini a 0.

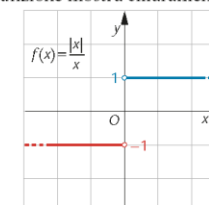
La funzione **non** è definita per  $x = 0$ . Il grafico della funzione mostra chiaramente il suo comportamento.

$$\text{Per } x > 0 \text{ abbiamo: } f(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$$

quindi  $f(x) \rightarrow 1$  per  $x \rightarrow 0^+$ .

$$\text{Invece per } x < 0 \text{ abbiamo: } f(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$$

quindi  $f(x) \rightarrow -1$  per  $x \rightarrow 0^-$ .



**OSSERVA**

Come puoi intuire dall'esempio qui a fianco, il limite di una funzione per  $x \rightarrow x_0$  esiste se e solo se i due limiti, destro e sinistro, esistono e sono uguali.

Esistono perciò i limiti destro e sinistro:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

Non esiste invece il limite della funzione per  $x \rightarrow 0$ , poiché i due limiti destro e sinistro sono diversi tra loro.

Quando i limiti di una funzione per  $x \rightarrow x_0^-$  e per  $x \rightarrow x_0^+$  sono entrambi infiniti, ma di segno opposto, cioè quando si verifica che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$$

si dice impropriamente (vedi la nota qui a fianco) che la funzione  $f$  ammette come limite  $\infty$  per  $x \rightarrow x_0$  (senza specificare il segno dell'infinito) e si scrive:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

Per esempio, consideriamo la funzione  $f(x) = \frac{1}{x}$  (Fig. 2) ed esaminiamo il comportamento nell'intorno dell'origine:

- se facciamo tendere  $x$  a 0 per valori positivi (ossia «da destra») vediamo che  $f(x) \rightarrow +\infty$ ;
- se facciamo tendere  $x$  a 0 per valori negativi (ossia «da sinistra») vediamo che  $f(x) \rightarrow -\infty$ .

Esistono dunque i limiti destro e sinistro, infiniti e di segno opposto tra loro:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

È dunque questo un caso in cui si scrive:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$$

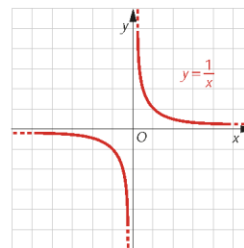


Figura 2

### Limiti e asintoti

Il concetto di limite ci permette di precisare i concetti di asintoto verticale e asintoto orizzontale.

#### DEFINIZIONE | Asintoto verticale

Si dice che la retta di equazione  $x = x_0$  è un **asintoto verticale** (bilatero) per la funzione  $y = f(x)$  se, al tendere di  $x$  a  $x_0$ , con  $x_0 \in \mathbb{R}$ , la funzione tende a  $-\infty$  o a  $+\infty$  o a  $\infty$  (Figg. 3, 4, 5).

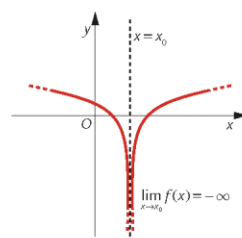


Figura 3

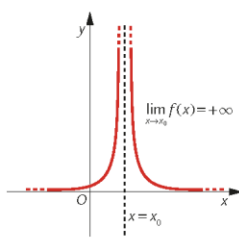


Figura 4

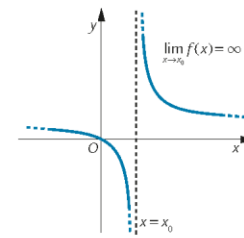


Figura 5

Se il limite è infinito solo per  $x \rightarrow x_0^-$  si parla più propriamente di **asintoto verticale sinistro** (Fig. 6); se il limite è infinito solo per  $x \rightarrow x_0^+$  si parla più propriamente di **asintoto verticale destro** (Fig. 7).

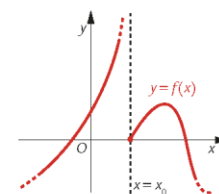


Figura 6

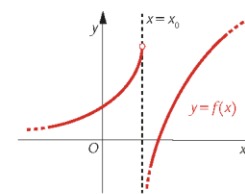


Figura 7

#### DEFINIZIONE | Asintoto orizzontale

Si dice che la retta di equazione  $y = l$  è un **asintoto orizzontale** per la funzione  $y = f(x)$  quando il limite della funzione per  $x$  che tende a  $-\infty$  o a  $+\infty$  o a  $\infty$  è uguale a  $l$  (Figg. 8, 9, 10).

Se il limite è  $l \in \mathbb{R}$  solo per  $x \rightarrow -\infty$  (Fig. 8) si parla più propriamente di **asintoto orizzontale sinistro**; se il limite è  $l$  solo per  $x \rightarrow +\infty$  (Fig. 9) si parla più propriamente di **asintoto orizzontale destro**. Se infine il limite è  $l$  sia per  $x \rightarrow -\infty$  sia per  $x \rightarrow +\infty$  si parla di **asintoto orizzontale bilatero** (Fig. 10).

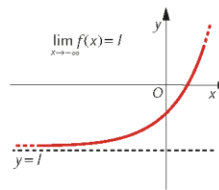


Figura 8

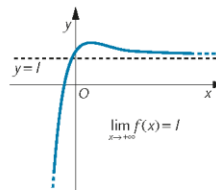


Figura 9

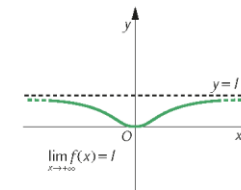
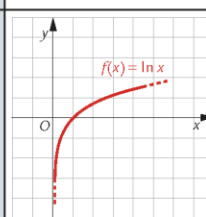
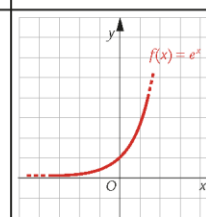
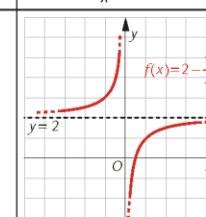


Figura 10

#### ESEMPIO | Asintoti e limiti

| Funzione                             | $f(x) = \ln x$                                                                       | $f(x) = e^x$                                                                         | $f(x) = 2 - \frac{1}{x}$                                                                                                                                                       |
|--------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Grafico                              |  |  |                                                                                            |
| Asintoti                             | La retta $x = 0$ (asse $y$ ) è un asintoto verticale destro.                         | La retta $y = 0$ (asse $x$ ) è un asintoto orizzontale sinistro.                     | La retta $x = 0$ (asse $y$ ) è asintoto verticale bilatero. La retta $y = 2$ è asintoto orizzontale bilatero.                                                                  |
| Scrittura con la notazione di limite | $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$                                            | $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$                                              | $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$<br>$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ |

“Il rigore matematico è molto semplice. Esso sta nell’affermare tutte cose vere, e nel non affermare cose che sappiamo non vere. *Non* sta nell’affermare tutte le verità possibili.”

