

Insegnare con Matematica allo specchio

Relatore: Claudio Zanone



Quale idea di matematica?

- Una matematica a misura di studente, illustrata con un linguaggio rigoroso
- Una matematica attiva e coinvolgente
- Una matematica che parta da problemi, volta non solo all'acquisizione delle tecniche di calcolo, ma soprattutto alla formazione di competenze e alla costruzione di significati



Quale idea di matematica?

- Una matematica con una forte valenza sia strumentale sia culturale
- Una matematica inclusiva, che aiuti a stare bene a scuola
- Una matematica attenta alla cittadinanza e alla sostenibilità



Star bene a scuola

I primi provvedimenti dello stesso PNRR (cfr. Scuola 4.0) riportano che i finanziamenti sono finalizzati a “favorire

- *l'apprendimento attivo e collaborativo;*
- *la motivazione ad apprendere e il benessere emotivo;*
- *il peer learning e il problem solving;*
- *l'inclusione e la didattica personalizzata”* per lo sviluppo di “*abilità cognitive e metacognitive (pensiero critico e creativo);*
- *abilità sociali ed emotive (empatia, autoefficacia, responsabilità, collaborazione)”.*



Una didattica nuova

- Lezione attiva «a specchio»
- Laboratorio per esplorare la matematica
- Nuovo modo di classificare gli esercizi
- Percorso didattico a spirale



Lezione attiva "a specchio"

Lezione 1

TEORIA

RIFLETTI SULLA TEORIA

UNITÀ 19 | I sistemi lineari

Introduzione ai sistemi lineari

1 Equazioni lineari in due incognite

Un'equazione di questo tipo è un enunciato aperto contenente due variabili.

Che tipo di soluzioni ha un'equazione lineare che contiene due incognite, anziché una sola, come, ad esempio, l'equazione $2x + y - 4 = 0$? Se diamo a x un valore, per esempio $x = 0$, l'equazione non si trasforma in un'uguaglianza, ma rimane un'equazione nell'incognita y : $2 \cdot 0 + y - 4 = 0$. Se risolviamo questa equazione, troviamo: $y = 4$. Quindi una soluzione dell'equazione iniziale è costituita dalla coppia $x = 0$ e $y = 4$.

Anche assegnando un valore a y , ad esempio $y = 2$, l'equazione di partenza diventa un'equazione in una sola incognita: $2x + 2 - 4 = 0$. Risolvendola troviamo: $x = 1$.

Un'altra soluzione dell'equazione di partenza è la coppia $x = 1$ e $y = 2$. 1 - 6

IL SIGNIFICATO DELLE PAROLE

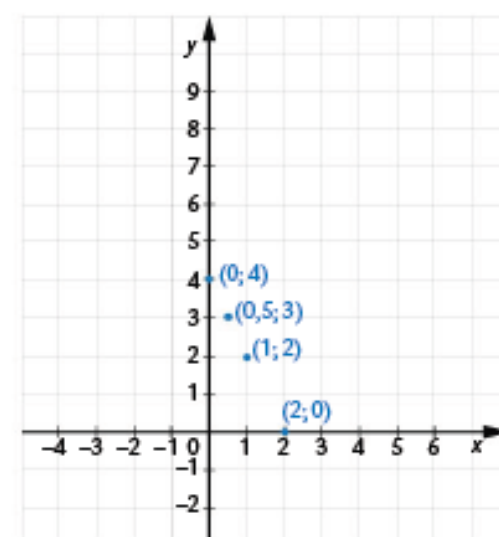
Il significato della dicitura "coppia ordinata" sta nel fatto che è importante l'ordine in cui i due elementi sono inseriti nella coppia: la coppia $(0; 4)$ è diversa dalla coppia $(4; 0)$.

Questo ci suggerisce che una soluzione dell'equazione in due incognite non sia un semplice numero, ma una coppia ordinata di numeri, di cui il primo è un valore di x e il secondo un valore di y .

Sappiamo anche che una coppia ordinata di numeri può essere rappresentata con un punto nel piano cartesiano. Dunque le soluzioni di un'equazione in due incognite possono essere visualizzate come punti sul piano: in Fig. 1 ne sono riportate alcune.

Per ogni valore assegnato a x troviamo un valore di y e viceversa, ma è evidente che possiamo dare a x tutti i valori reali, che sono infiniti.

> FIGURA 1



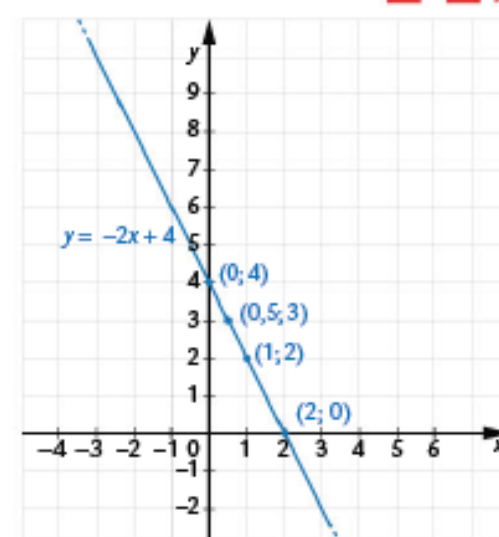
L'equazione ammette quindi infinite soluzioni: il loro insieme S è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Il fatto che le soluzioni siano infinite non significa che tutte le coppie siano soluzioni: nel nostro caso, ad esempio, la coppia $(0; 0)$ non è soluzione, infatti $2 \cdot 0 + 0 - 4 \neq 0$. 7 - 11

D'altro canto, applicando il primo principio di equivalenza, possiamo risolvere l'equazione di partenza rispetto a y e osservare che essa assume la forma di una funzione lineare: $y = -2x + 4$. Questa funzione ha come grafico una retta.

Le infinite coppie ordinate contenute nell'insieme S corrispondono agli infiniti punti della retta nel piano cartesiano (Fig. 2): disegnando tale retta esse possono essere visualizzate tutte insieme.

> FIGURA 2



Per equazioni di questo tipo, generalmente consideriamo come dominio l'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Questo non esclude però che, in casi particolari, il dominio possa essere un altro insieme, come ad esempio $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ o altri ancora.

Abbiamo qui usato tre oggetti matematici diversi ma legati fra loro: equazione lineare, funzione lineare e retta. La funzione lineare è la relazione che sussiste tra le due variabili x e y . L'equazione lineare è un modo per rappresentare la funzione: essa ci dice quali valori assume y al variare di x . La retta è la modalità grafica con cui rappresentiamo una funzione lineare.

Riconoscere soluzioni di equazioni lineari in due variabili

Per ognuna delle seguenti equazioni stabilisci se la coppia indicata a fianco è o non è soluzione.

1 $x - 2y - 1 = 0$	(1; 1)	[No]	4 $x - 2y + 5 = 0$	(-3; 1)	[Si]
2 $3x - 2y + 1 = 0$	(7; 11)	[Si]	5 $7x - 6y - 1 = 0$	(1; 1)	[Si]
3 $x - y + 4 = 0$	(-6; -2)	[Si]	6 $x - 4y + 8 = 0$	(-1; 2)	[No]

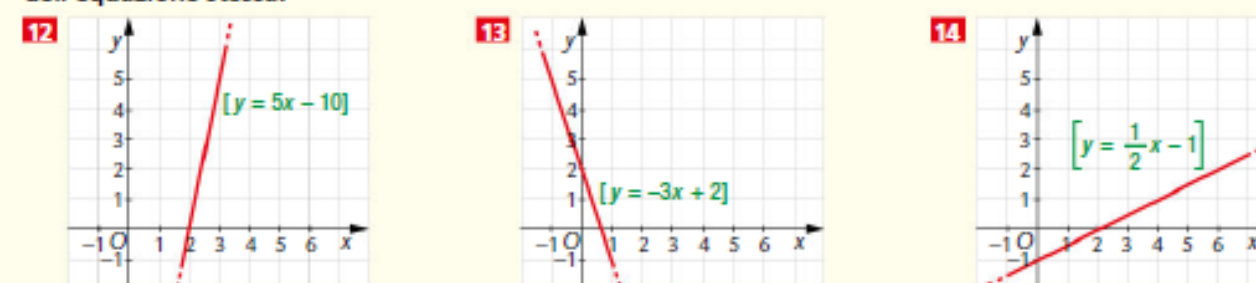
Interpretare graficamente equazioni lineari in due variabili e loro soluzioni

Per ognuna delle seguenti equazioni individua almeno cinque soluzioni. In seguito rappresenta graficamente l'equazione.

7 $x - 2y + 8 = 0$	8 $2x - 4y = 0$	9 $3x + y - 12 = 0$	10 $5x - 2y + 6 = 0$
--------------------	-----------------	---------------------	----------------------

11 Come sarebbe il grafico delle equazioni precedenti, se il loro dominio fosse $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$? E se fosse $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$? Rappresenta i grafici delle equazioni precedenti nei due casi.

Scrivi l'equazione corrispondente a ciascuna delle seguenti rette. In seguito individua almeno tre soluzioni dell'equazione stessa.

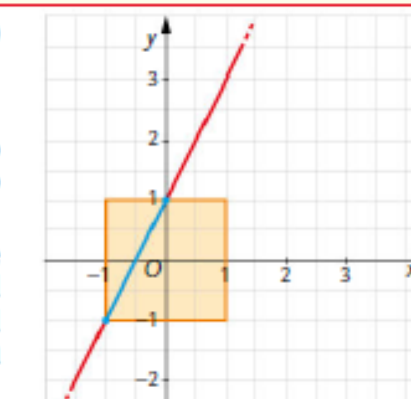


15 ESERCIZIO SVOLTO Rappresenta le soluzioni dell'equazione $2x - y + 1 = 0$ nel dominio $A = [-1; 1] \times [-1; 1]$.

SOLUZIONE

L'insieme A , nel piano cartesiano, corrisponde al quadrato evidenziato in rosso in figura, bordo compreso: si tratta infatti dei punti che hanno ascissa x tale che $-1 \leq x \leq 1$ e ordinata y tale che $-1 \leq y \leq 1$.

L'equazione data corrisponde invece alla retta disegnata in figura. Le soluzioni dell'equazione nel dominio A si rappresentano con i punti del piano corrispondenti all'intersezione tra la retta e il quadrato, cioè al segmento evidenziato in blu. I pallini pieni stanno a significare che gli estremi del segmento vanno inclusi nelle soluzioni.



16 Risolvi l'equazione dell'Esercizio 15 nei domini: $B = [-1; 0; 1] \times [-1; 0; 1]$ e $C = [0; 2] \times [0; 2]$.

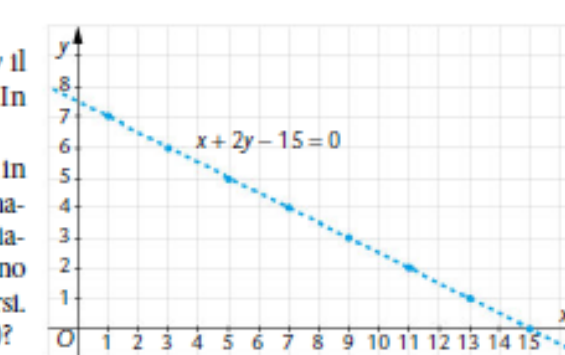
Risolvere problemi

17 ESERCIZIO SVOLTO NELLA REALTÀ Un cambiamonete automatico può erogare soltanto monete da 1 euro e da 2 euro. Inserendo una banconota da 10 euro e una banconota da 5 euro, in quanti modi possibili può avvenire il cambio?

SOLUZIONE

Indichiamo con x il numero di monete da 1 euro e con y il numero di monete da 2 euro erogate dal cambiamonete. In questo caso si deve avere: $x + 2y = 15$.

La retta corrispondente all'equazione è quella rappresentata in figura. Siccome il numero di monete erogate è un numero naturale, il dominio dell'equazione è $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e quindi individuiamo sulla retta i punti che hanno coordinate naturali, che sono in tutto 8. Il resto può quindi essere erogato in 8 modi diversi. Quali? Che cosa rappresentano in questo caso le coppie $(x; y)$?



Prima introduco la teoria...

1 Equazioni lineari in due incognite

Un'equazione di questo tipo è un enunciato aperto contenente due variabili.

Che tipo di soluzioni ha un'equazione lineare che contiene due incognite, anziché una sola, come, ad esempio, l'equazione $2x + y - 4 = 0$?

Se diamo a x un valore, per esempio $x = 0$, l'equazione non si trasforma in un'uguaglianza, ma rimane un'equazione nell'incognita y : $2 \cdot 0 + y - 4 = 0$.

Se risolviamo questa equazione, troviamo: $y = 4$.

Quindi una soluzione dell'equazione iniziale è costituita dalla coppia $x = 0$ e $y = 4$.

Anche assegnando un valore a y , ad esempio $y = 2$, l'equazione di partenza diventa un'equazione in una sola incognita: $2x + 2 - 4 = 0$.

Risolvendola troviamo: $x = 1$.

Un'altra soluzione dell'equazione di partenza è la coppia $x = 1$ e $y = 2$.

1 - 6 ▶

IL SIGNIFICATO

Approccio sequenziale

...poi svolgo o invito gli studenti a svolgere esercizi

► Riconoscere soluzioni di equazioni lineari in due variabili

Per ognuna delle seguenti equazioni stabilisci se la coppia indicata a fianco è o non è soluzione.

1	$x - 2y - 1 = 0$	$(1; 1)$	[No]	4	$x - 2y + 5 = 0$	$(-3; 1)$	[Si]
2	$3x - 2y + 1 = 0$	$(7; 11)$	[Si]	5	$7x - 6y - 1 = 0$	$(1; 1)$	[Si]
3	$x - y + 4 = 0$	$(-6; -2)$	[Si]	6	$x - 4y + 8 = 0$	$(-1; 2)$	[No]



Prima introduco la teoria...

IL SIGNIFICATO DELLE PAROLE

Il significato della dicitura "coppia ordinata" sta nel fatto che è importante l'ordine in cui i due elementi sono inseriti nella coppia: la coppia $(0; 4)$ è diversa dalla coppia $(4; 0)$.

Per equazioni di questo tipo, generalmente consideriamo come dominio l'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Questo non esclude però che, in casi particolari, il dominio possa essere un altro insieme, come ad esempio $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ o altri ancora.

Un'altra soluzione dell'equazione di partenza è la coppia $x = 1$ e $y = 2$. 1 - 6 ▶

Questo ci suggerisce che una soluzione dell'equazione in due incognite non sia un semplice numero, ma una **coppia ordinata** di numeri, di cui il primo è un valore di x e il secondo un valore di y .

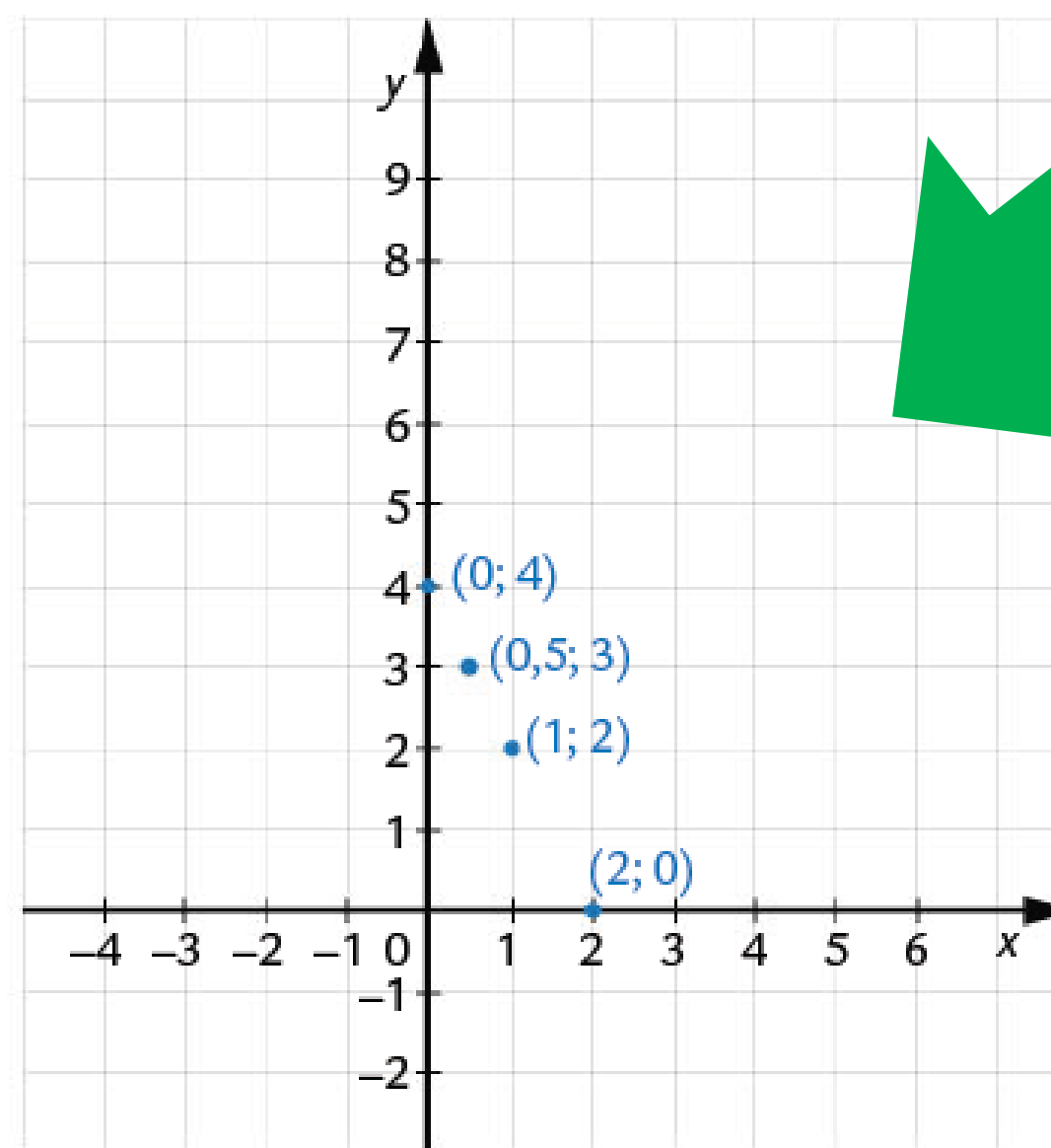
Sappiamo anche che una coppia ordinata di numeri può essere rappresentata con un **punto** nel piano cartesiano. Dunque le soluzioni di un'equazione in due incognite possono essere visualizzate come punti sul piano: in Fig. 1 ne sono riportate alcune.

Per ogni valore assegnato a x troviamo un valore di y e viceversa, ma è evidente che possiamo dare a x tutti i valori reali, che sono infiniti.

» FIGURA 1

L'equazione ammette quindi **infinite soluzioni**: il loro insieme S è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Il fatto che le soluzioni siano infinite non significa che tutte le coppie siano soluzioni: nel nostro caso, ad esempio, la coppia $(0; 0)$ **non** è soluzione, infatti $2 \cdot 0 + 0 - 4 \neq 0$. 7 - 11 ▶



Passaggio dal registro
numerico – algebrico al
registro grafico



Approccio sequenziale

...poi svolgo o invito gli studenti a svolgere esercizi

► Interpretare graficamente equazioni lineari in due variabili e loro soluzioni

Per ognuna delle seguenti equazioni individua almeno cinque soluzioni. In seguito rappresenta graficamente l'equazione.

7 $x - 2y + 8 = 0$

8 $2x - 4y = 0$

9 $3x + y - 12 = 0$

10 $5x - 2y + 6 = 0$

11 Come sarebbe il grafico delle equazioni precedenti, se il loro dominio fosse $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$? E se fosse $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$? Rappresenta i grafici delle equazioni precedenti nei due casi.



Approccio sequenziale

Prima introduco la teoria...

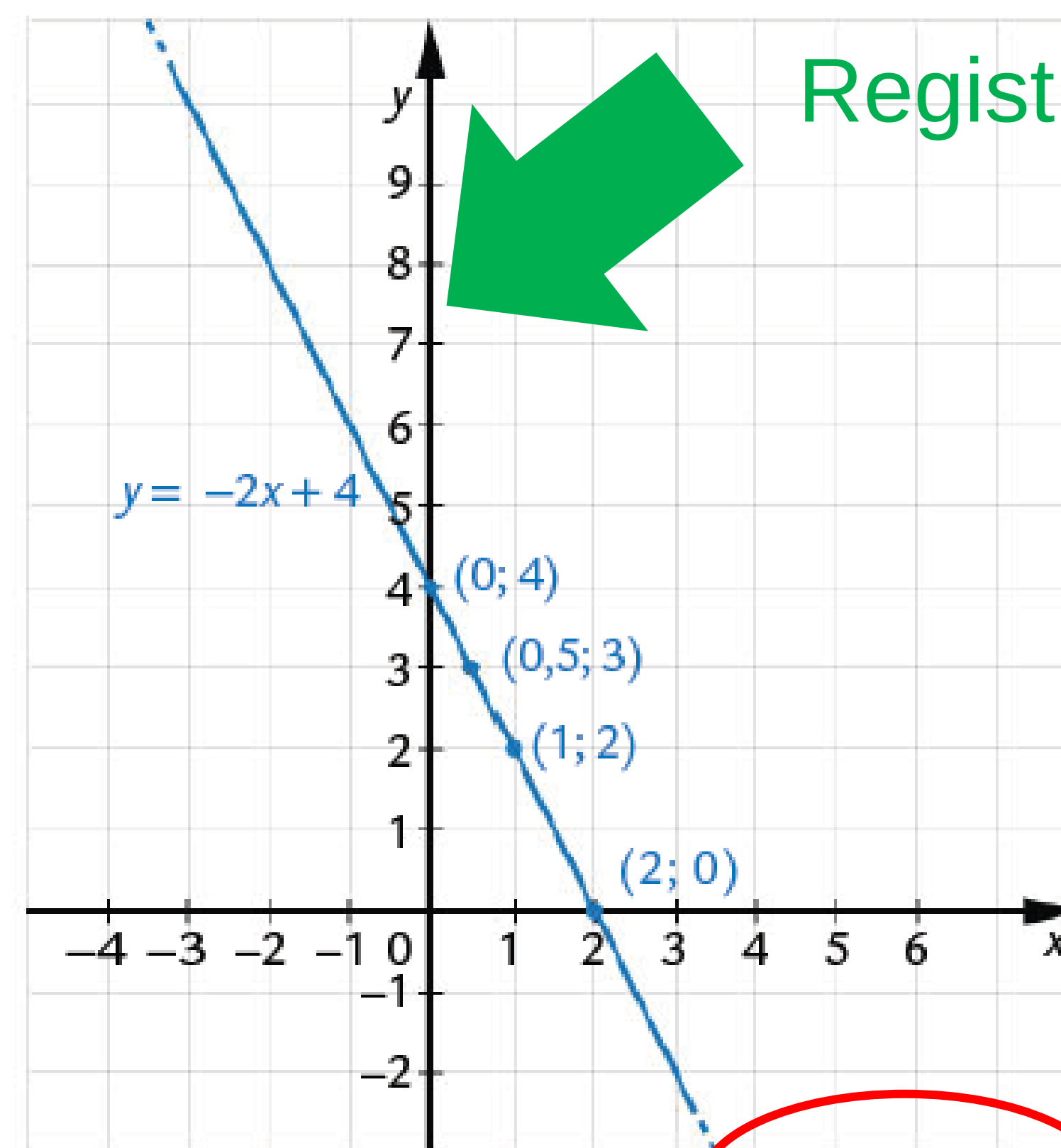
Abbiamo qui usato tre oggetti matematici diversi ma legati fra loro: equazione lineare, funzione lineare e retta. La **funzione lineare** è la relazione che sussiste tra le due variabili x e y . L'**equazione lineare** è un modo per rappresentare la funzione: essa ci dice quali valori assume y al variare di x . La **retta** è la modalità grafica con cui rappresentiamo una funzione lineare.

D'altro canto, applicando il primo principio di equivalenza, possiamo risolvere l'equazione di partenza rispetto a y e osservare che essa assume la forma di una funzione lineare: $y = -2x + 4$.

Questa funzione ha come grafico una **retta**.

Le infinite coppie ordinate contenute nell'insieme S corrispondono agli infiniti punti della retta nel piano cartesiano (**Fig. 2**): disegnando tale retta esse possono essere visualizzate tutte insieme.

» FIGURA 2



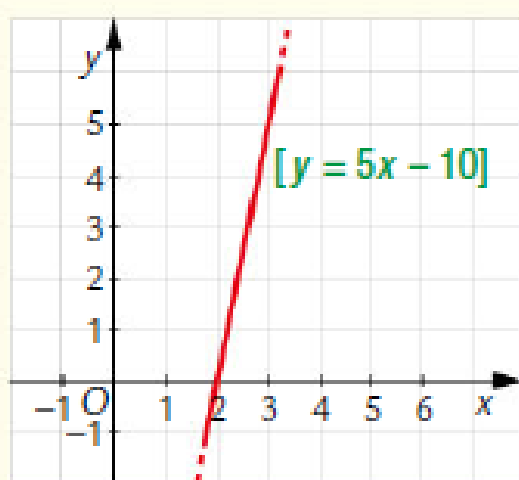
12 - 17

Approccio sequenziale

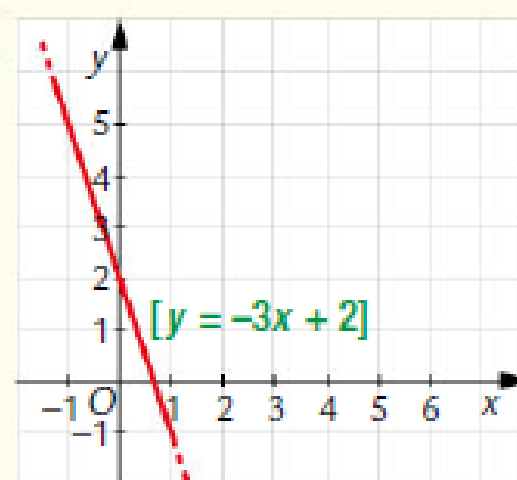
...poi svolgo o invito gli studenti a svolgere esercizi

Scrivi l'equazione corrispondente a ciascuna delle seguenti rette. In seguito individua almeno tre soluzioni dell'equazione stessa.

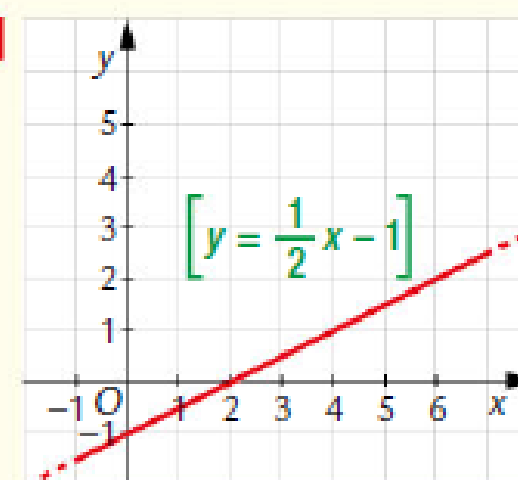
12



13



14

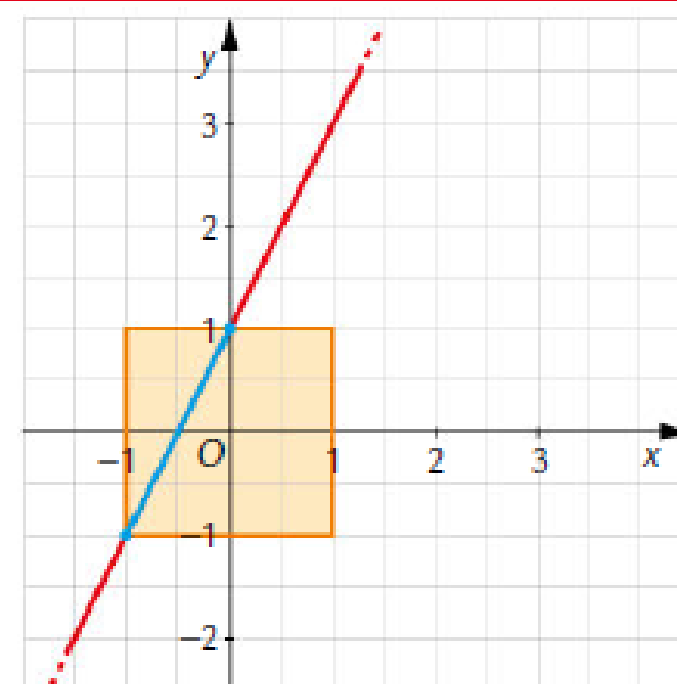


15 ESERCIZIO SVOLTO Rappresenta le soluzioni dell'equazione $2x - y + 1 = 0$ nel dominio $A = [-1; 1] \times [-1; 1]$.

SOLUZIONE

L'insieme A , nel piano cartesiano, corrisponde al quadrato evidenziato in rosso in figura, bordo compreso: si tratta infatti dei punti che hanno ascissa x tale che $-1 \leq x \leq 1$ e ordinata y tale che $-1 \leq y \leq 1$.

L'equazione data corrisponde invece alla retta disegnata in figura. Le soluzioni dell'equazione nel dominio A si rappresentano con i punti del piano corrispondenti all'intersezione tra la retta e il quadrato, cioè al segmento evidenziato in blu. I pallini pieni stanno a significare che gli estremi del segmento vanno inclusi nelle soluzioni.



16 Risolvi l'equazione dell'Esercizio 15 nei domini: $B = \{-1; 0; 1\} \times \{-1; 0; 1\}$ e $C =]0; 2] \times]0; 2]$.

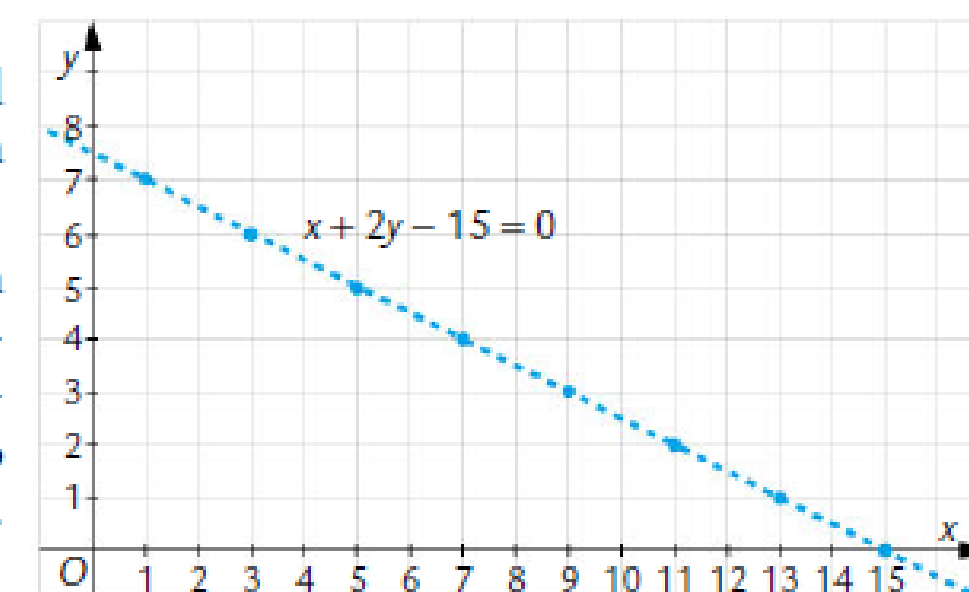
Risolvere problemi

17 ESERCIZIO SVOLTO NELLA REALTÀ Un changemonete automatico può erogare soltanto monete da 1 euro e da 2 euro. Inserendo una banconota da 10 euro e una banconota da 5 euro, in quanti modi possibili può avvenire il cambio?

SOLUZIONE

Indichiamo con x il numero di monete da 1 euro e con y il numero di monete da 2 euro erogate dal changemonete. In questo caso si deve avere: $x + 2y = 15$.

La retta corrispondente all'equazione è quella rappresentata in figura. Siccome il numero di monete erogate è un numero naturale, il dominio dell'equazione è $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e quindi individuiamo sulla retta i punti che hanno coordinate naturali, che sono in tutto 8. Il resto può quindi essere erogato in 8 modi diversi. Quali? Che cosa rappresentano in questo caso le coppie $(x; y)$?



Approccio «problematico»

Parto da un problema che sottopongo agli studenti...

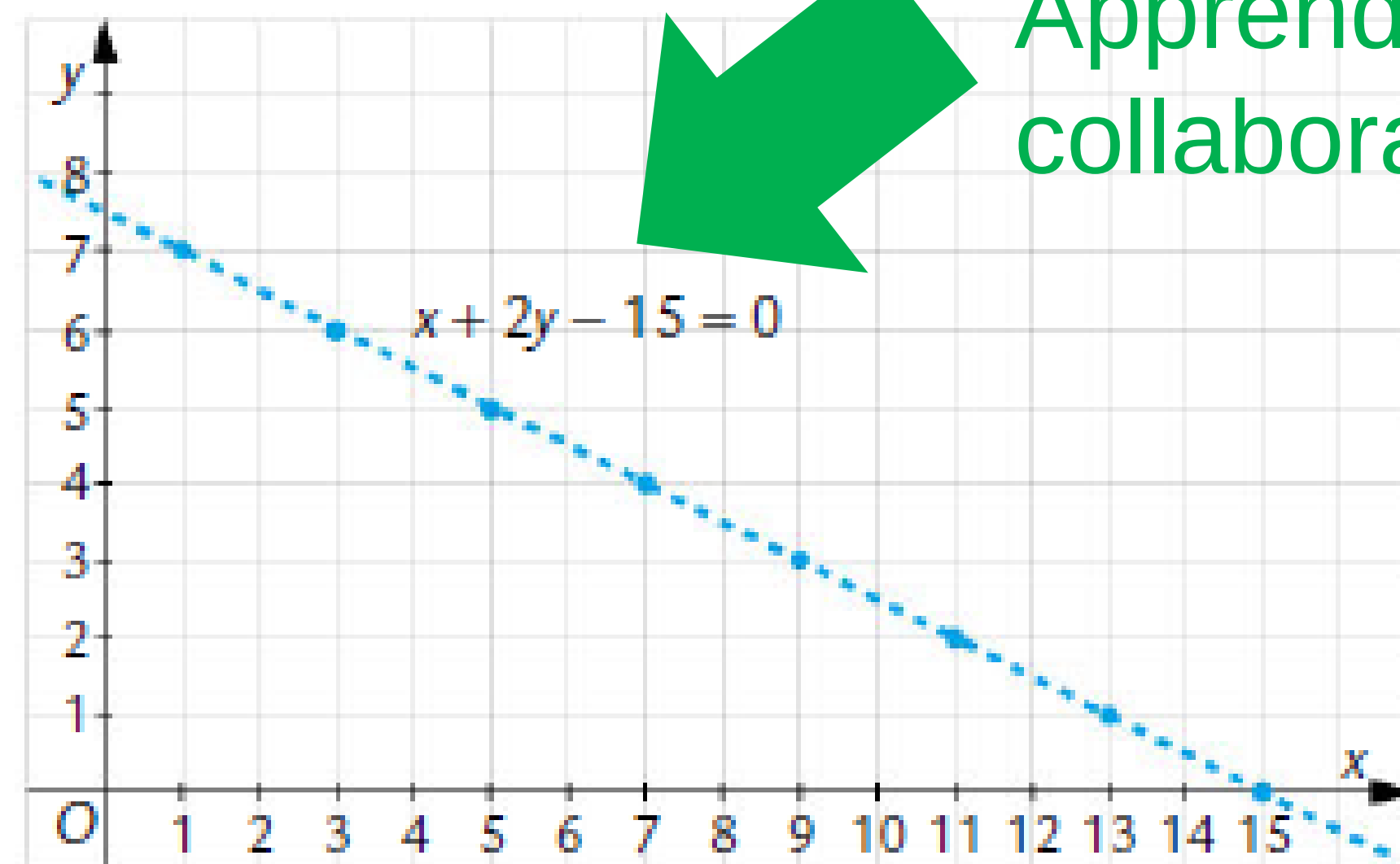
► Risolvere problemi

17 ESERCIZIO SVOLTO NELLA REALTÀ Un cambiamonete automatico può erogare soltanto monete da 1 euro e da 2 euro. Inserendo una banconota da 10 euro e una banconota da 5 euro, in quanti modi possibili può avvenire il cambio?

SOLUZIONE

Indichiamo con x il numero di monete da 1 euro e con y il numero di monete da 2 euro erogate dal cambiamonete. In questo caso si deve avere: $x + 2y = 15$.

La retta corrispondente all'equazione è quella rappresentata in figura. Siccome il numero di monete erogate è un numero naturale, il dominio dell'equazione è $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e quindi individuiamo sulla retta i punti che hanno coordinate naturali, che sono in tutto 8. Il resto può quindi essere erogato in 8 modi diversi. Quali? Che cosa rappresentano in questo caso le coppie $(x; y)$?

Apprendimento
collaborativo

Approccio «problematico»

...poi sistematizzo con la trattazione teorica

- Per risolvere il problema mi serve un **modello** algebrico, che è un'**equazione lineare in due variabili**.
- Ha **infinite soluzioni**, ma non nel contesto del nostro problema.
- E' opportuno rappresentare la situazione con un **grafico**.
- ...



Approccio «molto problematico»

Parto dalla fine, proponendo agli studenti un problema di «adeguata difficoltà» (R. Zan)

**Non si esplora
qualcosa che
già si conosce**



Approccio «molto problema»

Questo di solito è il punto di arrivo della trattazione di un argomento in un'Unità, ma potrebbe essere anche il punto di partenza.