(G. Peano)

Quale linguaggio preferire oggi  
nell'apprendimento e quali risorse potremmo  
indicare agli studenti perché non si perdano  
nelle maglie del web?

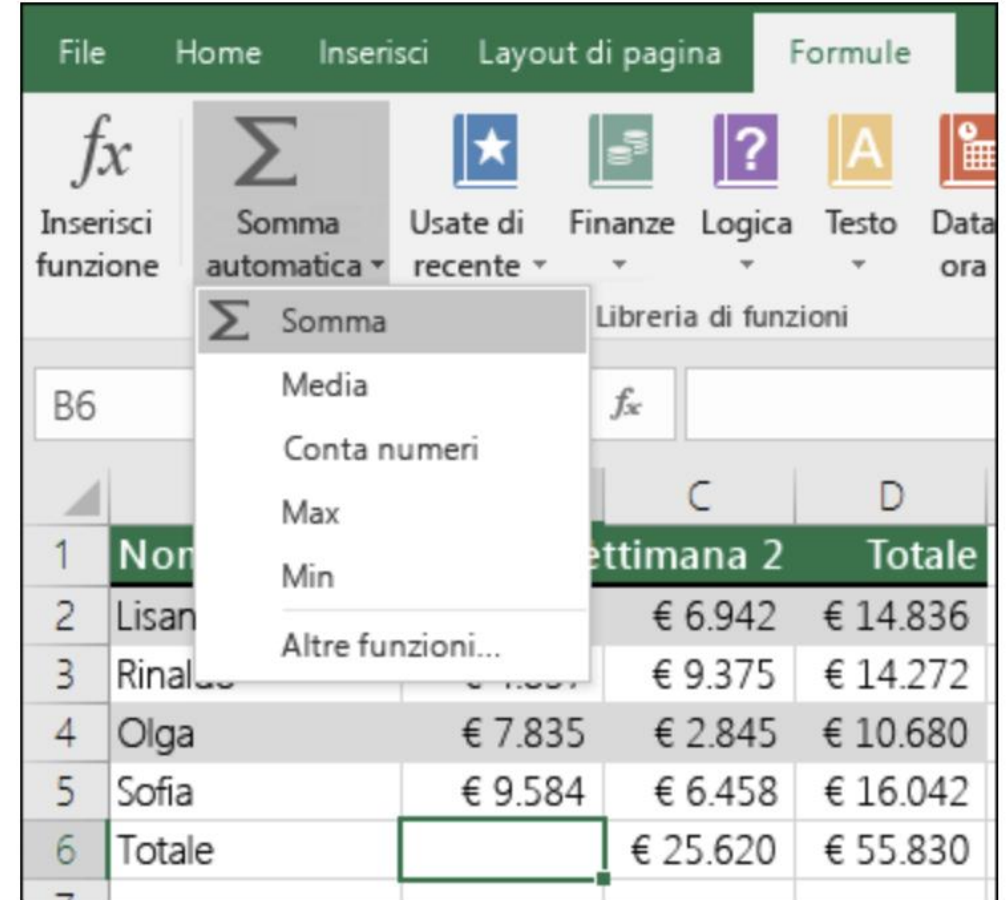
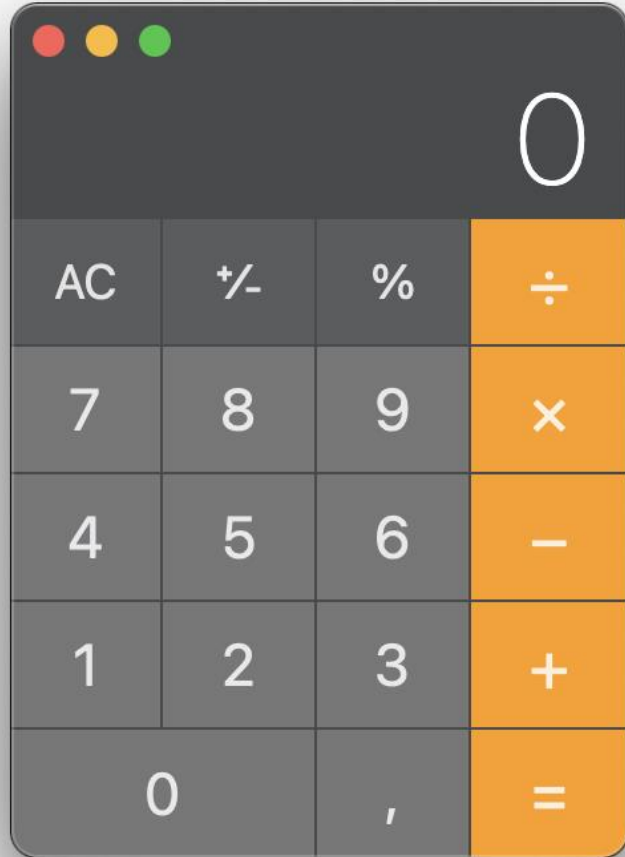
# LINGUAGGI NON VERBALI



Intuizioni

Analogie

Immagini mentali



# VISUALIZZAZIONE ED ESPLORAZIONE DINAMICA DEI CONCETTI

# Congruenza nei triangoli

## 1. Triangoli

### Terminologia

In questa Unità ci occuperemo principalmente di studiare la relazione di congruenza applicata ai triangoli, cioè ai poligoni di tre lati. Prima di entrare nel «vivo» della questione, introduciamo qualche nuova definizione.

Premettiamo che un triangolo di vertici  $A$ ,  $B$  e  $C$  verrà indicato con il simbolo  $ABC$ . In alcune applicazioni gli angoli (interni) di un triangolo vengono indicati con le tre lettere greche  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e i lati con le lettere  $a$ ,  $b$  e  $c$ , come indicato in Fig. 1.

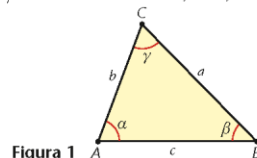


Figura 1

Inoltre:

Tabella 1

|                                                                                                                                           |                                                                                                                                  |                                                                                                                   |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Un lato di un triangolo si dice <b>opposto</b> all'angolo il cui vertice non appartiene al lato e <b>adiacente</b> agli altri due angoli. | Un angolo di un triangolo si dice <b>opposto</b> al lato che non contiene il suo vertice e <b>adiacente</b> agli altri due lati. | Un angolo si dice <b>compreso</b> tra due lati di un triangolo se questi ultimi appartengono ai lati dell'angolo. |
|                                                                                                                                           |                                                                                                                                  |                                                                                                                   |
| $AB$ è<br>• opposto a $\gamma$<br>• adiacente ad $\alpha$ e $\beta$                                                                       | $\alpha$ è<br>• opposto a $BC$<br>• adiacente ad $AB$ e $AC$                                                                     | $\gamma$ è compreso tra i lati $AC$ e $BC$                                                                        |

### Classificazione dei triangoli

Si possono classificare i triangoli in base ad alcune caratteristiche dei loro lati oppure in base ad alcune caratteristiche dei loro angoli.