E' un problema articolato in più punti, con richieste non banali, che induce gli studenti a esplorare.

Si può proporre di ragionarci a gruppi, sotto la guida del docente.

Non è necessario arrivare alla soluzione, perché il testo deve condurre alla formulazione di un modello.

Successivamente si sviluppano le basi teoriche per risolvere il problema.

- Utilizzare le tecniche del calcolo
- Interpretare grafici e dati
- Risolvere problemi e costruire modelli
- Ragionare, giustificare, argomentare

Soluzioni nella Guida
per l'insegnante



Compito di realtà

Cocktail matematico

A una festa viene chiamato un barista per preparare alcune bevande analcoliche. Nella tabella sono mostrati i nomi dei cocktail e le relative frazioni di ciascun ingrediente che contengono.

Senza considerare nei conteggi i tuorli, che vengono aggiunti direttamente nel bicchiere, il barista suppone di preparare tre quantità diverse di ognuno dei tre cocktail, utilizzando esattamente 4,9 L di succo d'arancia, 2,5 L di succo di limone e 1,6 L di sciroppo di granatina.

1 Quanti litri di ciascun cocktail ne risulterebbero?

2 Che quantità dovrebbe utilizzare di ciascuno degli altri ingredienti?

Per servire le bevande preparate il barista ha a disposizione bicchieri da 20 cL e da 25 cL.

3 In quanti modi possibili può utilizzare bicchieri di due tipi per servire il cocktail *Agrumi e granatina*? Utilizza una rappresentazione cartesiana opportuna per visualizzare le diverse possibilità ed elencare in una tabella.

4 Ripeti il calcolo precedente per ciascuna delle altre due bevande.

Al barista infine viene in mente che potrebbe aggiungere alla varietà delle bevande preparate anche una certa quantità del cocktail *Shirley Temple*, che contiene $\frac{1}{7}$ di granatina, $\frac{3}{7}$ di ginger ale e $\frac{3}{7}$ di soda.

5 Immaginando che utilizzi le stesse quantità di succo d'arancia, succo di limone e sciroppo di granatina del caso precedente, spiega perché non è possibile calcolare le quantità di ciascuna bevanda che ne risulterebbero. Che cosa occorrerebbe conoscere per poterle calcolare?

Cocktail	Ingredienti
Agrumi e granatina	$\frac{1}{3}$ gazzosa $\frac{1}{4}$ succo di limone $\frac{1}{6}$ sciroppo di granatina $\frac{1}{4}$ succo d'arancia
Tutti frutti	$\frac{3}{10}$ frullato di banana $\frac{1}{5}$ succo d'arancia $\frac{3}{10}$ frullato di ananas $\frac{1}{5}$ succo di limone
Buffalo Bill	$\frac{4}{5}$ succo d'arancia $\frac{1}{5}$ sciroppo di granatina 1 tuorlo d'uovo

Approccio «molto problematico»

1 Indicate con: x la quantità di bevanda *Agrumi e granatina*, y la quantità di bevanda *Tutti i frutti* e z la quantità di bevanda *Buffalo Bill*. Per determinare quanti litri di ciascun cocktail vengono preparati è necessario risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 4,9 = \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}y + \frac{4}{5}z \\ 2,5 = \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}z \\ 1,6 = \frac{1}{6}x + \frac{1}{5}z \end{cases}$$

Da cui si ottiene: $x = 6$; $y = 5$; $z = 3$. Vengono perciò preparati 6 L di bevanda *Agrumi e granatina*, 5 L di bevanda *Tutti i frutti*, 3 L di bevanda *Buffalo Bill*.

2 Poiché la gazzosa corrisponde a $\frac{1}{3}$ della bevanda *Agrumi e granatina*, se ne devono utilizzare 2 L. Il frullato di banana e il frullato di ananas rappresentano, ognuno, $\frac{3}{10}$ della bevanda *Tutti i frutti*: è necessario utilizzare 1,5 L di ognuno dei due.

3 Si consideri il cocktail *Agrumi e granatina*. Indicati con p il numero di bicchieri da 20 cl e con g il numero di bicchieri da 25 cl, deve valere la relazione $600 = 20p + 25g$ con p e g numeri interi. Conoscendo p è possibile determinare la corrispondente quantità g attraverso la formula $g = \frac{600 - 20p}{25}$. Poiché p e g devono essere numeri interi, p può assumere un numero finito di valori, in particolare p può essere solo un multiplo di 5 minore o uguale a 30 (altrimenti il numeratore della frazione che consente di calcolare g non è multiplo di 25 oppure diventa un numero negativo). Le possibilità per servire la bibita sono riassunte nella seguente tabella (dalla quale sarà facilmente ricavabile il grafico).

Bicchieri piccoli	0	5	10	15	20	25	30
Bicchieri grandi	24	20	16	12	8	4	0



Approccio esplorativo

Attività

1

Sistemi equivalenti

Per le lezioni:

- 1 Introduzione ai sistemi lineari
- 2 Metodi di risoluzione dei sistemi lineari

Un sistema lineare in due equazioni in due incognite è determinato se esiste una coppia di numeri che soddisfa entrambe le equazioni. Come sai, per trovare tale soluzione si possono disegnare sul piano cartesiano le rette corrispondenti alle due equazioni e individuare le coordinate del loro punto di intersezione.

Considera il sistema $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases}$ e risolvi graficamente, disegnando i grafici delle rette r e s associate rispettivamente alla prima e alla seconda equazione.

Quali sono le coordinate del punto di intersezione A ? $(1; -2)$

Costruisci un sistema equivalente al precedente

Moltiplica tutti i coefficienti della retta r per -3 e i coefficienti della retta s per 2 . Costruisci l'equazione di una terza retta t sommando membro a membro i risultati:

$$\begin{aligned} -3 \cdot \begin{cases} 2x - y = 4 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} -6x + 3y = -12 \\ 10x + 4y = 2 \end{cases} \\ +2 \cdot \begin{cases} 2x - y = 4 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ 10x + 4y = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$4x + 7y = -10 \quad \leftarrow \text{equazione della retta } t$$

Disegna la retta t : in che relazione è con le rette r e s ? Passa per lo stesso punto di intersezione. Si può costruire un sistema equivalente al precedente, cioè che ha la stessa soluzione, sostituendo a una delle due equazioni di partenza l'equazione appena ricavata: perché? Perché la retta t passa per A .

Scrivi un possibile sistema equivalente a quello di partenza.

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 4x + 7y = -10 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} 4x + 7y = -10 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases}$$

Fig. 1

	A	B	C	D	E	F	G
1		$ax+by=c$					
2		r	s	$k \cdot r$	$h \cdot s$	$k \cdot r + h \cdot s$	
3	1° coeff	2	5				
4	2° coeff	-1	2				
5	3° coeff	4	1				
6							

Esplora con coefficienti moltiplicativi diversi

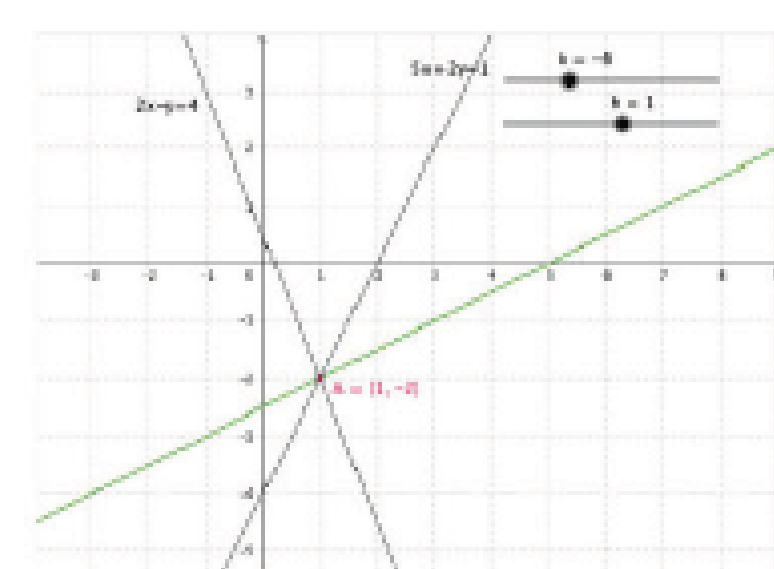
Utilizzando GeoGebra possiamo ripetere più volte l'esperimento, moltiplicando le equazioni del sistema per due numeri interi qualsiasi e disegnando la retta dell'equazione che si ricava sommandole.

- Nella vista **Grafici** inserisci due slider k e h a valori interi, variabili da -10 a $+10$. Apri il Foglio di calcolo e intestalo come in Fig. 1; riporta i coefficienti delle rette r e s nelle colonne B e C. Nella Barra di inserimento scrivi le equazioni delle rette r e s riprendendo i coefficienti inseriti: $B3 \cdot x + B4 \cdot y = B5$ e $C3 \cdot x + C4 \cdot y = C5$. Sul grafico, segna il punto di intersezione A e visualizzane le coordinate.
- Ritorna al Foglio di calcolo; compila la colonna D moltiplicando i coefficienti della prima equazione per k e la colonna E moltiplicando i coefficienti della seconda equazione per h . Nella colonna F costruisci la somma dei risultati ottenuti nelle colonne D ed E.

Attività con GeoGebra

Sistemi equivalenti

FIGURA 2



- Nella Barra di inserimento scrivi l'equazione della retta t : $F3 \cdot x + F4 \cdot y = F5$; colorala in verde la retta corrispondente. Osserva il grafico e muovi gli slider k e h per modificare i fattori moltiplicativi delle equazioni di r e s : che cosa osservi? Tutte le rette che si ottengono passano per $A(1; -2)$.
 - Per quali valori di h e k la retta t è orizzontale? Qual è, in questo caso, l'equazione di t ? $k = -5$ e $h = 2$; $y = -2$.
 - Per quali valori di h e k la retta t è verticale? Qual è, in questo caso, l'equazione di t ? Ci sono diversi valori di k e h , ad esempio $k = 2$ e $h = 1$ oppure $k = -4$ e $h = -2$; $x = 1$.

Scrivi il sistema composto dalle equazioni delle rette, orizzontale e verticale, del fascio e osserva come tale sistema evidenzia la soluzione del sistema.

Hai risolto il sistema di partenza con il metodo di addizione e sottrazione; ne approfondirai l'uso in questa Unità, insieme allo studio di altri metodi di risoluzione.

Perché utilizzare un approccio «problematico» o esplorativo?

Perché favorisce

- la costruzione di significati
 - un uso ragionato e flessibile di strumenti
 - l'interazione fra pari e con l'insegnante
-
- l'inclusione

Perché pone lo studente **al centro** dell'attività didattica.



Quali differenze ci sono con l'approccio sequenziale?

- Cambia il modo di interagire tra docente e studente.
- La gestione del tempo non è più interamente in mano al docente.
- Il docente organizza l'attività e guida gli studenti.



E' possibile far interagire i vari approcci?

Occorre operare delle **scelte**, in base al tempo che si ha a disposizione, alla classe, ecc. e stabilire quando far intervenire ciascuno dei tre approcci.

L'approccio esplorativo «contiene» gli altri due: è sempre possibile partire da un'attività di laboratorio e farla seguire da un intervento di tipo sequenziale o problematico.



Laboratorio di matematica: le Indicazioni Nazionali

Tutte le discipline dell'area (scientifica) hanno come **elemento fondamentale il laboratorio**, inteso:

- sia come *luogo fisico*
- sia come *momento in cui l'alunno è attivo*, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, impara a raccogliere dati e a confrontarli con le ipotesi formulate, negozia e costruisce significati interindividuali, porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze personali e collettive.

In tutte le discipline dell'area, **inclusa la matematica**, avrà cura di ricorrere ad attività pratiche e sperimentali e a osservazioni sul campo, con un carattere non episodico e inserendole in percorsi di conoscenza.



Laboratorio di matematica: le proposte UMI CIIM

Il laboratorio di matematica **non è un luogo fisico diverso dalla classe**, è piuttosto un insieme strutturato di **attività volte alla costruzione di significati** degli oggetti matematici.

Il laboratorio, quindi, coinvolge persone (studenti e insegnanti), strutture (aule, strumenti, organizzazione degli spazi e dei tempi), idee (progetti, piani di attività didattiche, sperimentazioni).

L'ambiente del laboratorio di matematica è in qualche modo assimilabile a quello della **bottega rinascimentale**, nella quale gli apprendisti imparavano facendo e vedendo fare, comunicando fra loro e con gli esperti.

Matematica per il cittadino, UMI CIIM



Approccio esplorativo: un altro esempio

Biancomangiare

Il Biancomangiare è un dolce così chiamato perché gli ingredienti usati per realizzarlo sono tutti di colore bianco. Da esso trae spunto il nome di una celebre curva, chiamata, appunto, in inglese, *Blancmange curve*, detta anche *curva di Takagi*, che è stata proposta nel 1903 dal matematico giapponese Teiji Takagi, come esempio di grafico di una funzione continua in tutto il suo dominio ma non derivabile in alcun punto. Si tratta di una curva frattale, di cui costruiamo un'approssimazione utilizzando GeoGebra.

Costruisci la funzione

Convieni impostare la griglia di GeoGebra in modo che ogni quadratino abbia lato 0,5.

1. Disegna il grafico della funzione predefinita $\text{round}(x)$ e denominala con $a(x)$. Che tipo di grafico hai ottenuto? Come opera questa funzione?

È una funzione a gradini che arrotonda x all'intero più vicino.

2. Disegna il grafico della funzione $b(x) = x - a(x)$. Che tipo di grafico hai ottenuto?

È un grafico a dente di sega. La funzione associa a x la differenza tra x e il suo arrotondamento.

3. Disegna il grafico della funzione $s(x) = |b(x)|$, mediante il comando $s(x) = \text{abs}(b(x))$. Che cosa rappresenta questa funzione?

È un'onda triangolare e rappresenta la distanza tra il valore di x e la sua approssimazione.

La curva di Takagi è il grafico della funzione che ha la seguente espressione:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{s(2^k x)}{2^k}$$
. Si tratta quindi di una somma infinita di funzioni del tipo disegnato al punto 3.

Attività B

STEM

Per la lezione:

6 Studio della derivabilità di una funzione



Attività con GeoGebra
Biancomangiare

Noi ci limiteremo a tracciare le sue approssimazioni per k che varia da 0 a 10.

4. Crea uno slider k , variabile da 0 a 10, con incremento uguale a 1, e portalo al valore 0.

5. Disegna i grafici delle funzioni che sono i termini della successione associata alla serie: $u_k(x) = \frac{s(2^k x)}{2^k}$. Che tipo di funzione visualizzi per $k = 0$? La funzione $s(x)$.

Fai aumentare k e osserva il grafico che ottieni. Come cambia? Perché?

L'onda triangolare a ogni passaggio dimezza il proprio periodo e la propria ampiezza.

Ora che hai visualizzato le onde triangolari, occorre disegnare il grafico che si ottiene dalla loro somma. Riporta k a 0.

6. Inserisci il comando *Successione*($s(2^i x) / 2^i, i, 0, k$): esso ti permette di disegnare la successione delle funzioni corrispondenti a un certo valore di k . Per $k = 0$ visualizzi la funzione u_0 , per $k = 1$ visualizzi u_0 e u_1 e così via (Fig. 3). Verificalo.

7. Il comando precedente ha creato una lista di funzioni e l'ha denominata automaticamente $l1$. Per disegnare il grafico della funzione somma puoi digitare il comando $c(x) = \text{Somma}(l1, k)$. Indica infine con $f(x)$ la funzione che si ottiene restringendo $c(x)$ all'intervallo $[0; 1]$. In Fig. 4 è mostrato il grafico che si ottiene per $k = 10$.

8. Riporta k a 0, disegna la funzione $f'(x)$ e osserva il suo comportamento all'aumentare di k . Che cosa puoi dire? È una funzione costante a tratti: all'aumentare di k , il numero di salti che essa compie è sempre maggiore.

All'aumentare di k , le funzioni che approssimano $f(x)$ sono tutte continue ma il numero di punti in cui non sono derivabili aumenta sempre di più.

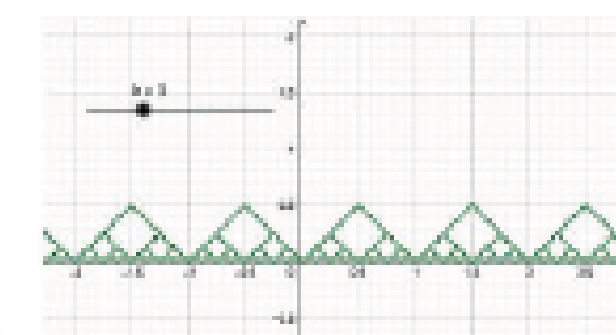


FIGURA 3

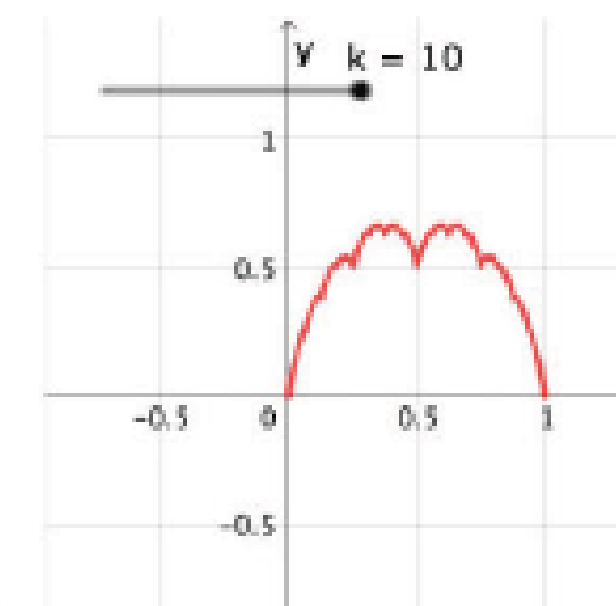


FIGURA 4

Le proposte laboratoriali di *Matematica allo specchio*

- Le attività di inizio Unità
- Le attività fra gli esercizi
- Esplorare con GeoGebra
- Con GeoGebra



Attività di inizio Unità:

Numeri razionali

Attività 1 Divisioni inarrestabili

Ragiona in generale

Usa il foglio di calcolo per trovare quozienti e resti in altre divisioni. Procedi come segue:

- prima cambia solo il dividendo a ;
- in seguito cambia solo il divisore b , osservando che non può essere uguale a 0;
- infine cambia sia il dividendo sia il divisore.

Se il quoziente non è intero, osserva quali tipi di numeri decimali si ottengono nei seguenti casi:

- a. il divisore non contiene fattori primi diversi da 2 e da 5
- b. il divisore contiene almeno un fattore primo diverso da 2 e da 5

Può accadere che il risultato sia un decimale infinito non periodico? Perché?

Come si può quindi stabilire, osservando dividendo e divisore, se la divisione ha un risultato decimale finito o decimale illimitato?



Le attività fra gli esercizi

26 ATTIVITÀ Con la carta Probabilmente ti è capitato di disegnare due rette parallele avendo a disposizione una squadra, il righello e la matita. Rivediamo il procedimento. Su un foglio di carta, con il righello, disegna un segmento b .

Non sollevare il righello dal foglio. Facendo scorrere la squadra appoggiata al righello puoi disegnare una coppia di semirette incidenti a b e parallele fra di loro; poi con il righello puoi prolungare le semirette dall'altra parte di b , in modo da ottenere due rette.



Spiega perché le due rette disegnate sono parallele.

169 ATTIVITÀ Con carta, forbici e goniometro

Ritaglia un triangolo da un foglio di carta.

Piegalo in modo che due vertici si tocchino, restando sullo stesso lato a cui essi appartengono: ottieni in questo modo un pentagono, scomposto in due triangoli e un quadrilatero.

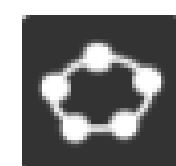
Verifica con il goniometro che questo quadrilatero ha due angoli opposti congruenti: di quale coppia si tratta?

Sapresti spiegare, con una dimostrazione rigorosa, il motivo di ciò che hai osservato?

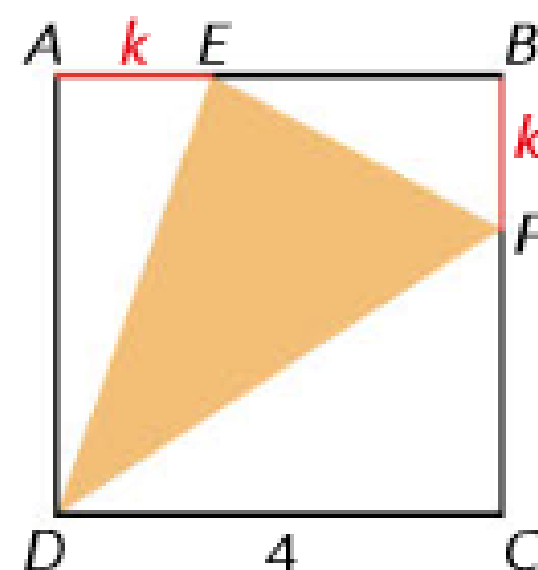


Le attività fra gli esercizi

207 ATTIVITÀ Con GeoGebra Costruisci un quadrato $ABCD$ di lato 4 e crea uno slider k che possa variare da 0 a 4 con passo 0,1.



Sui lati AB e BC del quadrato considera i punti E e F a distanza k rispettivamente da A e da B e costruisci il triangolo DEF con lo strumento *Poligono*: GeoGebra visualizza l'area del triangolo nella finestra Algebra.



Porta k a 0, visualizza il foglio di calcolo e registra su di esso i valori di k e dell'area di DEF , su due colonne diverse. Attiva l'animazione di k : sul foglio di calcolo vengono create due colonne di dati.

a. Visualizza la vista Grafici 2 e crea una lista di punti a partire dai dati che hai sul foglio di calcolo.

Su quale tipo di curva ti sembrano allineati i punti che hai trovato?

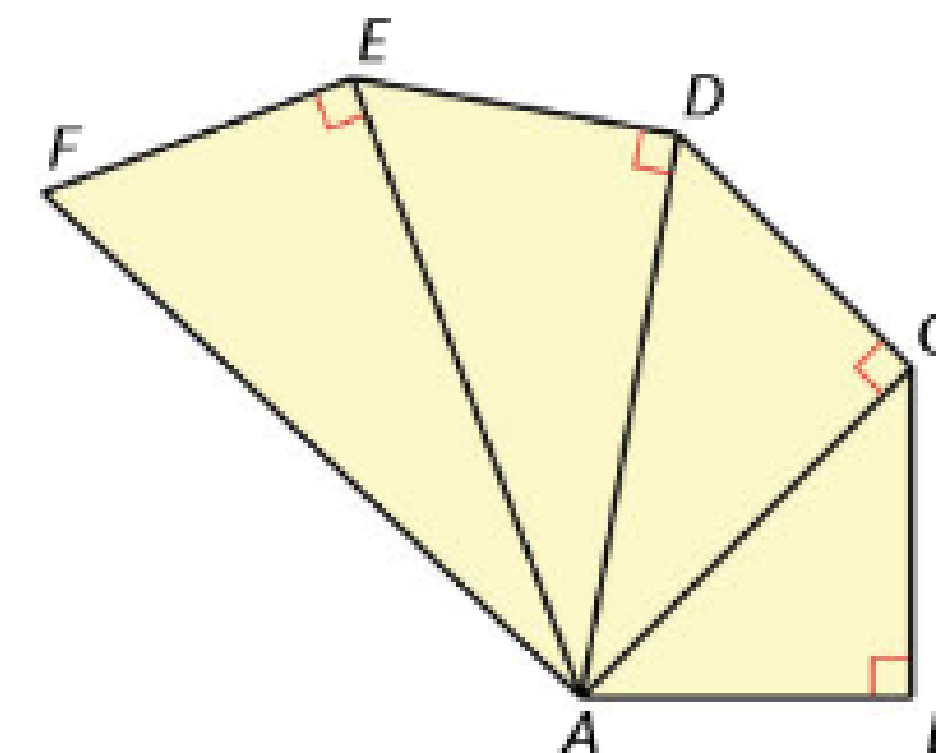
b. Costruisci algebricamente la funzione che rappresenta l'area del triangolo DEF al variare di k , rappresentala in Grafici 2 e verifica che passa per i punti trovati. Per quale valore di k l'area del triangolo DEF è minima?

Foglio di calcolo			
	A	B	
1	k	t1	
2	0	8	
3	0.1	7.8	
4	0.2	7.62	
5	0.3	7.44	
6	0.4	7.28	
7	0.5	7.13	
8	0.6	6.98	
9	0.7	6.85	
10	0.8	6.72	
11	0.9	6.61	
12	1	6.5	
13	1.1	6.41	
14	1.2	6.32	
15	1.3	6.25	

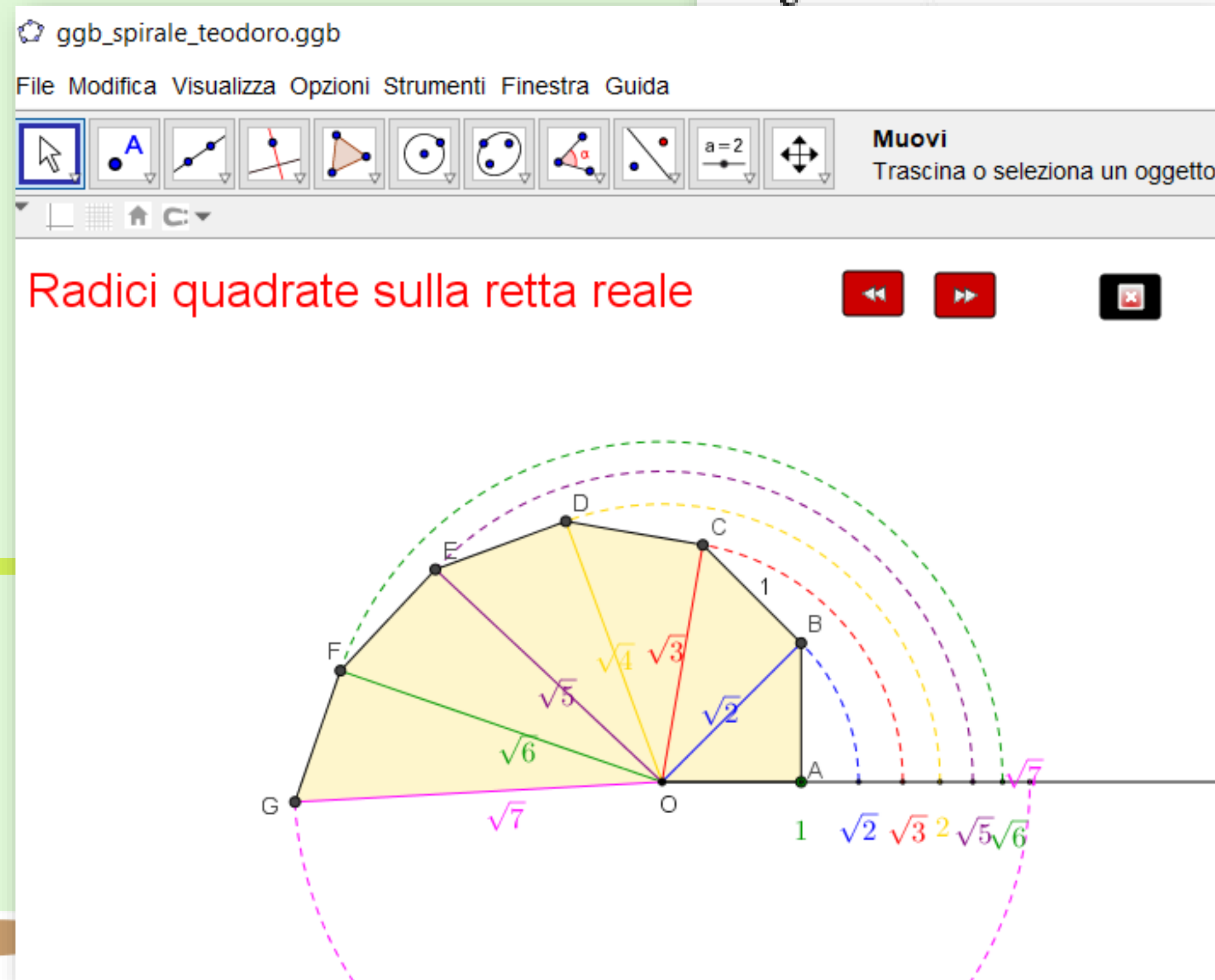
$$\left[\text{a. } a(k) = \frac{1}{2}k^2 - 2k + 8; \text{ b. } k = 2 \right]$$

Esplora con GeoGebra

37 ESPLORA CON GEOGEBRA **STORIA** Con l'utilizzo del teorema di Pitagora è possibile rappresentare dei segmenti la cui misura è la radice quadrata di un qualsivoglia numero intero. È sufficiente partire da un segmento AB di lunghezza 1 e costruire un segmento BC , perpendicolare ad AB e anch'esso di lunghezza 1. L'ipotenusa AC del triangolo rettangolo così costruito ha lunghezza $\sqrt{2}$; si costruisce il segmento CD , perpendicolare ad AC e sempre di



ottenere un nuovo triangolo rettangolo ACD la cui ipotenusa AD ha lunghezza $\sqrt{3}$ (verificare per esercizio). Proseguendo in questo modo si ottengono segmenti di misura $\sqrt{n}$. La spezzata che si ottiene è la **spirale di Teodoro di Cirene**. Costruisci con riga e compasso la spirale fino all'ottavo triangolo verificando che l'ultimo misuri 3.



Con GeoGebra

Esegui le seguenti costruzioni con GeoGebra

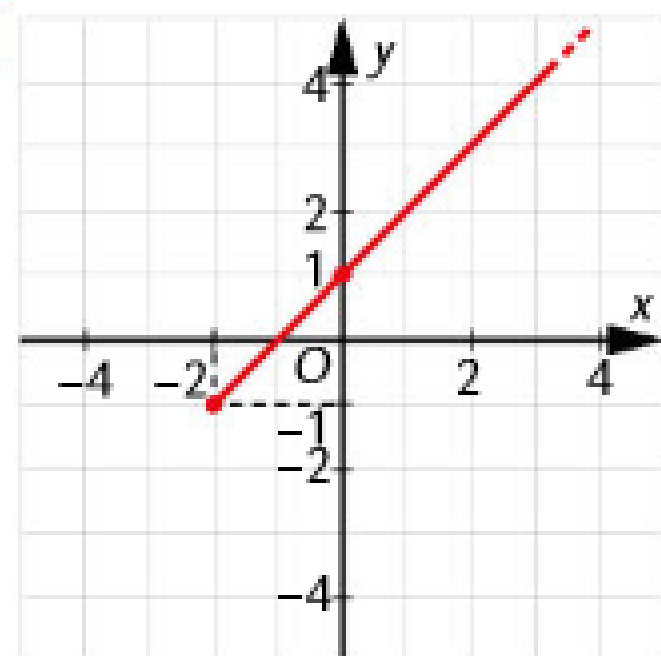
158 Disegna una circonferenza di centro O e un punto P su di essa. Con il comando *Tangenti* disegna la retta tangente alla circonferenza nel punto P e verifica che tale retta è perpendicolare a PO , disegnando l'angolo tra le due rette.

159 Disegna una circonferenza di centro O e un punto P esterno a essa. Con il comando *Retta perpendicolare* disegna la retta passante per P e perpendicolare a OP e verifica che tale retta è tangente alla circonferenza, determinando le intersezioni tra essa e la circonferenza.

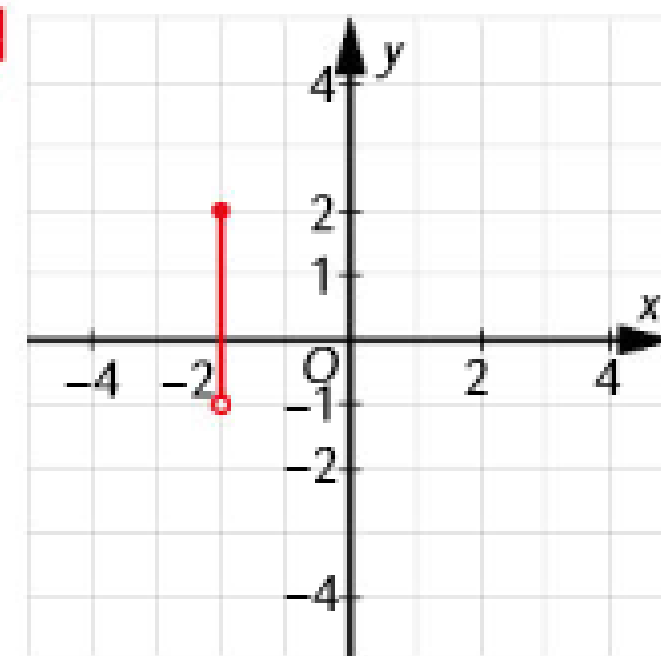
219 Con GeoGebra Disegna una circonferenza e da un punto P esterno a essa traccia i due segmenti di tangente PA e PB . Considera un punto C sul maggiore degli archi delimitati da A e da B . Misura le ampiezze degli angoli $\widehat{PAC}$ e $\widehat{PBC}$; come varia la somma delle ampiezze di tali angoli al variare di C sull'arco AB ? Formula una congettura e dimostrarla.

INTERPRETA I GRAFICI Scrivi un sistema misto che rappresenti i segmenti e le semirette rappresentati nelle figure.

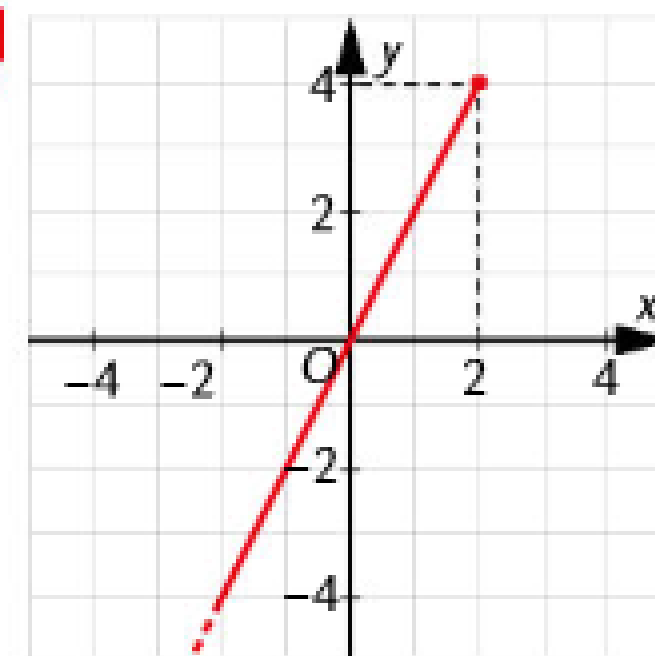
574



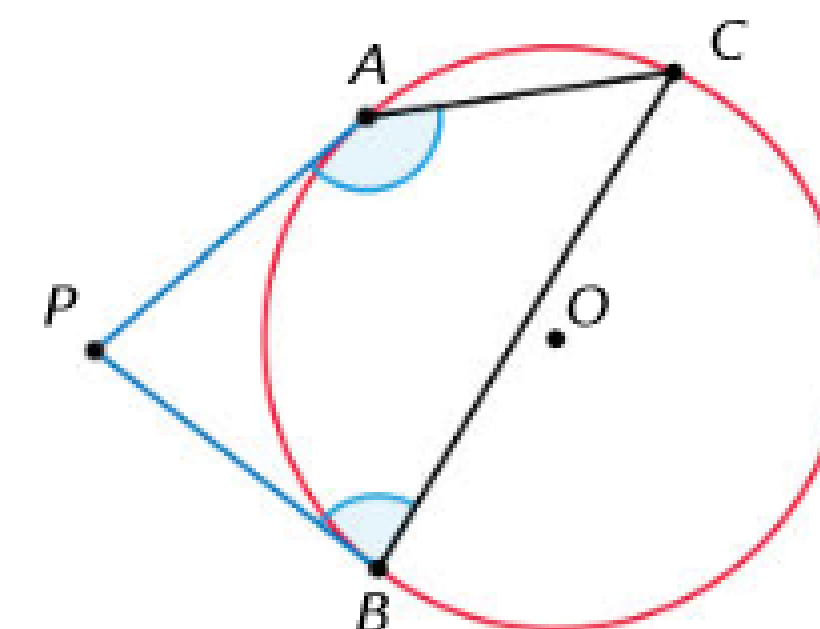
575



576



581 Con Geogebra Verifica le tue rappresentazioni degli **Esercizi 574-579** usando opportunamente la funzione Se di GeoGebra e i connettivi logici.