La classificazione in base ai **lati** distingue tre casi. Un triangolo si dice:

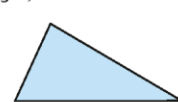
- **equilatero** se tutti e tre i suoi lati sono congruenti (Fig. 2);
- **isoscele** se (almeno) due suoi lati sono congruenti (Fig. 3);
- **scaleno** se i suoi lati sono a due a due non congruenti (Fig. 4).



triangolo equilatero  
Figura 2



triangolo isoscele  
Figura 3



triangolo scaleno  
Figura 4

- Approfondimenti
- Con GeoGebra
- Videolezioni
- Esercizi interattivi



Con GeoGebra  
Classificazione dei triangoli

Anche la classificazione in base agli angoli prevede tre casi. Un triangolo si dice:

- **acutangolo** se ha tutti gli angoli acuti (Fig. 5);
- **rettangolo** se ha un angolo retto (Fig. 6);
- **ottusangolo** se ha un angolo ottuso (Fig. 7).

In un triangolo rettangolo il lato opposto all'angolo retto si chiama **ipotenusa** del triangolo, mentre gli altri due lati si chiamano **cateti**.



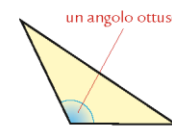
triangolo acutangolo

Figura 5



triangolo rettangolo

Figura 6



triangolo ottusangolo

Figura 7

Nelle Figg. 8 e 9 è data una rappresentazione, tramite diagrammi di Venn, rispettivamente della classificazione dei triangoli in base ai lati e agli angoli.

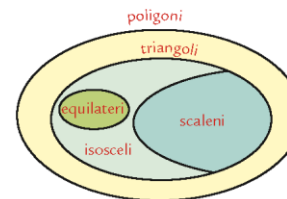


Figura 8

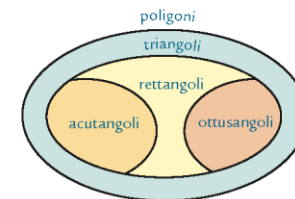


Figura 9

### OSSERVA

La classificazione dei triangoli in base agli angoli induce nell'insieme dei triangoli una partizione (come giustificheremo nel Paragrafo 5); ciò non accade invece per la classificazione dei triangoli in base ai lati: infatti i triangoli equilateri sono particolari triangoli isosceli.

### Segmenti notevoli di un triangolo

Dato un triangolo, si possono tracciare alcuni segmenti di particolare importanza, ai quali si danno dei nomi speciali. Precisamente:

- si chiama **bisettrice** di un angolo di un triangolo il segmento costituito dai punti della bisettrice di quell'angolo che appartengono al triangolo (Fig. 10);
- si chiama **mediana** il segmento che congiunge un vertice del triangolo con il punto medio del lato opposto (Fig. 11);
- si chiama **altezza** relativa a un lato il segmento avente un estremo nel vertice opposto a quel lato e l'altro estremo sul lato stesso (o sul suo prolungamento), che forma con quest'ultimo due angoli retti (Fig. 12).

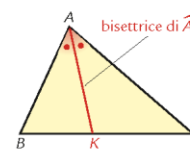


Figura 10

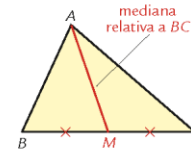


Figura 11

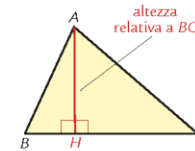


Figura 12

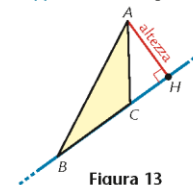


Figura 13

Esercizi p. 766

## 2. Primo e secondo criterio di congruenza

### Congruenza nei triangoli

Ora che abbiamo introdotto la principale terminologia sui triangoli, possiamo tornare al problema di cui vogliamo occuparci in questa Unità: lo studio della relazione di congruenza nell'insieme dei triangoli.

Iniziamo a precisare quando due triangoli si dicono congruenti.

#### DEFINIZIONE | Triangoli congruenti

Due triangoli si dicono **congruenti** se hanno ordinatamente congruenti i lati e gli angoli.

La congruenza tra due triangoli viene dunque definita, come è naturale, tramite la congruenza dei lati e degli angoli. C'è però un particolare cui devi prestare attenzione, l'avverbio «ordinatamente»: esso sta a indicare che a ogni elemento del primo triangolo corrisponde un elemento a esso congruente nel secondo, e le coppie di elementi congruenti non possono essere disposte casualmente. Infatti, lati congruenti devono essere opposti ad angoli congruenti e viceversa (come indicato dall'uso del colore in Fig. 14). Chiameremo **corrispondenti** gli angoli opposti a lati congruenti o i lati opposti ad angoli congruenti.

Per controllare se due triangoli sono congruenti, in base alla definizione precedente, dovremmo eseguire *sei* confronti: tra le tre coppie di angoli e tra le tre coppie di lati. È possibile semplificare il problema? Cioè, è possibile stabilire delle condizioni «più economiche» che garantiscano la congruenza di due triangoli?

Come vedremo, la risposta è affermativa: è sufficiente controllare la congruenza di *tre* coppie di elementi, *opportunitamente* scelti. Presta attenzione: non è detto che, in generale, la congruenza di *tre* coppie di elementi garantisca la congruenza dei triangoli; gli elementi devono essere scelti, appunto, *opportunitamente*. Per esempio, se due triangoli hanno ordinatamente congruenti i tre angoli, **non** è detto che siano congruenti, come puoi renderti conto osservando la Fig. 15: i due triangoli  $ABC$  e  $A'B'C'$  hanno i tre angoli ordinatamente congruenti ma **non** sono congruenti.

#### PER SAPERNE DI PIÙ | Poligoni congruenti

La definizione di *triangoli* congruenti si può estendere in modo naturale ai *poligoni*. Occorre tuttavia prestare attenzione al seguente aspetto: per i poligoni, non ha più senso parlare di lati e angoli opposti, perciò l'avverbio «ordinatamente» va inteso con un significato più generale. Esso sta a indicare che a ogni elemento del primo poligono corrisponde un elemento a esso congruente nel secondo (per stabilire quali sono gli elementi corrispondenti, bisogna prima ordinare i lati dei due poligoni in modo opportuno). Quindi il primo lato (il secondo lato, il terzo lato, ecc.) del primo poligono deve essere congruente al primo lato (secondo lato, terzo lato, ecc.) del secondo poligono e analogamente il primo angolo (secondo angolo, terzo angolo, ecc.) del primo poligono deve essere congruente al primo angolo (secondo angolo, terzo angolo, ecc.) del secondo poligono.

#### Primo criterio di congruenza per i triangoli

Supponiamo che due triangoli  $ABC$  e  $A'B'C'$  abbiano ordinatamente congruenti *due lati e l'angolo tra essi compreso* (Fig. 16). Immaginiamo che i due triangoli siano ritagli di carta. Dal momento che  $\hat{B} \cong \hat{B}'$  possiamo, con un movimento rigido, portare l'angolo  $\hat{A}BC$  a sovrapporsi all'angolo  $\hat{A}'B'C'$ , in modo che:

- $B$  si sovrapponga a  $B'$ ;
- la semiretta di origine  $B$  cui appartiene il lato  $AB$  si sovrapponga alla semiretta di origine  $B'$  cui appartiene il lato  $A'B'$ ;
- la semiretta di origine  $B$  cui appartiene il lato  $BC$  si sovrapponga alla semiretta di origine  $B'$  cui appartiene il lato  $B'C'$ .

Poiché stiamo supponendo  $AB \cong A'B'$ ,  $A$  andrà a sovrapporsi ad  $A'$ . Analogamente, poiché  $BC \cong B'C'$ , anche  $C$  andrà a sovrapporsi a  $C'$ . I tre vertici dei due triangoli si sovrappongono: concludiamo che i due triangoli sono congruenti.

#### MODI DI DIRE

Gli elementi corrispondenti di un triangolo vengono chiamati anche **elementi omologhi**.

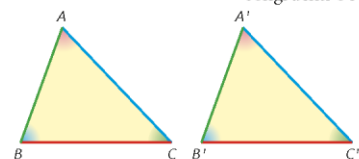


Figura 14

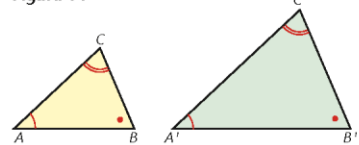


Figura 15

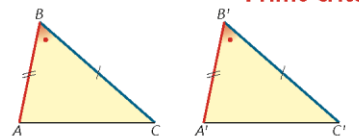


Figura 16

I ragionamenti che abbiamo presentato sono sostanzialmente quelli adottati da Euclide, nei suoi *Elementi*, per «dimostrare» che due triangoli che hanno due lati e l'angolo compreso ordinatamente congruenti sono congruenti. Abbiamo posto il verbo *dimostrare* tra virgolette poiché, in realtà, non si tratta di una vera e propria dimostrazione, ma solo di ragionamenti *intuitivi*. Abbiamo motivo di credere che Euclide stesso non fosse soddisfatto della sua argomentazione, perché in seguito evitò di utilizzare il concetto di movimento rigido e di sovrapposizione. La critica moderna ha provato che l'argomentazione precedente non può essere accettata come dimostrazione, a meno di non avere preventivamente fissato un sistema di assiomi che garantisca l'esistenza dei movimenti rigidi. Poiché anche noi non abbiamo assunto un tale sistema di assiomi, dobbiamo accettare la proposizione cui siamo giunti come assioma.

#### ASSIOMA 1 | Primo criterio di congruenza per i triangoli

Due triangoli che hanno ordinatamente congruenti **due lati e l'angolo tra di essi compreso** sono congruenti.

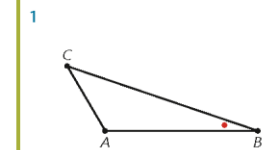
Il primo criterio di congruenza viene anche chiamato criterio LAL, perché riguarda la terna di elementi Lato-Angolo-compreso-Lato.

Esso è di importanza fondamentale nella geometria euclidea: ti renderai conto, infatti, che ricorrerà molto spesso nelle varie dimostrazioni.

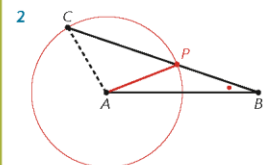
#### ATTENZIONE!

L'ipotesi che i due triangoli abbiano congruenti gli angoli *compresi* tra i due lati congruenti è essenziale. Infatti esistono triangoli che hanno ordinatamente congruenti due lati e un angolo, ma **non** sono tra loro congruenti: osserva la Costruzione 1.

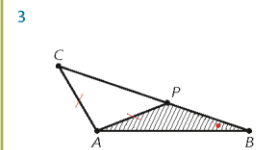
#### COSTRUZIONE 1



Consideriamo un triangolo ottusangolo  $ABC$  con l'angolo  $\hat{B}AC$  ottuso.



Tracciamo la circonferenza avente centro in  $A$ , passante per  $C$  e indichiamo con  $P$  il suo punto di intersezione con  $BC$ .



I triangoli  $ABC$  e  $ABP$  hanno due lati e un angolo ordinatamente congruenti ( $AB$  è in comune,  $AC \cong AP$  e  $\hat{ABC} \cong \hat{ABP}$ ) ma **non** sono, evidentemente, congruenti.

#### Secondo criterio di congruenza per i triangoli

Ora possiamo enunciare e dimostrare il secondo criterio di congruenza.

#### TEOREMA 1 | Secondo criterio di congruenza per i triangoli

Due triangoli che hanno ordinatamente congruenti **un lato e i due angoli a esso adiacenti** sono congruenti.

**IPOTESI**  $\alpha \cong \alpha', \beta \cong \beta', BC \cong B'C'$  (Fig. 17)

**TESI**  $ABC \cong A'B'C'$

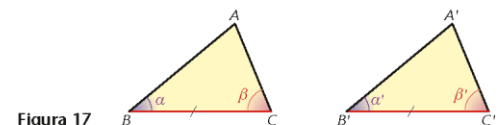


Figura 17



Con GeoGebra

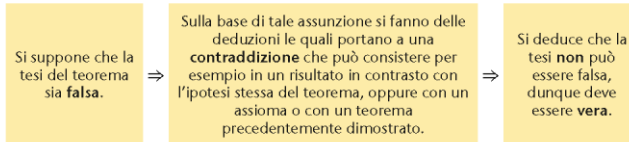
Primo criterio di congruenza per i triangoli



Con GeoGebra

Secondo criterio di congruenza per i triangoli

Nella dimostrazione di questo teorema, utilizzeremo un particolare schema di ragionamento, detto **dimostrazione per assurdo**, che si può così illustrare:



#### DIMOSTRAZIONE

Supponiamo, **per assurdo**, che i due triangoli **non** siano congruenti: allora  $AB > A'B'$  o  $AB < A'B'$  (non può essere  $AB \cong A'B'$  perché, altrimenti,  $ABC$  e  $A'B'C$  sarebbero congruenti per il **primo criterio** di congruenza). Consideriamo, per esempio, il caso in cui  $AB > A'B'$  (si potrebbe ragionare analogamente nel caso  $AB < A'B'$ ): allora esiste un punto  $P$ , interno al lato  $AB$ , tale che  $PB \cong A'B'$  (Fig. 18).

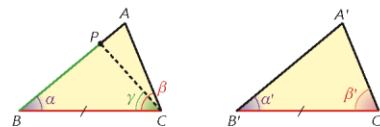


Figura 18

- I due triangoli  $PBC$  e  $A'B'C$  hanno:
- $PB \cong A'B'$  per come è stato costruito  $P$
  - $BC \cong B'C$  per ipotesi
  - $\alpha \cong \alpha'$  per ipotesi

Dunque sono congruenti per il **primo criterio** di congruenza.