Rendere gli
alunni
consapevoli
con esercizi
per
competenze
diverse e
crescenti

1. ESERCIZI DI LEZIONE
2. ACCRESCI LE TUE COMPETENZE
3. METTITI ALLA PROVA
4. PROVA FINALE



Esercizi di lezione suddivisi in quattro categorie

1. CAPIRE I CONCETTI
2. APPLICARE PROCEDIMENTI
3. RISOLVERE PROBLEMI
4. SCRIVERE E DISCUTERE DI MATEMATICA



- Esercizi per riflettere sulle proprietà fondamentali, anche attraverso rappresentazioni grafiche e test a scelta multipla.
- Esercizi per l'autovalutazione nella prima fase dell'apprendimento
- Esercizi introduttivi, ma anche per il ripasso e il recupero

Lezione 2 Simmetria

TEORIA PAG. 322

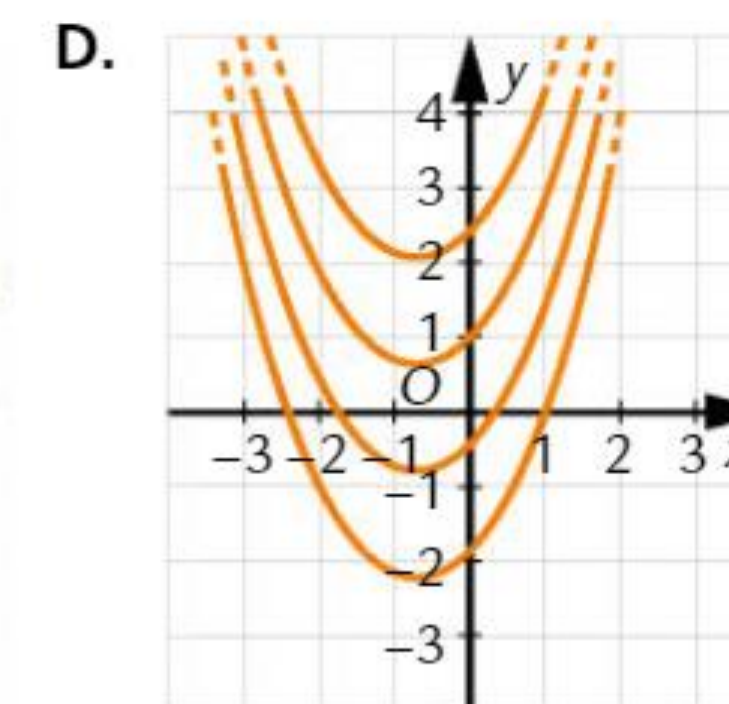
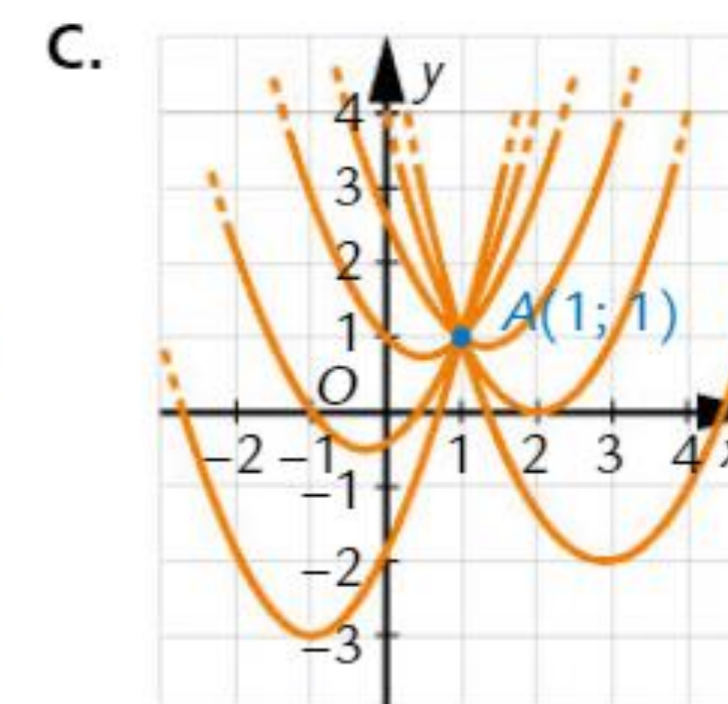
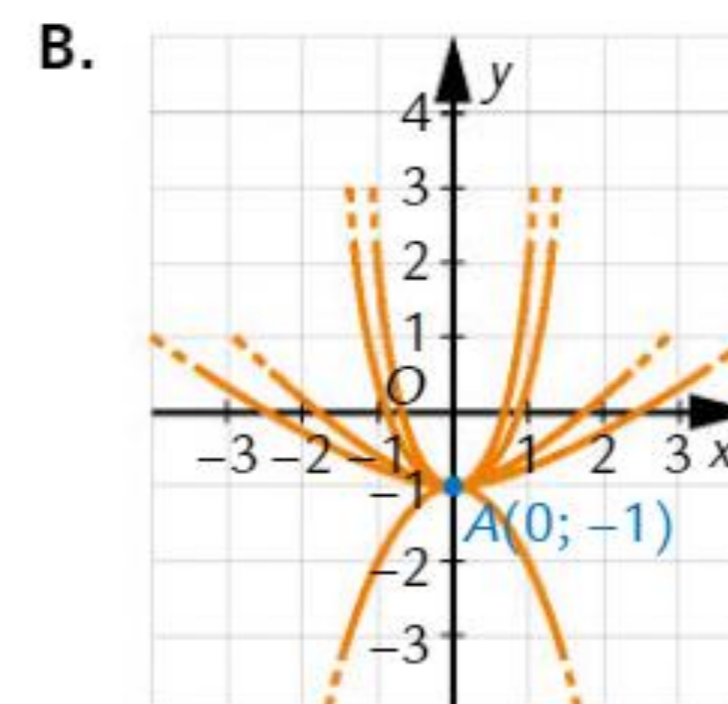
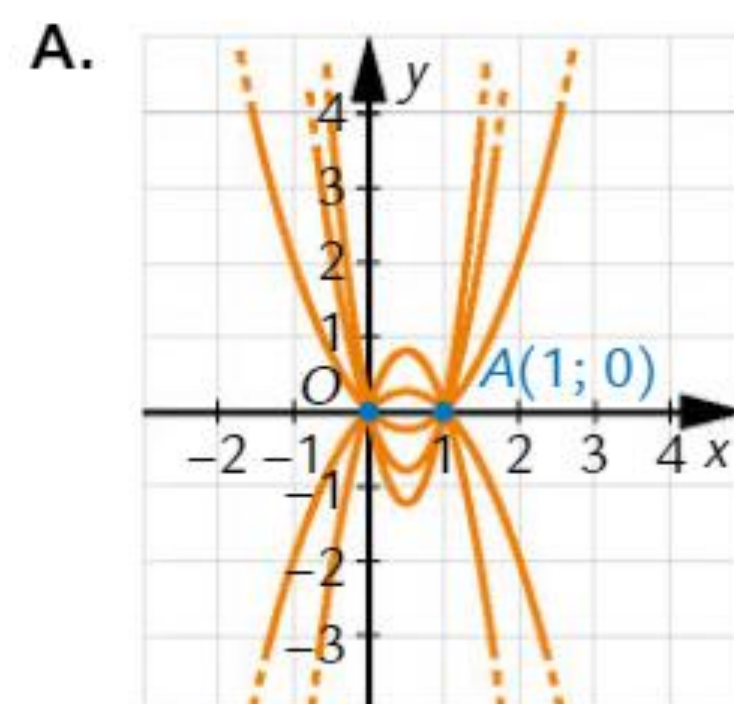
► CAPIRE I CONCETTI

132 Vero o falso?

- a. In una simmetria centrale, il centro C coincide con il punto medio del segmento che unisce P e il trasformato di P . (V) (F)
- b. I punti di una retta passante per il centro di una simmetria centrale vengono trasformati in se stessi. (V) (F)
- c. Una retta che non passa per il centro C di una simmetria centrale viene trasformata in una retta che non passa per il centro C . (V) (F)
- d. La trasformazione di equazioni $\begin{cases} x' = -x + 8 \\ y' = -y \end{cases}$ è una simmetria centrale di centro $(4; 0)$. (V) (F)

354 Associa a ciascuna delle seguenti equazioni il grafico corrispondente.

1. $y = x^2 + x + k$ 2. $y = \frac{k-3}{k+1}x^2 - 1$ 3. $y = kx^2 - kx$ 4. $y = x^2 - kx + k$



- Acquisire tecniche di calcolo e procedure
- Esplorare grafici, anche con Geogebra o la calcolatrice grafica
- Confrontare metodi diversi

► APPLICARE PROCEDIMENTI

Rette tangenti e normali

620 ESERCIZIO SVOLTO Determina le equazioni della retta tangente e della retta normale al grafico della funzione $y = \frac{\sqrt{x+5}}{x-1}$ nel suo punto di ascissa 4. Controlla poi la correttezza dei tuoi risultati con GeoGebra.

SOLUZIONE

La retta tangente nel punto di coordinate $(x_0; f(x_0))$ ha equazione: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, mentre la retta normale ha equazione: $y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

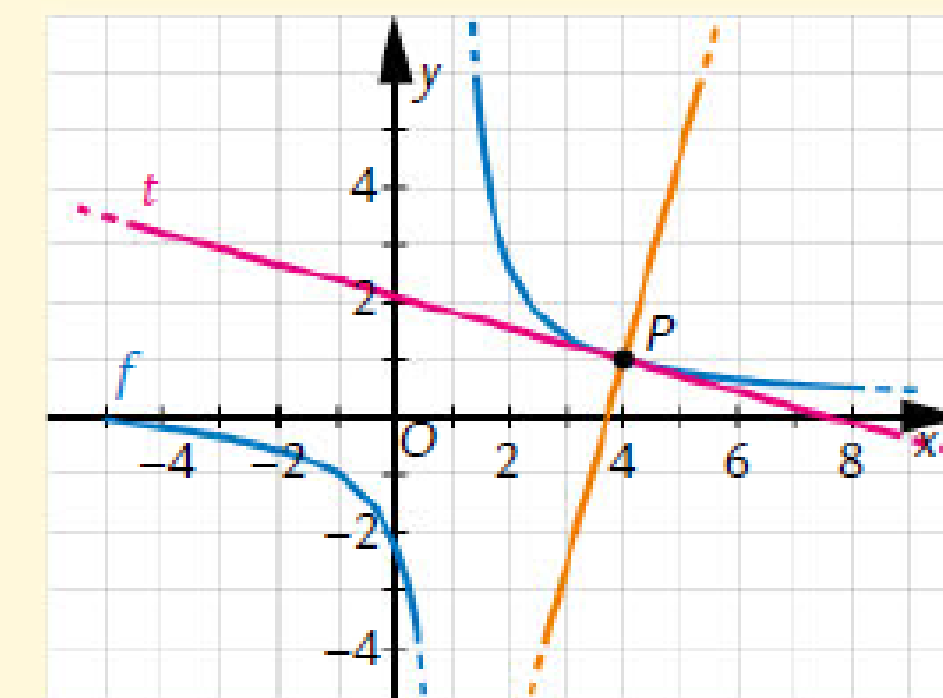
Calcoliamo la derivata: $f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+5}}(x-1) - \sqrt{x+5}}{(x-1)^2} = -\frac{x+11}{2(x-1)^2\sqrt{x+5}}$

Calcoliamo il valore della funzione e della derivata nel punto $x_0 = 4$:

$$f(x_0) = f(4) = 1, \quad f'(x_0) = f'(4) = -\frac{5}{18}.$$

La retta tangente ha equazione: $y = 1 - \frac{5}{18}(x - 4) \Leftrightarrow y = -\frac{5}{18}x + \frac{19}{9}$.

La retta normale ha equazione: $y = 1 + \frac{18}{5}(x - 4) \Leftrightarrow y = \frac{18}{5}x - \frac{67}{5}$.



621 Scrivi l'equazione della retta tangente e della retta normale al grafico della funzione $y = \ln x$, nel suo punto di intersezione con l'asse x .
[$y = x - 1$; $y = 1 - x$]

622 Scrivi l'equazione della retta normale al grafico della funzione $y = x^2 + \ln x$ nel suo punto di ascissa unitaria.
[$y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$]

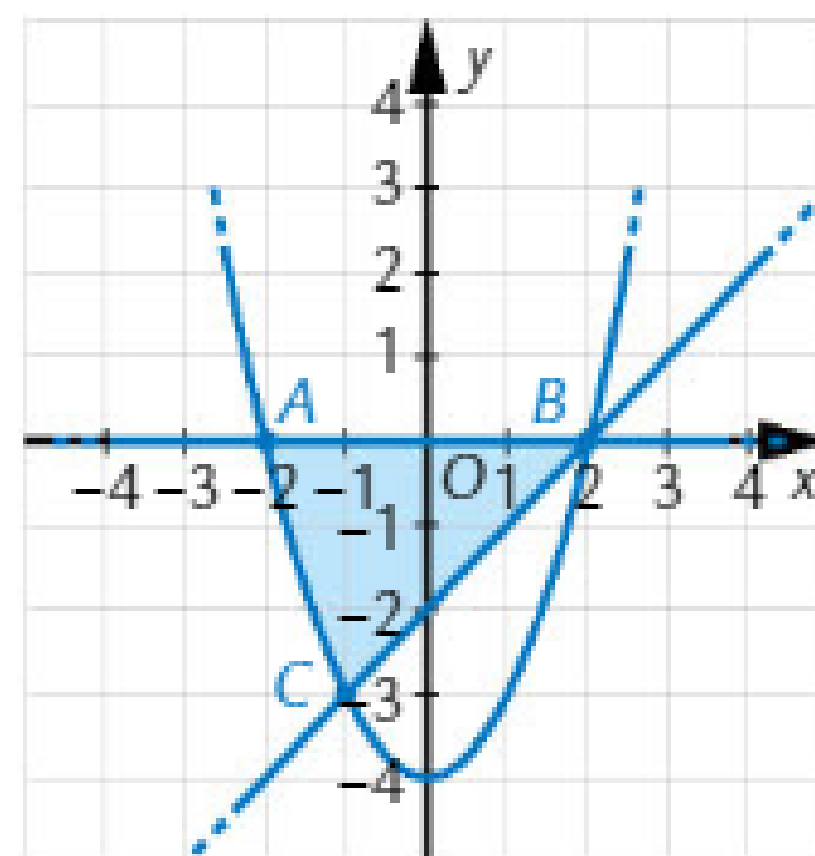
- Analizzare situazioni nuove
- Individuare strategie adeguate
- Integrare conoscenze matematiche e strumentali

► RISOLVERE PROBLEMI

Lezione 7 | Funzioni e figure piane riconducibili alla parabola

Area di regioni piane limitate da archi di parabola

511 Determina l'area della parte di piano indicata in figura, sapendo che è limitata dalla parabola di equazione $y = x^2 - 4$, dalla retta $y = x - 2$ e dalla retta $y = 0$.



$$\left[x = \frac{37}{6} \right]$$

512 Dati i punti: $A(0; 3)$, $B(1; 2)$, $C(3; 4)$, determina le equazioni:

a. della parabola di vertice B che passa per A ;

514 Considera la parabola di equazione: $y = ax^2 + 2x + 1$, con $a \neq 0$.

Determina per quali valori di a la parabola individua con la retta di equazione $y = x + 1$ un segmento parabolico di area 6.

$$\left[a = \pm \frac{1}{6} \right]$$

515 Considera le funzioni $f(x) = \sqrt{|2x|}$ e $g(x) = 2 + \sqrt{4 - x^2}$.

a. Traccia i loro grafici.

b. Risolvi graficamente la disequazione $\sqrt{|2x|} \geq 2 + \sqrt{4 - x^2}$.

c. Determina l'area della regione finita di piano limitata dai grafici delle due funzioni.

$$\left[\text{b. } x = \pm 2; \text{c. } 2\pi + \frac{8}{3} \right]$$

- Dimostrare per sviluppare il pensiero matematico
- Argomentare per costruire il pensiero critico

► SCRIVERE E DISCUTERE DI MATEMATICA

106 Dimostra che due ellissi sono congruenti se e solo se hanno semiassi di pari lunghezza.



107 ATTIVITÀ CON LA CALCOLATRICE GRAFICA Disegna una circonferenza c di centro C e un punto F interno alla circonferenza. Traccia un punto M sulla circonferenza e disegna il segmento FM . Costruisci l'asse del segmento FM e la retta CM . Chiamata P il punto d'intersezione tra l'asse s e la retta CM . Trova il luogo dei punti P al variare di M .

STEM

- Verifica che P descrive un'ellisse di fuochi C e F .
- Se il centro della circonferenza è $C(-4; 0)$, F ha coordinate $(4; 0)$ e il raggio della circonferenza è 10, determina l'equazione dell'ellisse.

432 TROVA L'ERRORE Valerio afferma che il limite $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2} - x)$ è una forma indeterminata e lo risolve così:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2} - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2} - x)(\sqrt{x^2 + 2} + x)}{\sqrt{x^2 + 2} + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2 + 2} + x} = 0$$

Quale errore ha commesso Valerio?

523 INVENTA TU Fornisci l'esempio di una funzione periodica f tale che $|f|$ abbia lo stesso periodo di f , e l'esempio di una funzione periodica f tale che $|f|$ abbia periodo inferiore a quello di f . Motiva le tue scelte.

Accresci le tue competenze

1. Utilizzare tecniche di calcolo e rappresentare graficamente
2. Interpretare grafici e dati
3. Risolvere problemi e costruire modelli
4. Ragionare, giustificare, argomentare



Accresci le tue competenze

- Consolidare l'utilizzo di tecniche del calcolo
- Potenziare la capacità di rappresentazione e interpretazione dei grafici

► UTILIZZARE LE TECNICHE DEL CALCOLO E RAPPRESENTARE GRAFICAMENTE

Calcola i seguenti limiti.

$$924 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$$

$$925 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \ln x^2}{1 + \ln x}$$

$$926 \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{2x - \pi}$$

$$\left[\frac{1}{4}\right]$$

$$944 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{10 + x\sqrt{x}} \quad [+\infty]$$

$$[-2]$$

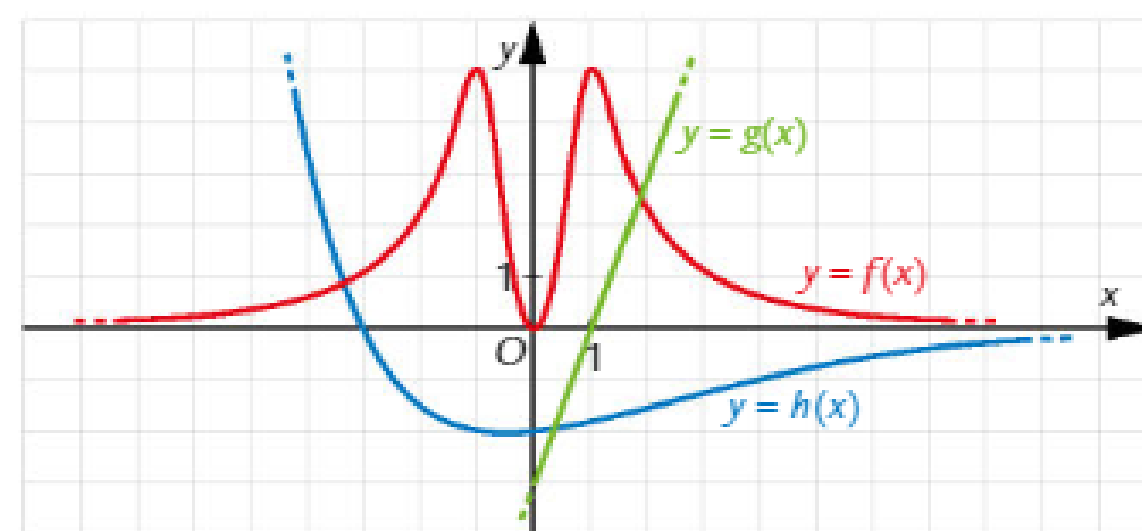
$$945 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3}{\sin x \ln^2 x} \quad [0]$$

$$[0]$$

$$946 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{2x} - 1)\ln^2(1+x)}{x^3} \quad [2]$$

► INTERPRETARE GRAFICI E DATI

1007 A partire dalle informazioni che si possono dedurre dai grafici, determina, se possibile, il valore dei seguenti limiti (alcuni limiti si presentano sotto forma indeterminata, quindi non è possibile calcolarli senza ulteriori informazioni).