In particolare sarà:

$\gamma \cong \beta$  angoli opposti a lati congruenti in triangoli congruenti

Ma sappiamo che:

$\beta' \cong \beta$  per ipotesi

quindi:

$\gamma \cong \beta$  per la proprietà transitiva della relazione di congruenza.

Ciò è assurdo perché, essendo  $P$  interno ad  $AB$ , la semiretta  $CP$  è interna all'angolo  $ACB$  e quindi l'angolo  $\gamma$  dovrebbe essere **minore** dell'angolo  $\beta$ . Dal momento che negando la tesi siamo giunti a una contraddizione, dobbiamo concludere che la tesi non può essere falsa, quindi è vera.

Il secondo criterio di congruenza viene anche chiamato criterio **ALA** perché riguarda la terna di elementi Angolo adiacente-Lato-Angolo adiacente.

#### Dimostrazioni che utilizzano i primi due criteri di congruenza

I primi due criteri di congruenza sono due strumenti che consentono di effettuare molte dimostrazioni. Analizziamo insieme alcuni esempi, per cercare di prendere confidenza con l'attività del «dimostrare».

##### ESEMPIO

Sia  $M$  il punto medio di un segmento  $AB$ . Tracciamo una retta passante per  $M$  e consideriamo su di essa, da parti opposte rispetto a  $M$ , due punti  $P$  e  $Q$  equidistanti da  $M$ . Dimostriamo che  $AP \cong BQ$ .

##### ► 1° passo: l'enunciato

La prima cosa da fare è leggere attentamente l'enunciato del teorema che vogliamo dimostrare.

##### ► 2° passo: il disegno

Dopo avere letto l'enunciato del teorema, è utile fare un disegno che lo rappresenti, contrassegnando con uno stesso simbolo gli elementi che, *per ipotesi*, sappiamo essere congruenti.

In questa fase bisogna prestare attenzione a *evitare* figure che rappresentino dei casi particolari. Per esempio, se nell'enunciato del teorema si parla di «triangolo», senza ipotesi aggiuntive, dovremo avere cura di non disegnare un triangolo isoscele o equilatero! Oppure, se dobbiamo disegnare «due segmenti consecutivi», dobbiamo avere cura di non disegnarli adiacenti.

Nel caso di questo esercizio, una figura valida può essere quella in Fig. 19.

##### ► 3° passo: individuare ipotesi e tesi

Dopo avere disegnato la figura, dobbiamo individuare con chiarezza le ipotesi e la tesi del teorema che vogliamo dimostrare.

**IPOTESI**  $A, M$  e  $B$  sono allineati

**TESI**  $AP \cong BQ$

$AM \cong MB$

$P, M$  e  $Q$  sono allineati

$PM \cong MQ$

##### ► 4° passo: individuare una «strategia» per effettuare la dimostrazione

Partiamo dal fondo. Vogliamo dimostrare che  $AP \cong BQ$ . A tale scopo, è sufficiente trovare due triangoli congruenti di cui  $AP$  e  $BQ$  sono elementi corrispondenti.

I due triangoli  $AMP$  e  $BMQ$  hanno  $AP$  e  $BQ$  come lati e sembrano congruenti (da quanto suggerisce la Fig. 19). Allora proviamo a seguire questa «strategia»: dimostrare che  $AMP \cong BMQ$  e dedurre che  $AP \cong BQ$ .

##### ► 5° passo: riscrivere la dimostrazione in forma «ufficiale»

In questa fase, devi prestare attenzione a *giustificare ogni passaggio* in base alle ipotesi, agli assiomi o ai teoremi precedentemente dimostrati, evitando espressioni quali «dalla figura si vede che...», «è chiaro che...» ecc.

#### DIMOSTRAZIONE

Consideriamo i triangoli  $AMP$  e  $BMQ$  (Fig. 20); essi hanno:

- $AM \cong MB$  per ipotesi
- $PM \cong MQ$  per ipotesi
- $\widehat{AMP} \cong \widehat{BMQ}$  in quanto angoli opposti al vertice

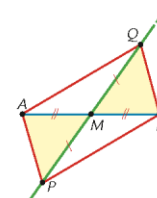


Figura 20

Dunque i triangoli  $AMP$  e  $BMQ$  sono congruenti per il **primo criterio** di congruenza. In particolare:

$AP \cong BQ$

in quanto elementi corrispondenti in tali triangoli.

Vediamo un altro esempio, che analizziamo ancora secondo i passi di quello precedente.

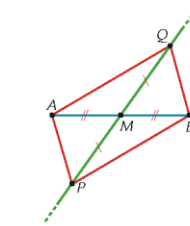


Figura 19



**Muovi**  
 Trascina o seleziona un oggetto



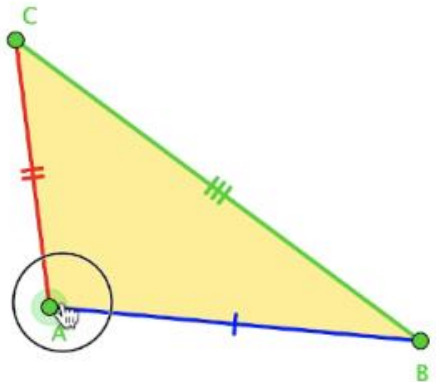
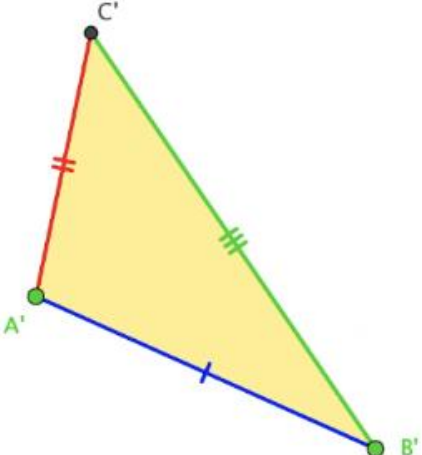
**3° Criterio di congruenza dei triangoli**

LLL: Lato - Lato - Lato

Due triangoli che hanno i **tre lati ordinatamente congruenti** sono **congruenti**.

 Sovrapponi

 Dimostrazione

☒ Istruzioni

Muovi i punti verdi per esplorare il criterio con differenti configurazioni.  
 Fai clic sul pulsante Sovrapponi per avviare l'animazione e sul pulsante Dimostrazione per visualizzare la dimostrazione passo a passo.

# RECUPERO ON LINE SUI FONDAMENTALI

ZONA **Matematica**

Che senso ha lo studio della Matematica  
per i ragazzi di oggi, come appassionarli  
alla Matematica?

# RICOSTRUIRE UN BUON RAPPORTO CON LA MATEMATICA

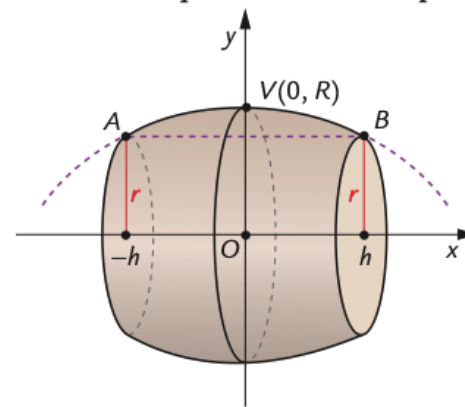
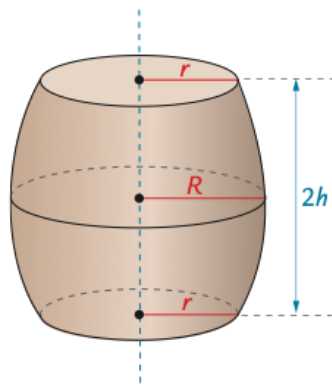
COLLEGARE E  
CONTESTUALIZZARE,  
SENZA FORZATURE

# Matematica e storia

**27** **Matematica e storia** Risolvi il seguente problema, dovuto al matematico indiano *Bhaskara* (1114-1185): «La radice quadrata della metà del numero delle api dello sciame è volata fino alla siepe di gelsomino. Otto noni sono rimasti indietro, mentre la regina volava in direzione di un maschio, che girava intorno a un fior di loto. Da quante api era composto lo sciame?» [72]

**274** **Matematica e storia** Alcuni pionieri dell'analisi matematica, come Keplero e Newton, cercarono delle soluzioni a un problema antichissimo, di cui si era occupato già Archimede: il problema del calcolo del volume di una botte di vino. Keplero, in particolare, se ne occupò nell'opera *Nova stereometria doliorum* del 1615. Supponiamo che la botte abbia altezza  $2h$ , che sia delimitata inferiormente e superiormente da cerchi di raggio  $r$  e che la sezione mediana della botte sia un cerchio di raggio  $R$ . Tra le varie soluzioni proposte per il calcolo del volume, una si basa sul seguente modello geometrico: assunto un sistema di riferimento come quello nella figura qui sotto a destra, si considera la parabola che ha vertice in  $V(0, R)$  e che passa per i punti  $A(-h, r)$  e  $B(h, r)$  e si immagina la botte come generata da una rotazione completa intorno all'asse  $x$  della regione di piano limitata dalla parabola, dall'asse  $x$  e dalle rette  $x = -h$  e  $x = h$ .

- Determina l'equazione della parabola.
- Verifica che il volume della botte è espresso dalla formula:  $V = \frac{2\pi h}{15}(3r^2 + 4rR + 8R^2)$ .
- Supposto  $r = 30$  cm,  $R = 40$  cm,  $h = 0,5$  m, quanti litri di vino può contenere approssimativamente la botte?



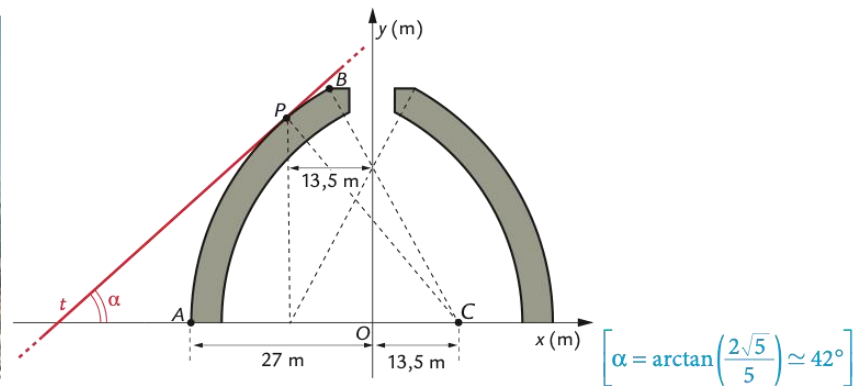
[ a.  $y = \frac{r-R}{h^2}x^2 + R$ ; c. circa 425,2 litri ]

# Matematica e arte

**460 Matematica e arte** Chiesa di S. Maria del Fiore. Nella figura sotto a sinistra è mostrata la Cupola della chiesa di S. Maria del Fiore a Firenze. Nella figura di destra sono mostrati gli archi che, nel sistema di riferimento cartesiano considerato, costituiscono i modelli del profilo della Cupola esterna e di quella interna. Fissiamo l'attenzione sull'arco  $\widehat{AB}$ , che costituisce una parte del modello del profilo della Cupola esterna: esso è con buona approssimazione un arco della circonferenza di centro  $C$ . Determina il coefficiente angolare della retta tangente in  $P$  all'arco  $\widehat{AB}$  in due modi:

- con considerazioni di geometria euclidea;
- applicando il concetto di derivata, dopo avere giustificato perché l'arco  $\widehat{AB}$  appartiene al grafico della funzione  $y = \sqrt{40,5^2 - (x - 13,5)^2}$ .

Determina quindi la pendenza del profilo della cupola nel punto  $P$ , cioè l'ampiezza dell'angolo  $\alpha$  in figura.



## Matematica e arte

**170** Ritratto di Luca Pacioli. Nel famoso ritratto di Luca Pacioli, attribuito in modo controverso a Jacopo de' Barbari (Fig. a), si distinguono un fermacarte a forma di poliedro regolare e, appeso a un filo, un solido di vetro riempito per metà d'acqua (Fig. b), detto rombicubottaedro (Fig. c).



Fig. a



Fig. b

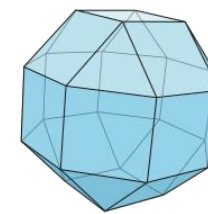


Fig. c

- Identifica il poliedro regolare rappresentato dal fermacarte.
- Il rombicubottaedro si può immaginare costituito dall'unione di un prisma a base ottagonale e da due «cupole», ciascuna delle quali ha una base ottagonale e una base quadrata. Determina il numero delle facce e dei vertici del rombicubottaedro quindi, applicando la relazione di Eulero, calcola il numero degli spigoli.
- Determina l'area della superficie di un rombicubottaedro il cui spigolo misura  $a$ .

[b. Facce = 26, vertici = 24, spigoli = 48; c.  $(18 + 2\sqrt{3})a^2$ ]

**171** Melencolia. Nell'opera *Melencolia* di Albrecht Dürer compare un poliedro, verosimilmente costituito da sei facce a forma di pentagono non regolare e da due facce a forma di triangolo. Secondo alcuni studiosi, il solido rappresentato è quello che si ottiene troncando un cubo con un piano in corrispondenza di due vertici opposti; supponendo valida questa ipotesi:

- deduci il numero dei vertici del poliedro rappresentato, quindi ricava il numero degli spigoli utilizzando la relazione di Eulero;
- calcola il volume e l'area della superficie del poliedro rappresentato, supponendo che lo spigolo del cubo originario misuri  $a$  e che le facce triangolari siano triangoli equilateri il cui lato misuri  $s$ .