- Science
 - Technology
 - Engineering
 - Mathematics
-
- Fisica Educazione finanziaria
 - Problemi dalla realtà
 - Educazione civica

► RISOLVERE PROBLEMI E COSTRUIRE MODELLI

1030 SALUTE Uno dei più semplici modelli (il cosiddetto modello SIS) per descrivere la propagazione di una malattia né mortale né immunizzante (come il raffreddore) in una popolazione di N individui è costituito dalla funzione:

$$I(t) = \frac{(rN - \gamma)I_0}{rI_0 + [(rN - \gamma) - rI_0]e^{(\gamma - rN)t}}$$

dove $I(t)$ rappresenta il numero di individui infetti al tempo t , I_0 è il numero di individui infetti nell'istante iniziale di osservazione $t = 0$, r è una costante che rappresenta il tasso di infezione (dipendente dal meccanismo di contagio e dal modo in cui gli individui sono a contatto) e γ è una costante che esprime il tasso di guarigione (dipendente dall'evoluzione della malattia in un individuo).

Discuti, al variare dei parametri, l'evoluzione nel lungo periodo di una malattia secondo questo modello.

[La malattia tende a estinguersi o a diventare endemica, a seconda che ...]



- Riflettere e approfondire
- Stimolare e sviluppare la creatività

► RAGIONARE, GIUSTIFICARE, ARGOMENTARE

- 1040** Fornisci l'esempio di una funzione (devi scrivere l'espressione analitica e disegnare la parte di grafico interessata):
- a. che non soddisfa l'ipotesi di continuità del teorema di Weierstrass ma ammette comunque un massimo e un minimo assoluti in un intervallo chiuso e limitato;
 - b. che non soddisfa l'ipotesi di continuità del teorema di Weierstrass e per questo non ammette massimo o minimo assoluti in un intervallo chiuso e limitato;
 - c. che non soddisfa l'ipotesi di continuità del teorema di esistenza degli zeri ma ammette comunque uno zero all'interno di un intervallo chiuso e limitato;
 - d. che non soddisfa l'ipotesi di continuità del teorema di esistenza degli zeri e per questo non ammette zeri all'interno di un intervallo chiuso e limitato.

697 SAPERNE DI PIÙ I criteri del confronto presentati nella **Lezione 6** valgono solo se le funzioni prese in considerazione sono positive nell'intervallo di integrazione. Esistono altri criteri validi anche per funzioni con segno variabile. Ad esempio, vale il seguente criterio, detto **criterio della convergenza assoluta per integrali impropri**: sia $f(x)$ definita in $[a; +\infty[$; se l'integrale improprio $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ è convergente, allora lo è anche $\int_a^{+\infty} f(x) dx$.

Utilizza questo criterio per dimostrare che $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ è convergente.

PROBLEMI E MODELLI - MATEMATICA

456 Considera la funzione $y = f(x) = e^{-x^n}$, con $n > 1$ numero naturale.

- Dimostra che se n è pari la funzione ha un asintoto orizzontale per $x \rightarrow \pm\infty$, mentre se n è dispari ha un asintoto orizzontale per $x \rightarrow -\infty$.
- Dimostra che se n è pari la funzione ha un massimo assoluto, mentre se n è dispari non ha estremi assoluti.
- Dimostra che se n è pari la funzione non ha flessi, mentre se n è dispari ne ha esattamente due, di cui uno per $x = 0$ che risulta a tangente orizzontale.
- Se n è dispari, sia x_F il punto di flesso diverso da $x = 0$. Calcola la sua espressione in dipendenza da n , dimostra che è sempre minore di 1, e che $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_F = 1$.
- Traccia un grafico della funzione nei due casi n pari e n dispari.

[b. se n è pari, la funzione è crescente se $x < 0$, decrescente se $x > 0$; se n è dispari, la funzione è sempre decrescente; c. $f''(x) = -nx^{n-2}(n-1-nx^n)e^{-x^n}$, che è sempre non negativa se n è pari, mentre ha due zeri se n è dispari e studiando il segno...; d. $x_F = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$]

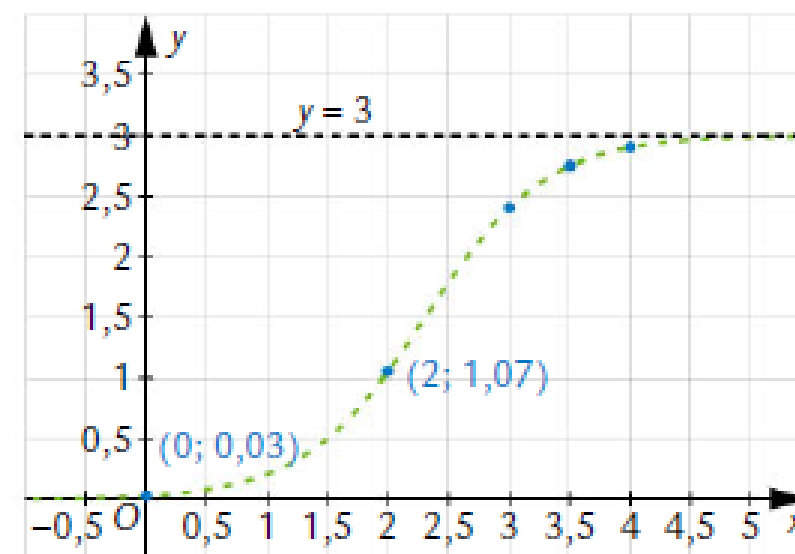
457 Per modellizzare la crescita di una popolazione di batteri si cerca una funzione $f(t)$ che abbia le seguenti proprietà:

- $f(t) > 0$ nel suo dominio;
- $f(t)$ sia crescente nel suo dominio;
- $f(t)$ abbia un asintoto orizzontale destro.

a. Individua quale tra le seguenti funzioni è adatta allo scopo, motivando la risposta (a, b, c sono numeri reali positivi):

- $y = ate^{bt+ct}$;
- $y = \frac{a}{1 + be^{-ct}}$;
- $y = \frac{a}{1 - b \ln(ct)}$.

b. La figura a lato riporta dei dati raccolti in laboratorio riguardo alla numerosità di una particolare popolazione batterica (in unità di 1000) in funzione del tempo (misurato in secondi). Ricava i valori di a, b, c a partire dalle informazioni presenti nel grafico (usa tutte le cifre significative fornite).



c. Calcola le espressioni della derivata prima e della derivata seconda di $f(t)$ e disegna i grafici aiutandoti con il grafico di $f(t)$, in particolare calcolando il punto di flesso di $f(t)$. Che cosa rappresentano queste funzioni rispetto alla popolazione dei batteri? Quale interpretazione si può dare al punto di flesso t_F ?

d. Considera la funzione $y = \frac{2,97t^2}{t^2 + 2(t+1)} + 0,03$ e studiane il grafico tralasciando lo studio della derivata seconda.

Può essere utilizzata per modellizzare la popolazione batterica in alternativa alla funzione dei punti precedenti? Motiva la tua risposta. [a. 2.; b. $a = 3, b = 99, c = 2$; c. $t_F = \ln\sqrt{99}$; d. Sempre positiva, asintoto orizzontale $y = 3$, minimo assoluto per $t = 0$, massimo assoluto per $t = -2$]

PROBLEMI E MODELLI - MATEMATICA E FISICA

710 Indichiamo con M, R , rispettivamente la massa e il raggio della Terra. La Terra esercita una forza gravitazionale di intensità $F(r) = \frac{GMm}{r^2}$ su un oggetto di massa m , il cui baricentro è posto a una distanza r dal centro della Terra (essendo G la costante di gravitazione universale).

- Verifica che il lavoro W (in joule) necessario per portare un oggetto posto sulla superficie della Terra infinitamente lontano da essa è uguale a $\frac{GMm}{R}$.
- Un oggetto di massa m , lanciato dalla superficie della Terra con velocità iniziale v_0 , esce dalla zona di influenza del campo gravitazionale terrestre se la sua energia cinetica è almeno uguale al lavoro necessario per portare l'oggetto infinitamente lontano dalla Terra: tenendo conto di ciò e del risultato ottenuto al punto a, verifica che $v_0 \geq \sqrt{\frac{2GM}{R}}$.

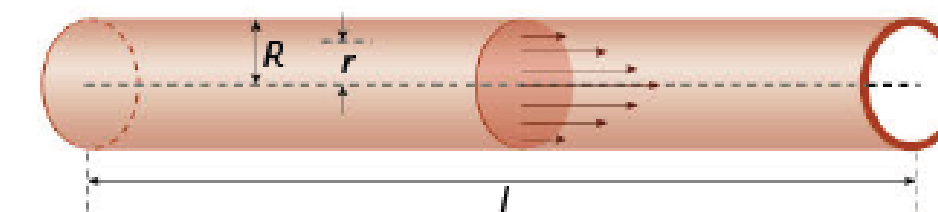
Utilizzando i risultati ottenuti nei punti precedenti, calcola il lavoro necessario per portare un satellite di 1000 kg infinitamente lontano dalla Terra e la sua velocità di fuga dalla superficie terrestre (cioè la minima velocità con cui deve essere lanciato il satellite dalla Terra per uscire dalla zona di influenza del campo gravitazionale).

[c. $W = 6,26 \cdot 10^{10}$ J; $v_{fuga} = 11,2$ km/s]

711 Gli studi di emodinamica hanno permesso di determinare la funzione che esprime la velocità del sangue, considerato come un fluido omogeneo e viscoso, in un vaso sanguigno che si può localmente approssimare con un cilindro cavo di raggio R e lunghezza l . La velocità del sangue dipende dalla distanza r dall'asse del vaso sanguigno ed è espressa dalla funzione:

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l} (R^2 - r^2), \text{ con } 0 \leq r \leq R$$

dove η è il coefficiente di viscosità del sangue e Δp è la differenza di pressione tra gli estremi del vaso sanguigno considerato che causa il movimento del sangue nel vaso stesso.



- Determina il valore medio v_m della funzione $v(r)$ nell'intervallo $0 \leq r \leq R$.
- In quali punti del vaso la velocità del sangue è massima? E qual è il valore di tale velocità massima v_M ? A quale percentuale della velocità massima v_M corrisponde la velocità media v_m ?

[a. $v_m = \frac{\Delta p R^2}{6\eta l}$; b. $v_M = \frac{\Delta p R^2}{4\eta l}$, circa 66,7%]

Prova finale | matematica

► PROBLEMA

- 1 In una regione protetta vivono 200 fenicotteri. La popolazione di fenicotteri evolve nel tempo nei successivi dodici anni secondo una velocità di variazione che è ben modellizzata dalla funzione $v_1(t) = 40 - 5t$, con $0 \leq t \leq 12$, dove t è il tempo (in anni) misurato a partire dall'istante $t = 0$ in cui la popolazione è costituita da 200 esemplari e $v_1(t)$ è la velocità di variazione della popolazione misurata in «numero di esemplari/anno».

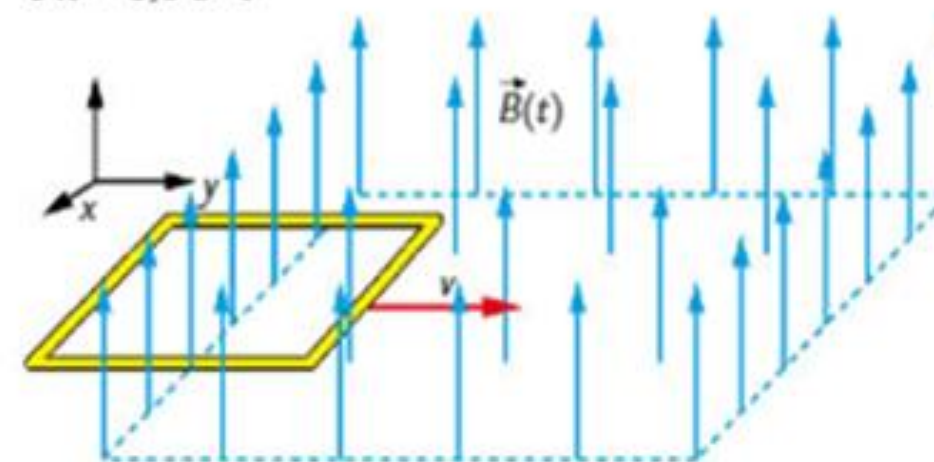


- a. Determina l'espressione analitica della funzione $N_1(t)$, che rappresenta il numero di tempo t , con $0 \leq t \leq 12$, specificando dopo quanto tempo (da $t = 0$) la popolazione massimo numero di esemplari.

Prova finale | matematica e fisica

► PROBLEMA

- 1 La figura mostra una spira metallica quadrata, di lato 10 cm, che si muove nel piano xy , con velocità costante di modulo $v = 10$ mm/s, nella direzione positiva dell'asse y . All'istante $t = 0$ s, la spira entra in una regione interessata da un campo magnetico parallelo all'asse z , di modulo: $B(t) = B_0 \sin(\omega t) e^{-kt}$, misurato in mT, con $\omega = 2\pi$ rad/s e $k = 1,0$ s⁻¹.



- a. Calcola l'espressione della funzione $S(t)$ che esprime la superficie della spira attraversata dalle linee del campo magnetico all'istante t , per $t \geq 0$ (esprimila in unità del Sistema Internazionale).
- b. Calcola l'espressione del flusso del campo magnetico $\Phi(t)$ attraverso la superficie S in funzione del tempo e studiane la continuità e la derivabilità per $t \geq 0$ (esprimila in μWb) e mostra che $\Phi(t)$ per $t > 0$ ammette un numero infinito di massimi e minimi relativi.
- c. Detti t_1 e t_2 rispettivamente il primo e il secondo punto di massimo relativo, diversi da 0, calcolane un'approssimazione a meno di 10^{-3} , usando il metodo di bisezione, e dimostra che $\Phi(t_2)$ è il massimo assoluto del flusso.
- d. Traccia il grafico di $\Phi(\bar{B})$ (tralascia lo studio della derivata seconda) e da esso ricava quello della f.e.m. indotta nella spira.

Ruolo centrale del concetto di funzione

- Approccio «a spirale» dal primo al quinto anno
- Interpretazione e risoluzione grafica
- Nel biennio si antepone il concetto di funzione al calcolo letterale e alla risoluzione di equazioni e disequazioni
 - Funzioni lineari → Equazioni e disequazioni lineari
 - Funzioni razionali → Equazioni e disequazioni frazionarie
 - Funzioni quadratiche → Equazioni e disequazioni non lineari
 - Funzioni irrazionali e con valori assoluti → Equazioni e disequazioni irrazionali e con valori assoluti
- Si riprende il concetto in esercizi e attività in vari ambiti



Lezione 3

TEORIA

RIFLETTI SULLA TEORIA

UNITÀ 5 | Le funzioni

IMPARA

Esplora con GeoGebra
Ricavare il dominio e l'immagine di una funzione dal diagramma cartesiano

Un tondino pieno sul grafico indica che quel punto appartiene al grafico.
Un tondino vuoto indica che il punto non appartiene al grafico.

Interpretazione di grafici

1 Ricavare il dominio di una funzione dal diagramma cartesiano

Dal diagramma di una funzione è possibile ricavare il dominio, proiettando il grafico sull'asse x .
Immagina di proiettare tutti i punti del grafico sull'asse x e di considerare quale parte dell'asse x hai ricoperto: questo è il dominio della funzione.

Esempio 8 - Dominio di una funzione dal diagramma

Osserva il grafico in Fig. 9.

Proiettando tutti i suoi punti sull'asse x , si trova il dominio della funzione, che in questo caso è:

$$\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 6\}$$

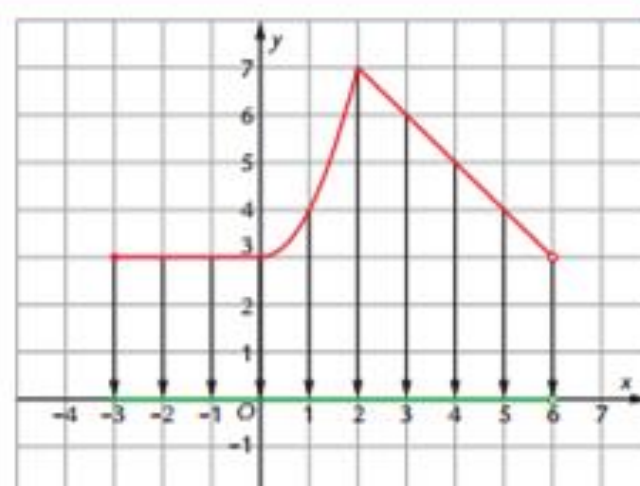


FIGURA 9

2 Insieme immagine di una funzione dal diagramma cartesiano

In maniera analoga, dal grafico di una funzione è possibile ricavare l'insieme immagine, proiettando il grafico sull'asse y .
Immagina questa volta di proiettare tutti i punti del grafico sull'asse y e di considerare quale parte dell'asse y stesso hai ricoperto: questo è l'insieme immagine della funzione.

Esempio 9 - Immagine di una funzione dal diagramma

Considera lo stesso grafico dell'esempio precedente (Fig. 10).