[a. Vertici = 12, spigoli = 18; b. volume =  $a^3 - \frac{s^3\sqrt{2}}{12}$ , area superficie =  $6a^2 - \frac{s^2}{2}(3 - \sqrt{3})$ ]

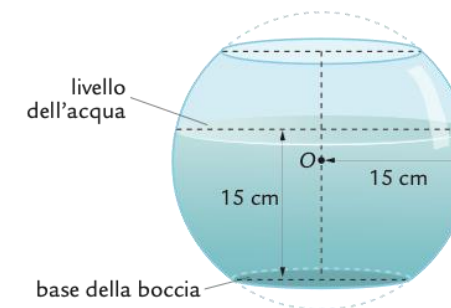


# Realtà e modelli

## Realtà e modelli

358

**Acquario.** Un acquario ha la forma di una calotta sferica a due basi.



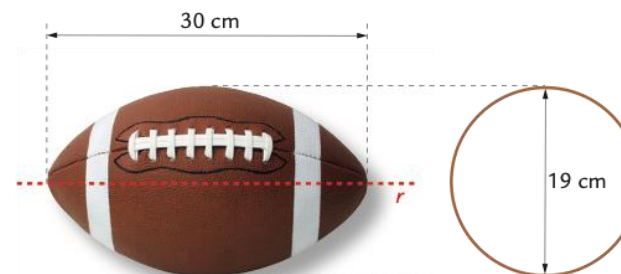
La calotta appartiene a una sfera di raggio 15 cm e la base dell'acquario è un cerchio di raggio 9 cm. Se il livello dell'acqua nell'acquario è a 15 cm dal fondo, quanti litri di acqua sono contenuti nell'acquario?

Risolvi il problema tramite il calcolo di un opportuno integrale.

[Circa 8,8 litri]

359

**Pallone da rugby.** La superficie del pallone da rugby in figura si può pensare ottenuta dalla rotazione di una semiellisse di un giro completo intorno alla retta  $r$ . Le sezioni della superficie del pallone tramite piani perpendicolari alla retta  $r$  sono dunque circonferenze, di cui quella di massima lunghezza ha diametro 19 cm. Calcola il volume del pallone da rugby, tenendo conto dei dati in figura.



[ $1805\pi \text{ cm}^3 \approx 5671 \text{ cm}^3$ ]

# Matematica e fisica

1071 Un'automobile viaggia a una velocità  $v_0 = 20$  m/s, quando comincia a frenare con accelerazione costante  $a = -1,2$  m/s<sup>2</sup>. Qual è la sua velocità dopo che ha percorso 150 m? Ricorda che le velocità iniziale e finale, l'accelerazione e la distanza percorsa  $\Delta s$  sono legate dalla relazione  $\Delta s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$ . [6,3 m/s]

1072 Una forza  $\vec{F}$  applicata a una fune ha componenti  $x$  e  $y$  tali che  $F_x = \frac{1}{3} F_y$ . Quanto deve valere  $F_x$  se vogliamo che il modulo della forza valga almeno 100 N? [ $F_x \geq 31,7$  N]

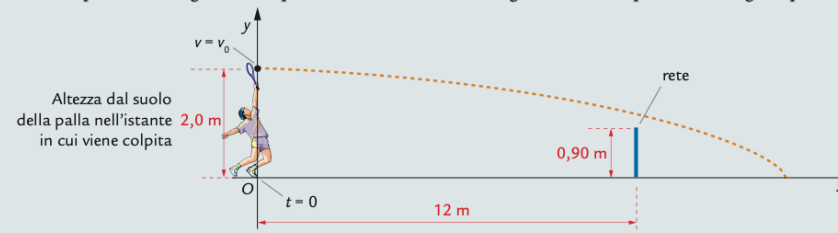
1073 Nell'arrampicata in montagna si usano corde elastiche per attutire l'effetto di un'eventuale caduta. Se un arrampicatore di massa  $m$  cade quando si trova a un'altezza  $h$  al di sopra del punto di ancoraggio della fune, dopo la caduta si troverà al di sotto del punto di ancoraggio di una quantità  $l + x$ , essendo  $x$  l'allungamento subito dalla fune stessa. Indicando con  $k$  la costante elastica della fune e con  $g$  l'accelerazione di gravità, si può dimostrare che vale la relazione:

$$x = \frac{mg}{k} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4kl}{mg}} \right)$$

È possibile che, per qualche valore di  $m$ , l'allungamento  $x$  coincida con  $l$ ? In caso affermativo determina questi valori di  $m$ , in funzione delle altre grandezze. [ $m = \frac{x l}{6g}$ ]



1074 Un semplice modello geometrico per l'analisi di un servizio nel gioco del tennis può essere la figura qui sotto.



Supponendo che la velocità  $v_0$  (in m/s) della palla all'istante  $t = 0$  in cui viene colpita sia orizzontale, giustifica perché la traiettoria della palla può essere rappresentata approssimativamente dal grafico della funzione  $y = 2 - \frac{5}{v_0^2} x^2$ .

Basandoti su questo modello e sui dati riportati in figura, rispondi alle seguenti domande.

- In corrispondenza di quali valori di  $v_0$  la palla oltrepassa la rete?
- Se la palla oltrepassa la rete, a quale distanza da essa cade?
- In corrispondenza di quali valori di  $v_0$  la palla sorpassa la rete e cade a meno di 5,0 m da essa?
- È possibile che la palla superi la rete e cada a 2,0 m da essa? [Arrotondando a meno di un decimo, si ottengono i risultati seguenti: a.  $v_0 > 26$ ; b.  $0,6v_0 - 12$ ; c.  $26 < v_0 < 27$ ; d. no]

1075 Un proiettile sparato orizzontalmente da un'altezza  $h$  da terra a velocità  $v$ , cade a una distanza orizzontale  $d = v \sqrt{\frac{2h}{g}}$ , dove  $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup> è l'accelerazione di gravità.

Si vuole che un proiettile cada almeno a 100 m di distanza dal punto in cui viene sparato. Calcola:

- a quale velocità deve essere sparato almeno, da un'altezza di 10,0 m;
- da quale altezza deve essere sparato almeno, con velocità di 100 m/s. [a.  $v \geq 70,0$  m/s; b.  $h \geq 4,91$  m]

1076 Una massa  $m$  (in kilogrammi) deve essere calata dal terzo piano di un edificio con una fune inestensibile e di peso trascurabile, il cui carico massimo sostenibile (in newton) è  $F$ .

- Supponi che la fune venga calata con un'accelerazione costante  $a$ ; quale condizione deve soddisfare  $a$  affinché la fune non si spezzi?

Supposto  $m = 10$  kg e  $F = 80$  N, rispondi ai seguenti ulteriori quesiti.