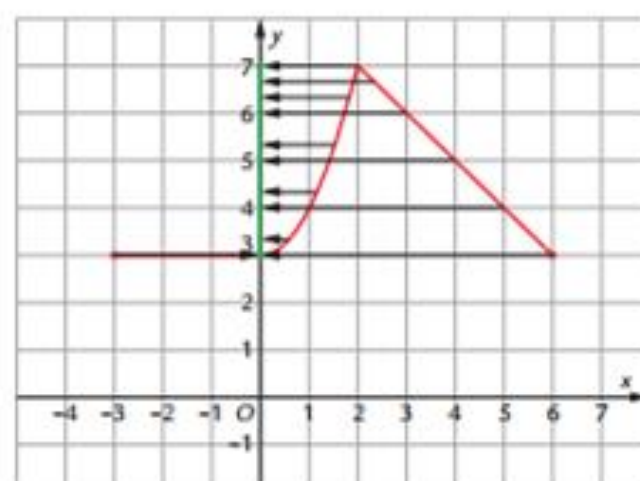
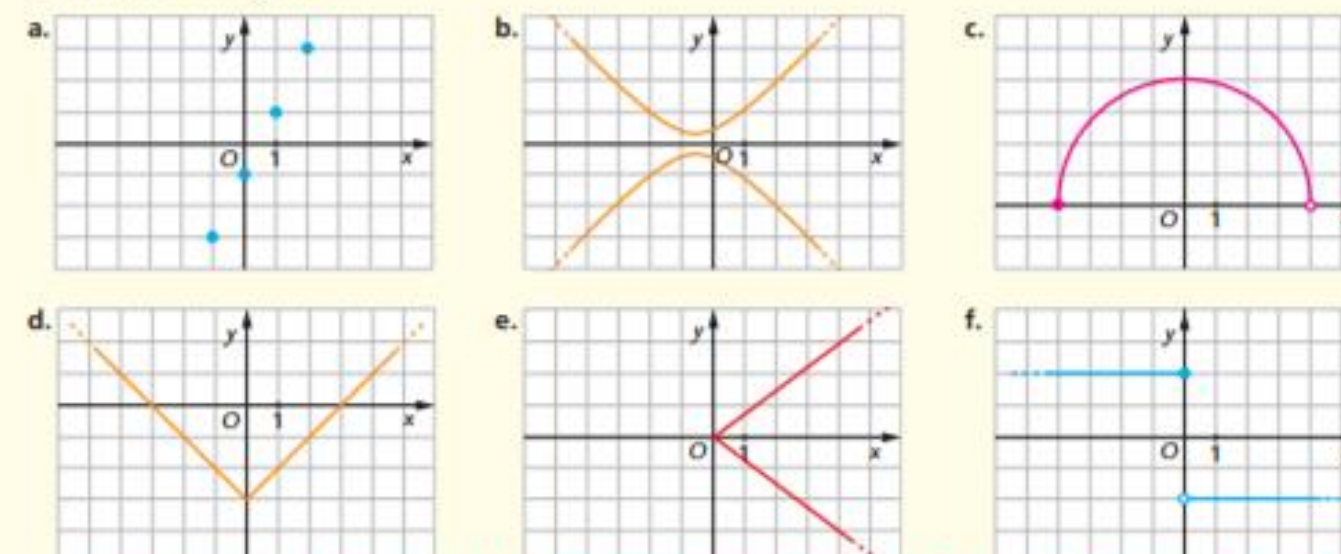


FIGURA 10

Proiettando tutti i punti sull'asse y , si trova l'insieme immagine della funzione, che in questo caso è: $\text{imm}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 3 \leq y \leq 7\}$

Determinare dominio e insieme immagine dal diagramma cartesiano

20 Osserva ognuno dei grafici, stabilisci se rappresenta una funzione e, in caso affermativo, determina il dominio e l'insieme immagine.



[a. $\text{dom}(f) = \{-1; 0; 1; 2\}$, $\text{imm}(f) = \{-3; -1; 1; 3\}$; b. non è una funzione; c. $\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x < 4\}$, $\text{imm}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 4\}$; d. $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$, $\text{imm}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3\}$; e. non è una funzione; f. $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$, $\text{imm}(f) = \{-1; 1\}$]

Interpretare un grafico

21 **ESERCIZIO SVOLTO** **FISICA** Il grafico in figura rappresenta la posizione di Luca, in funzione del tempo, durante un'escursione in bicicletta. Rispondi alle domande.

- Quante ore è durata l'escursione?
- Quanti chilometri ha percorso Luca in totale?
- Per quanto tempo Luca è rimasto fermo?

SOLUZIONE

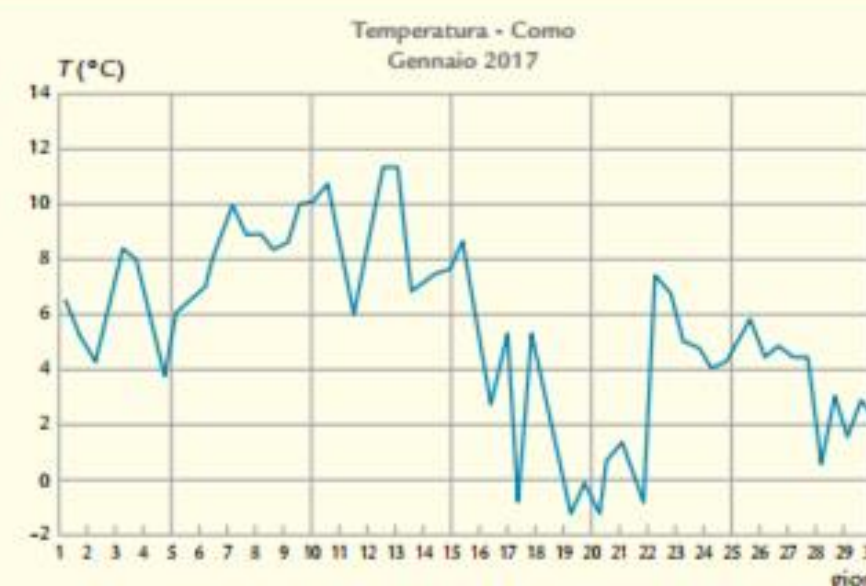
- Il tempo è rappresentato sull'asse delle ascisse, quindi l'intervallo in cui si è svolta l'escursione corrisponde al dominio della funzione: $0 \leq t \leq 5$. La durata è 5 ore.
- La posizione è rappresentata sull'asse delle ordinate, quindi la distanza percorsa corrisponde all'insieme immagine della funzione: $0 \leq d \leq 40$. Luca ha percorso 40 km.
- Dal grafico puoi notare che per $1 \leq t \leq 2$ e per $3 \leq t \leq 4$ la posizione resta invariata: prima al chilometro 20 e dopo al chilometro 35. Luca è quindi rimasto fermo due ore in totale.



22 **NELLA REALTÀ** La figura rappresenta l'andamento della temperatura registrata alle ore 12 di ogni giorno del mese di gennaio 2017 nella città di Como.

- Tra quali valori, minimo e massimo, circa, è variata la temperatura durante l'intero mese?
- Come cambia questo insieme di valori se restringi il dominio soltanto ai primi quindici giorni del mese?
- E se lo restringi ai successivi quindici giorni del mese?

[a. minimo -1°C , massimo tra 11°C e 12°C ; b. minimo circa 4°C , massimo non cambia; c. minimo non cambia, massimo circa 9°C]



Una funzione definita tramite una frazione algebrica si dice anche **funzione razionale**, in quanto è un rapporto di polinomi (in latino, la parola "ratio" significa "rapporto").

2 Frazioni algebriche e funzioni

Consideriamo in particolare le funzioni numeriche definite da frazioni algebriche che contengono una sola variabile. Dando un valore numerico alla variabile, che riveste il ruolo di variabile indipendente, la frazione assume a sua volta un valore numerico, che è l'immagine del valore assegnato alla variabile indipendente. In tal caso, le condizioni di esistenza della frazione individuano il **dominio** della funzione.

Esempio 3 - Funzione definita tramite una frazione algebrica

- La frazione algebrica $\frac{1}{x}$ definisce la funzione $y = f(x) = \frac{1}{x}$ che a un numero reale associa il suo reciproco, se esiste. Per $x = 0$ la frazione non è definita: la condizione di esistenza della frazione è $x \neq 0$.
Il dominio della funzione è pertanto: $\text{dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
- La frazione algebrica $\frac{1-2x}{x^2-4}$ definisce la funzione $y = g(x) = \frac{1-2x}{x^2-4}$, che non è definita per i valori di x che annullano il denominatore. Scomponiamo il denominatore e determiniamo le condizioni di esistenza della frazione:
 $x^2 - 4 = (x-2)(x+2) \rightarrow \text{C.E.: } x \neq -2 \wedge x \neq 2$
Il dominio della funzione è pertanto: $\text{dom}(g) = \mathbb{R} - \{-2; 2\}$.

24 - 29

Facciamo riferimento alla funzione dell'ultimo esempio e calcoliamo il valore che essa assume per $x = \frac{1}{2}$:

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1-2 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{4}-4} = \frac{0}{-\frac{15}{4}} = 0$$

Il valore $x = \frac{1}{2}$ è quindi uno **zero** della funzione $g(x)$.

Per determinare gli zeri di una funzione frazionaria occorre individuare i valori di x che annullano il numeratore, ma non il denominatore (infatti questi ultimi non appartengono al dominio).

Esempio 4 - Zeri di una funzione frazionaria

Determiniamo gli zeri delle seguenti funzioni:

a. $f(x) = \frac{5}{x^2+1}$ b. $g(x) = -\frac{3x+2}{(3x-2)^3}$

- Il denominatore della frazione non si annulla mai, perché è la somma della quantità x^2 , non negativa, e del numero positivo 1. Si ha quindi: $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$.
Il numeratore non dipende dal valore di x ed è costantemente uguale a 5, per cui la funzione non ammette zeri.
- Il denominatore della frazione si annulla per $x = \frac{2}{3}$. Si ha quindi:
 $\text{dom}(g) = \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$.
Annulliamo il numeratore: $3x+2=0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$.
Il valore $x = -\frac{2}{3}$ è uno zero della funzione, perché annulla il numeratore e appartiene al dominio.

30 - 37

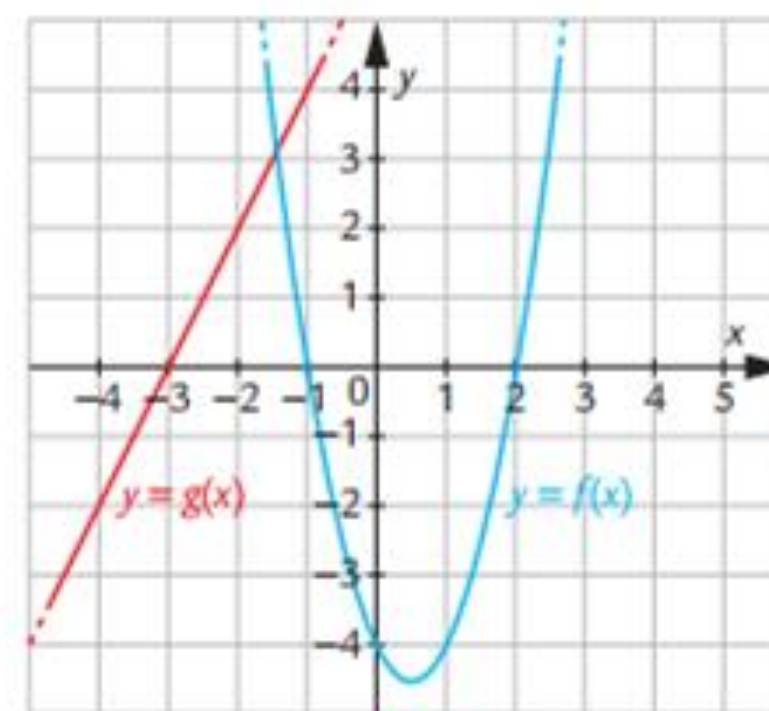
581 In figura sono riportati i grafici di due funzioni polinomiali $f(x)$ e $g(x)$.

a. Determina il dominio delle funzioni:

$$a(x) = \frac{f(x)}{g(x)}; b(x) = \frac{g(x)}{f(x)}; c(x) = [f(x) \cdot g(x)]^{-1}.$$

b. Determina gli zeri delle funzioni $a(x)$ e $b(x)$.

c. La funzione $c(x)$ possiede zeri? Perché?



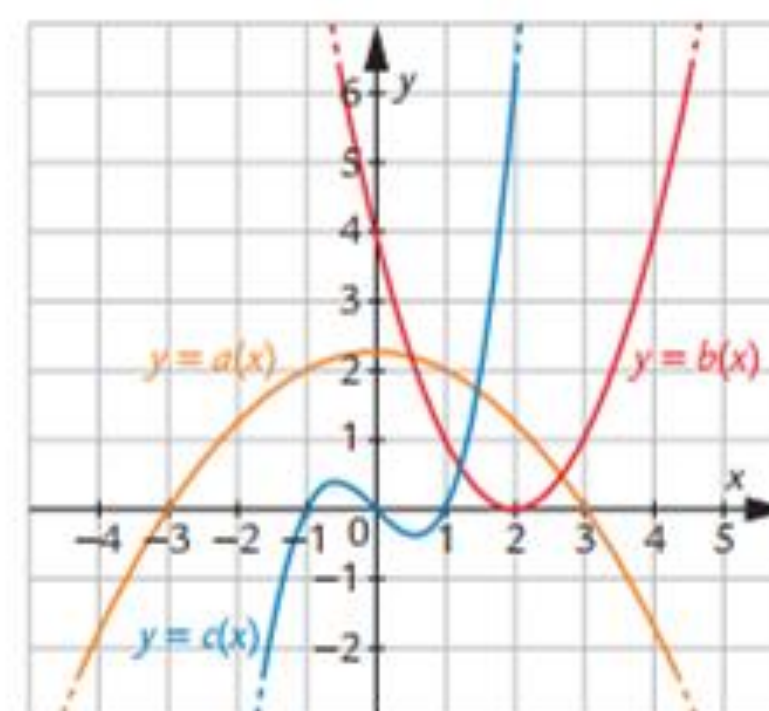
[a. $\mathbb{R} - \{-3\}$; $\mathbb{R} - \{-1; 2\}$; $\mathbb{R} - \{-3; -1; 2\}$; b. -1, 2; -3; c. no]

582 In figura sono riportati i grafici di tre funzioni polinomiali: $a(x)$, $b(x)$ e $c(x)$.

a. Determina il dominio delle funzioni:

$$f(x) = \frac{a(x) \cdot b(x)}{c(x)}; g(x) = \frac{a(x)}{b(x) \cdot c(x)}; h(x) = \frac{c(x)}{a(x) \cdot b(x)}.$$

b. Determina gli zeri delle tre funzioni.



[a. $\mathbb{R} - \{-1; 0; 1\}$; $\mathbb{R} - \{-1; 0; 1; 2\}$; $\mathbb{R} - \{-3; 2; 3\}$; b. -3, 2, 3; -3, 3; -1, 0, 1]

Lezione 2

TEORIA

La funzione esponenziale

Esplora con GeoGebra
Grafico di una funzione esponenziale elementare al variare della base

IL NUMERO DI NEPERO e
Esiste un valore molto importante della base della funzione esponenziale: il numero di Nepero e . Esso è affrontato nell'Esercizio 22.

1 Funzione esponenziale

Definite le potenze con esponente reale, possiamo costruire una nuova funzione.

DEFINIZIONE Funzione esponenziale

Si chiama **funzione esponenziale** di base a la funzione di equazione $f(x) = a^x$, con $a > 0$ e $a \neq 1$.

Per definizione di potenza a esponente reale, x può essere un numero reale qualsiasi: il **dominio** della funzione è $\mathbb{R}$.

La funzione a^x , con $a > 0$, assume soltanto valori positivi al variare di x . L'**insieme immagine** della funzione è $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$.

Si esclude il valore $a = 1$ perché $f(x) = 1^x = 1$ risulta essere la funzione costante uguale a 1. Disegniamo per punti il grafico di due funzioni esponenziali, una con base $a > 1$ e l'altra con $0 < a < 1$. Per semplicità, calcoliamo i valori delle funzioni per ascisse intere; sappiamo tuttavia che le due funzioni sono calcolabili per qualunque valore reale di x , quindi sono definite anche negli intervalli fra ascisse intere.

Funzione con base $a > 1$: $y = 2^x$		Funzione con base $0 < a < 1$: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	
x	2^x	x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$
-4	$2^{-4} = \frac{1}{16}$	-4	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16$
-3	$2^{-3} = \frac{1}{8}$	-3	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$
-2	$2^{-2} = \frac{1}{4}$	-2	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$
-1	$2^{-1} = \frac{1}{2}$	-1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$
0	$2^0 = 1$	0	$\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$
1	$2^1 = 2$	1	$\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$
2	$2^2 = 4$	2	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
3	$2^3 = 8$	3	$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$



FIGURA 3

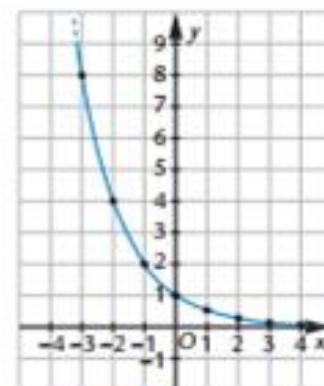


FIGURA 4

Riportando i due grafici su uno stesso piano cartesiano si può notare che l'uno è simmetrico dell'altro rispetto all'asse y ; la **simmetria** si rileva anche dalle due equazioni:

infatti $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$ si ottiene da $y = 2^x$ con la trasformazione $s_y = \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$

Per verificare questa proprietà quando n ha valori elevati, occorre considerare valori di x molto grandi. Per esempio, se $n = 20$ deve essere $x \approx 143$ e la corrispondente ordinata è nell'ordine di 10^{43} .

Se nella tabella proseguissimo nella ricerca dei valori della funzione $y = 2^x$, potremmo notare che i valori di y crescono molto rapidamente al crescere dei valori di x . Confrontando gli andamenti della funzione esponenziale e di una funzione di equazione $y = x^n$, con $x \neq 1$ e $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, possiamo notare una **velocità di crescita** più rapida da parte di $y = 2^x$ rispetto a $y = x^n$, comunque grande sia n (vedi Esercizio 23).

E8

Lezione 3

TEORIA

La funzione logaritmica

1 Logaritmo e funzione logaritmica

Analizziamo la funzione esponenziale $y = 2^x$ e chiediamoci quali operazioni consentano di ricavare la controimmagine di un certo valore di y .

Con riferimento al grafico di Fig. 8 facciamo qualche esempio:

- la controimmagine di $y = 8$ è il valore di x tale che $2^x = 8$, cioè $x = 3$;
- la controimmagine di $y = \frac{1}{2}$ è il valore di x tale che $2^x = \frac{1}{2}$, cioè $x = -1$.

Si tratta in entrambi i casi di individuare quale esponente attribuire alla base 2 per ottenere il risultato prefissato.

In generale, la controimmagine di un certo valore $y = b$ relativo a una funzione esponenziale $y = a^x$, è l'**esponente** che dobbiamo attribuire alla base a per ottenere il valore b . Possiamo ricavare questo esponente attraverso un nuovo operatore matematico: il logaritmo.

DEFINIZIONE Logaritmo in base a di b

Dati due numeri reali positivi a e b , con $a \neq 1$, si chiama **logaritmo in base a del numero b** , e si indica con $\log_a b$, l'esponente al quale si deve elevare la base a per ottenere b . Il numero b si dice **argomento** del logaritmo.

Esempio 1 - Logaritmo di un numero b in una base data a

- $\log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}$, in quanto $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$
- $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$ in quanto $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$

32 - 39

Matematica nella storia
La nascita e lo sviluppo del logaritmo

Sappiamo che la funzione $y = a^x$, per $a > 0$ e $a \neq 1$, è biettiva e quindi invertibile. Ora che abbiamo un modo di scrivere le controimmagini di tutti i valori da essa assunti, definiamo la sua funzione inversa e rappresentiamola analiticamente:

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$$

L'inversa di una funzione esponenziale è detta **funzione logaritmica**.

DEFINIZIONE Funzione logaritmica

Si dice **funzione logaritmica (elementare)** ogni funzione, avente come dominio $\mathbb{R}^+$, definita da un'equazione del tipo $y = \log_a x$, con $a > 0$ e $a \neq 1$.