- La fune può essere calata a velocità costante senza che si spezzi?
- Supponi che la fune venga calata con un'accelerazione costante  $a$ ; qual è il minimo valore di  $a$  per cui la fune non si spezza? [a.  $a \geq g - \frac{F}{m}$ , essendo  $g$  l'accelerazione di gravità; b. no; c.  $1,8$  m/s<sup>2</sup>]

# FARE ASCOLTARE IL «BATTITO CARDIACO» DELLA MATEMATICA

### IN UN ALTRO MODO

#### Massimi e minimi senza l'analisi matematica

Nel nostro percorso di matematica ci è già capitato di risolvere problemi di massimo e di minimo con metodi elementari (ovvero senza il ricorso all'analisi matematica): per esempio, abbiamo risolto alcuni problemi di massimo e di minimo di secondo grado (riconoscendo che il massimo o il minimo viene raggiunto in corrispondenza del vertice della parabola che rappresenta il problema), e problemi di trigonometria (utilizzando le proprietà delle funzioni seno e coseno, che assumono valore massimo uguale a 1 e valore minimo uguale a -1). Il metodo per individuare i punti di estremo relativo basato sulla ricerca dei punti stazionari è fondamentale, tuttavia non sempre il ricorso all'analisi matematica è lo strumento migliore per risolvere un problema di massimo o di minimo. Talvolta, infatti, sono possibili altri approcci, che non fanno ricorso all'analisi e che possono risultare più veloci ed eleganti. Vogliamo ora presentare alcuni risultati che consentono di affrontare molti problemi da questo punto di vista. Partiamo da due risultati elementari.

1. Se due numeri reali  $x$  e  $y$  hanno **somma costante**  $x + y = k$ , allora il loro **prodotto** è **massimo** quando i due numeri sono uguali, ossia quando  $x = y$ .

Questa proprietà segue dall'osservazione che il prodotto  $xy = x(k - x)$  è massimo in corrispondenza del vertice della parabola di equazione  $y = x(k - x)$ , ossia quando  $x = y = \frac{k}{2}$ .

2. Se due numeri reali **positivi**  $x$  e  $y$  hanno **prodotto costante**  $xy = k$ , allora la loro **somma** è **minima** quando i due numeri sono uguali, ossia quando  $x = y$ .

Questa proprietà segue immediatamente dall'identità:

$$x + y = x + \frac{k}{x} = \left(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{k}{x}}\right)^2 + 2\sqrt{k}$$

osservando che la somma risulta minima quando il quadrato è nullo, cioè quando  $\sqrt{x} = \sqrt{\frac{k}{x}}$ , da cui si ricava (tenendo conto che  $x$  deve essere positivo)  $x = y = \sqrt{k}$ .

Alcuni classici problemi risolvibili sulla base di questi risultati sono i seguenti.

#### PROBLEMI

- a. Tra tutti i rettangoli di perimetro assegnato, qual è quello di area massima?
- b. Tra tutti i rettangoli di area assegnata, qual è quello di perimetro minimo?

a. Siano  $a$  e  $b$  le misure della base e dell'altezza del rettangolo; l'area del rettangolo è data dal prodotto  $ab$  e la somma di  $a$  e  $b$  risulta costante (uguale al semiperimetro): pertanto il prodotto risulta massimo quando  $a = b$ . Concludiamo che, tra tutti i rettangoli di perimetro assegnato, quello di area massima è il **quadrato**.

b. Siano  $a$  e  $b$  le misure della base e dell'altezza del rettangolo e poniamo  $ab = k$ ; il perimetro è dato da  $2a + 2b = 2(a + b)$  ed è minimo quando è minima la somma  $a + b$ . Si tratta di una somma di due addendi di prodotto costante, quindi è minima quando  $a = b$ . Concludiamo che, tra tutti i rettangoli di area assegnata, quello di perimetro minimo è il **quadrato**.

Le due proprietà 1 e 2 possono essere generalizzate; si può infatti dimostrare quanto segue.

- 1'. Se  $n$  numeri reali positivi  $x_1, x_2, \dots, x_n$  hanno somma costante, allora il loro prodotto è massimo quando tutti i numeri sono uguali tra loro, ossia quando  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .
- 2'. Se  $n$  numeri reali positivi  $x_1, x_2, \dots, x_n$  hanno prodotto costante, allora la loro somma è minima quando tutti i numeri sono uguali tra loro, ossia quando  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .

Le proprietà 1' e 2' consentono per esempio di risolvere in modo semplice i seguenti problemi, che non si prestano invece a essere risolti facilmente con l'analisi matematica (perché la funzione da rendere massima/minima sarebbe in due variabili e quindi la teoria fin qui esposta non sarebbe sufficiente).

#### PROBLEMI

- a. Tra tutti i triangoli di perimetro assegnato, qual è quello di area massima?
- b. Tra tutti i parallelepipedi rettangoli di volume assegnato, qual è quello di superficie minima?

a. Siano  $a, b$  e  $c$  le misure dei tre lati di un triangolo e poniamo  $a + b + c = k$ ; allora sarà costante anche il semiperimetro  $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{k}{2}$ .

L'area  $A$  del triangolo è data dalla formula di Erone:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

ed è massima quando è massimo il radicando, ovvero (trascurando il fattore  $p$  che è costante) quando è massimo il prodotto  $(p-a)(p-b)(p-c)$ . Osserviamo ora che la somma dei tre fattori che compongono tale prodotto è costante:

$$(p-a) + (p-b) + (p-c) = 3p - (a+b+c) = 3p - 2p = p$$

dunque il prodotto è massimo quando i tre fattori sono uguali, ossia quando:

$$p-a = p-b = p-c \quad \text{da cui} \quad a = b = c$$

Tra tutti i triangoli di perimetro assegnato, quello di area massima è perciò quello **equilatero**.

b. Siano  $a, b, c$  le misure delle tre dimensioni del parallelepipedo e poniamo  $abc = k$ . La superficie  $S$  del parallelepipedo è data da:

$$S = 2(ab + bc + ac)$$

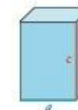
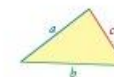
ed è minima quando lo è la somma  $ab + bc + ac$ . Osserviamo ora che il prodotto dei tre addendi che compongono la somma è costante:

$$ab \cdot bc \cdot ac = a^2 b^2 c^2 = (abc)^2 = k^2$$

dunque la somma è minima quando i tre addendi sono uguali, ossia quando:

$$ab = bc = ac \quad \text{da cui} \quad a = b = c$$

Tra tutti i parallelepipedi rettangoli di volume assegnato, quello di superficie minima è il **cubo**.



Esercizi p. 408

## 4. Funzioni concave e convesse, punti di flesso

### Concavità e convessità

Sappiamo che una parabola di equazione  $y = ax^2 + bx + c$  ha la concavità rivolta verso l'alto oppure verso il basso rispettivamente a seconda che  $a > 0$  oppure  $a < 0$ . Introduciamo ora due definizioni, che formalizzano i concetti di «avere la concavità rivolta verso l'alto» e «avere la concavità rivolta verso il basso» per una funzione qualsiasi.

Ora, nell'incertezza del momento, quale  
sfida intravedi?

# I NUMERI DELLA PANDEMIA

# LA MATEMATICA PER UNA CITTADINANZA CONSAPEVOLE

# LA MATEMATICA COME LINGUAGGIO DEL TERZO MILLENNIO



Grazie