Per visualizzare il grafico di una funzione logaritmica a partire dal grafico della funzione esponenziale, operiamo una simmetria rispetto alla bisettrice $y = x$ del grafico di quest'ultima (Fig. 9 e Fig. 10).

Ricorda che la funzione $y = a^x$ con base $a = 1$ è la funzione costante $y = 1^x = 1$ che non è biettiva e quindi non è invertibile. Ne segue che non è definita la funzione logaritmica di base $a = 1$.

LOGARITMO IN BASE 10 E LOGARITMO IN BASE e
Il logaritmo in base 10 è detto anche **logaritmo decimale** e si indica con il simbolo $\log$, ossia: $\log x = \log_{10} x$.
Il logaritmo in base e è detto anche **logaritmo naturale** e si indica con il simbolo $\ln$, ossia: $\ln x = \log_e x$.

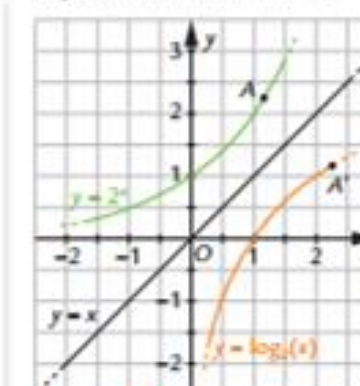


FIGURA 9 $a > 1$

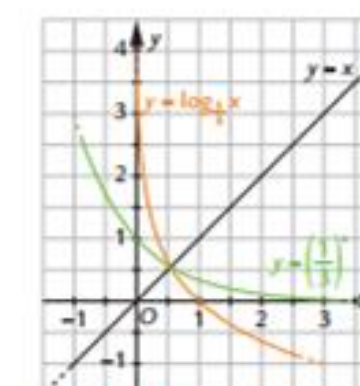


FIGURA 10 $0 < a < 1$

40 - 42

LIBRO

Limiti di successioni

- Sono trattati prima e indipendentemente dai limiti di funzioni in generale
- Si introduce a piccoli passi il concetto più complicato del triennio, con il suo linguaggio
- Si dà importanza alle successioni che, pur essendo particolari funzioni, hanno aspetti numerici interessanti
- Si evidenzia il principio di induzione e un nuovo modo di condurre una dimostrazione



n	a_n
0	1
1	2
2	5
5	26
10	101
1000	1 000 001
10^6	$10^{12} + 1$
10^{12}	$10^{24} + 1$

TABELLA 1

COLLEGAMENTI
La parte intera di un numero x , indicata con $[x]$, è il più grande intero tra quelli minori o uguali a x .

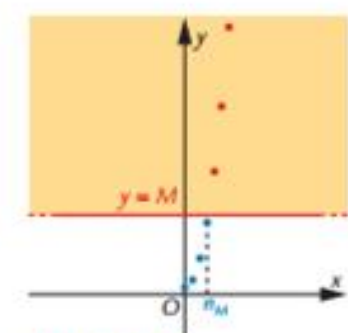


FIGURA 5

3 Limite infinito di una successione

Consideriamo la successione $a_n = n^2 + 1$, dell'Esempio 3: abbiamo già osservato che, all'aumentare di n , i suoi termini diventano "sempre più grandi" (Tab. 1) e che la successione diverge a $+\infty$.

Troviamo un modo rigoroso per esprimere questa proprietà.

Scegliamo un numero positivo M , che consideriamo "grande", ad esempio $M = 1\,000\,000$, e mostriamo che, da un certo valore di n in poi, tutti i termini della successione sono maggiori di M .

A questo proposito risolviamo la disequazione $a_n > M$:

$$n^2 + 1 > 1\,000\,000 \Leftrightarrow n^2 > 999\,999 \Leftrightarrow n > \sqrt{999\,999} \approx 999,99$$

entrambi i membri sono positivi

Possiamo quindi affermare che $a_n > 1\,000\,000$ se $n > 999$.

Generalizziamo il ragionamento a qualsiasi valore di M , che a noi interessa rendere grande a piacere. Risolviamo la disequazione $a_n > M$ nel caso generale:

$$n^2 + 1 > M \Leftrightarrow n^2 > M - 1 \Leftrightarrow n > \sqrt{M - 1}$$

Se indichiamo con $[\sqrt{M - 1}]$ la parte intera del numero $\sqrt{M - 1}$, siamo certi che, per ogni numero naturale $n > [\sqrt{M - 1}]$, la disequazione è verificata.

Possiamo allora dare la seguente definizione.

DEFINIZIONE Limite di una successione divergente a $+\infty$

Data una successione di termine generale u_n , diciamo che essa diverge a $+\infty$, o che il suo limite è $+\infty$, se, comunque scelto un numero $M > 0$, esiste un numero naturale n_M per cui si ha $u_n > M$, $\forall n > n_M$. In simboli scriviamo: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Per la successione precedente possiamo quindi scrivere: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + 1) = +\infty$.

Possiamo interpretare graficamente il fatto che una successione diverga a $+\infty$ osservando che, tracciata la retta di equazione $y = M$, con $M > 0$, da un certo punto in poi, i punti del diagramma stanno tutti al di sopra di essa (Fig. 5).

DEFINIZIONE Limite di una successione divergente a $-\infty$

Data una successione di termine generale u_n , diciamo che essa diverge a $-\infty$, o che il suo limite è $-\infty$, se, comunque scelto un numero $M > 0$, esiste un numero naturale n_M per cui si ha $u_n < -M$, $\forall n > n_M$. In simboli: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.
(leggi «limite per n che tende a più infinito di u_n uguale a meno infinito»)

Esempio 4 - Successione divergente a $-\infty$

Verifichiamo che $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - n^2) = -\infty$.

Sia $M > 0$. Risolviamo la disequazione $u_n < -M$:

$$1 - n^2 < -M \Leftrightarrow n^2 > M + 1 \Leftrightarrow n > \sqrt{M + 1}$$

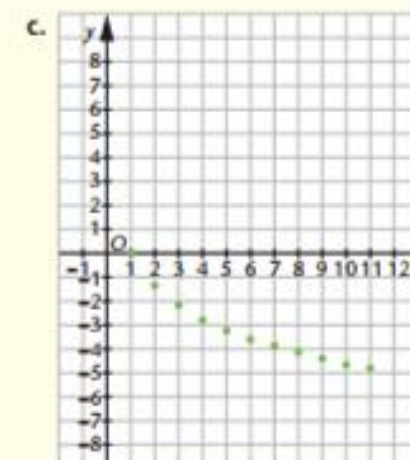
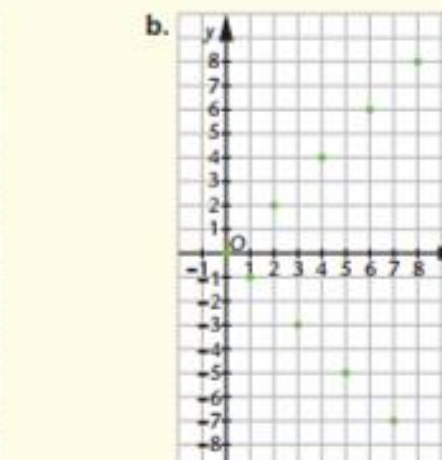
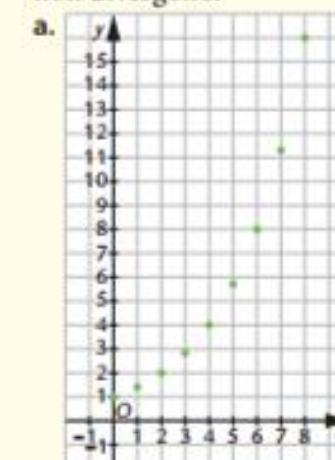
Nell'ultimo passaggio abbiamo tenuto conto del fatto che n non può essere negativo. Se poniamo $n_M = [\sqrt{M + 1}]$, la disequazione è verificata per ogni $n > n_M$. In questo caso i termini sono negativi ma diventano sempre più grandi in valore assoluto: la successione quindi diverge a $-\infty$.

Graficamente, per $n \geq n_M$, i punti del diagramma della successione stanno tutti sotto la retta $y = -M$.

28 - 40

Esplorare il comportamento di successioni divergenti

28 Nelle seguenti figure sono rappresentati alcuni grafici di successioni: stabilisci se divergono a $+\infty$, a $-\infty$ o se non divergono.



[$+\infty$]

[non diverge]

[$-\infty$]



29 ATTIVITÀ CON GEOGEBRA

Esploriamo con il Foglio di calcolo il comportamento della successione $a_n = -\sqrt{n}$.

- Nelle celle A1 e B1 scrivi rispettivamente n e a_n . Nella colonna A inserisci i numeri naturali da 0 a 99; nella colonna B inserisci la formula opportuna per calcolare i termini della successione.
- Una volta compilata la tabella dei valori, seleziona tutte le celle non vuote delle colonne A e B e crea una *Lista di punti*: in tal modo viene visualizzata una parte del grafico della successione.
- Crea uno slider M , variabile da 1 a 50, con incremento 0,5, e portalo al valore 1. Evidenzia sul piano cartesiano il semipiano rappresentato dalla disequazione $y \leq -M$.

Fai variare M .

- Per quali valori di n si ha $a_n < -5$? [$n > 25$]
- Per quali valori di n si ha $a_n < -8,5$? [$n > 72$]

Le seguenti successioni sono divergenti a $+\infty$: per ognuna di esse determina il valore di n oltre il quale i termini della successione sono tutti maggiori del valore di M indicato.

30 $a_n = n^{\frac{3}{2}}$, $M = 500\,000$ [6299] 31 $a_n = e^{n-1}$, $M = 1\,000\,000$ [14]

32 Analogamente a quanto è stato evidenziato in Fig. 5, interpreta dal punto di vista grafico la definizione di successione divergente a $-\infty$, per la successione dell'Esempio 4.

Le seguenti successioni sono divergenti a $-\infty$: per ognuna di esse determina il valore di n oltre il quale i termini della successione sono tutti minori di $-M$ (il valore di M è quello indicato).

33 $a_n = 1 - n^3$, $M = 500\,000$ [79] 34 $a_n = \log_3 n^{-10}$, $M = 80$ [6561]

Verificare il limite di una successione divergente

Verifica i seguenti limiti.

35 **ESERCIZIO SVOLTO** $\lim_{n \rightarrow +\infty} (10 - n^5) = -\infty$

SOLUZIONE

Fissiamo $M > 0$ e risolviamo la disequazione $10 - n^5 < -M$:

$$10 - n^5 < -M \Leftrightarrow n^5 > 10 + M \Leftrightarrow n > \sqrt[5]{10 + M}$$

Ponendo $n_M = [\sqrt[5]{10 + M}]$, la disequazione è verificata per ogni $n > n_M$.

36 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ 37 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-\sqrt{n+1}) = -\infty$ 38 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{n+1}) = +\infty$ 39 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-2^n) = -\infty$

40 **SEGUI LA TRACCIA** Dimostra che una progressione aritmetica di ragione $d > 0$ diverge a $+\infty$.

TRACCIA

Il termine generale della progressione è: $u_n = u_1 + (n - 1)d$.

Imposta la disequazione $u_n > M$, con $M > 0$: $u_1 + (n - 1)d > M \Leftrightarrow (n - 1)d > \frac{M - u_1}{d}$.

È possibile dividere entrambi i membri per d perché $d > 0$. Si ha: $n - 1 > \frac{M - u_1}{d} \Leftrightarrow n > 1 + \frac{M - u_1}{d}$.

Ponendo $n_M = \left[1 + \frac{M - u_1}{d} \right]$, la disequazione è verificata $\forall n > n_M$.

Integrali con una scansione non «tradizionale»

- Si parte dal concetto di integrale definito, introdotto in casi semplici
- Si dà priorità al concetto anziché al calcolo
- Si giunge all'integrale indefinito mediante il teorema fondamentale
- Si complica il calcolo in modo graduale
- Una seconda unità è dedicata alle regole di calcolo di integrali indefiniti e definiti, al calcolo di aree e volumi



Lezione 5

TEORIA

L'integrale indefinito

1 Integrale indefinito

Le funzioni $\Phi(x)$ e $\varphi(x) = \begin{cases} \ln x + 2 & \text{se } x > 0 \\ \ln(-x) - 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$ Sono entrambe primitive di f in $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$, ma non differiscono per una costante.

La conoscenza di una qualsiasi primitiva di una funzione f in $[a; b]$ consente di calcolare il valore dell'integrale definito di f su $[a; b]$. Per questa ragione, ma non solo, affrontiamo ora il problema della ricerca delle funzioni primitive. Osserviamo che la caratterizzazione delle primitive data nella **Lezione 4** vale a condizione che la funzione f sia definita su un singolo intervallo.

Consideriamo invece, per esempio, la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ in $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

La funzione $\Phi(x) = \ln|x| = \begin{cases} \ln x & \text{se } x > 0 \\ \ln(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$ è una primitiva di f in ogni intervallo che non contiene l'origine. Da ora in avanti indichiamo con I un intervallo o l'unione di più intervalli.

DEFINIZIONE Integrale indefinito

Data una funzione f definita in $I \in \mathbb{R}$, l'insieme di tutte le primitive $\Phi(x) + c$, con $c \in \mathbb{R}$, di una funzione f in I si dice **integrale indefinito** di f .

Si scrive: $\int f(x) dx$ e si legge «integrale di f in dx ».

Il simbolo dx indica la variabile di integrazione.

Esempio 11 - Integrale indefinito

Data $f(x) = \cos x$, una primitiva su un qualsiasi intervallo è $\Phi(x) = \sin x$, quindi l'integrale indefinito è: $\int \cos x dx = \sin x + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Infatti $D(\sin x + c) = \cos x$ per ogni valore di $c \in \mathbb{R}$.

92 - 93

2 Integrali indefiniti immediati

Nota che la Tab. 1 si ottiene leggendo «in senso inverso» la tabella delle derivate delle funzioni elementari.

L'Esempio 11 propone un integrale che possiamo definire *immediato*, perché la funzione integranda è una funzione elementare. Gli integrali indefiniti immediati costituiscono la base dei metodi di calcolo per determinare le primitive.

TABELLA 1

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$, con $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$	6. $\int e^x dx = e^x + c$
2. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$	7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$, con $a > 0$ e $a \neq 1$
3. $\int \sin x dx = -\cos x + c$ $\int \cos x dx = \sin x + c$	8. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$
4. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + c$	9. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$
5. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int (1 + \cot^2 x) dx = -\cot x + c$	

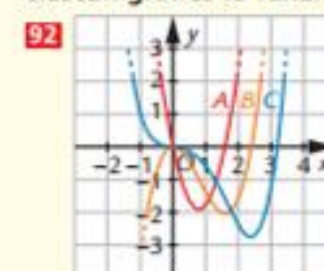
94 - 102

RIFLETTI SULLA TEORIA

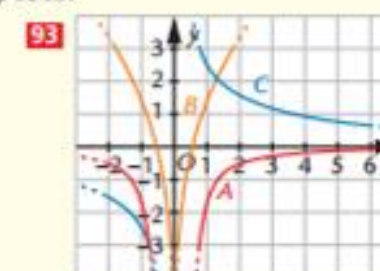
UNITÀ A8 | Gli integrali definiti e indefiniti

Interpretare i grafici delle funzioni integrali e derivate

La figura seguente mostra i grafici di una funzione f , di una sua primitiva F e della sua derivata f' . Associa a ciascun grafico la funzione corretta, giustificando la risposta.



A: f'
B: f
C: F



A: f'
B: F
C: f

Calcolare integrali immediati

Calcola i seguenti integrali indefiniti.

94 **ESERCIZIO SVOLTO** a. $\int x^4 dx$ b. $\int \frac{1}{x^2} dx$ c. $\int \sqrt{x} dx$

SOLUZIONE

Utilizziamo la formula (2).

a. $\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + c = \frac{x^5}{5} + c$

b. $\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c = -\frac{1}{x} + c$

c. $\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + c$

95 $\int \pi dx$ $[\pi x + c]$ 96 $\int x\sqrt{x} dx$ $[\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \sqrt{x} + c]$ 97 $\int \frac{1}{x^2+3} dx$ $[\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x}{\sqrt{3}} + c]$

ATTIVITÀ CON GEOGEBRA

Traccia con GeoGebra il grafico della funzione $f(x) = 2x^2$.
a. Utilizza il comando *Integrale(<Funzione>)*, per la funzione f . Ottieni la funzione $g(x)$. Che cosa rappresenta?
b. Inserisci uno slider k , variabile da -10 a $+10$ e la funzione $h(x) = g(x) + k$. Fai variare il valore dello slider. Che cosa osservi? [a. $g(x) = \frac{2}{3} x^3$ è una particolare primitiva di f ; b. Tutte le funzioni $h(x)$ sono primitive di f e differiscono per una costante]

Risolvere problemi con primitive e integrali indefiniti

99 **ESERCIZIO SVOLTO** Tra le primitive della funzione $f(x) = \sqrt{x}\sqrt{x}$ in $]0; +\infty[$ individua quella il cui grafico passa per il punto $P(0; 2)$.

SOLUZIONE

La famiglia di tutte le primitive della funzione data è l'integrale indefinito:

$\int \sqrt{x}\sqrt{x} dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + c = \frac{4}{7} x^{\frac{7}{2}} \sqrt{x} + c$, con $c \in \mathbb{R}$.

Imponendo la condizione $F(0) = 2$, otteniamo $c = 2$ e conseguentemente la funzione cercata è $y = \frac{4}{7} x^{\frac{7}{2}} \sqrt{x} + 2$.

100 Tra le primitive della funzione $f(x) = \sin x$ individua quella il cui grafico passa per il punto $P(\frac{\pi}{2}; -1)$.
[$y = -\cos x - 1$]

Interpretare i simboli dell'integrale

101 Nella Tab. 1 degli integrali indefiniti immediati, comporre l'integrale $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$. Dimostra che $y = \ln|x|$ è proprio una primitiva di $y = \frac{1}{x}$ su ogni intervallo che non contiene l'origine. Spiega il significato dell'uguaglianza $\int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln x$ per $x > 0$.

102 Confronta il significato dei seguenti simboli e mettili in relazione.

a. $\int 3 dx$ $[3(t) + c = 3t + c]$ b. $\int_0^x 3 dt$ $[3(x) - 3(0) = 3x]$ c. $\int_0^2 3 dx$ $[3(2) - 3(0) = 6]$



Uno strumento in più per apprendere... DEAFlix!

Secondaria di II grado

Italiano grammatica	Italiano antologia	Italiano letteratura	Latino grammatica
Latino letteratura	Matematica	Fisica	Inglese grammatica
◊ Numeri (2) ◊ Geometria analitica (7) ◊ Goniometria e trigonometria (3) ◊ Analisi (4)		◊ Algebra (6) ◊ Statistica e probabilità (2) ◊ Esponenziali e logaritmi (2)	
Inglese letteratura	Francese grammatica	Spagnolo grammatica	

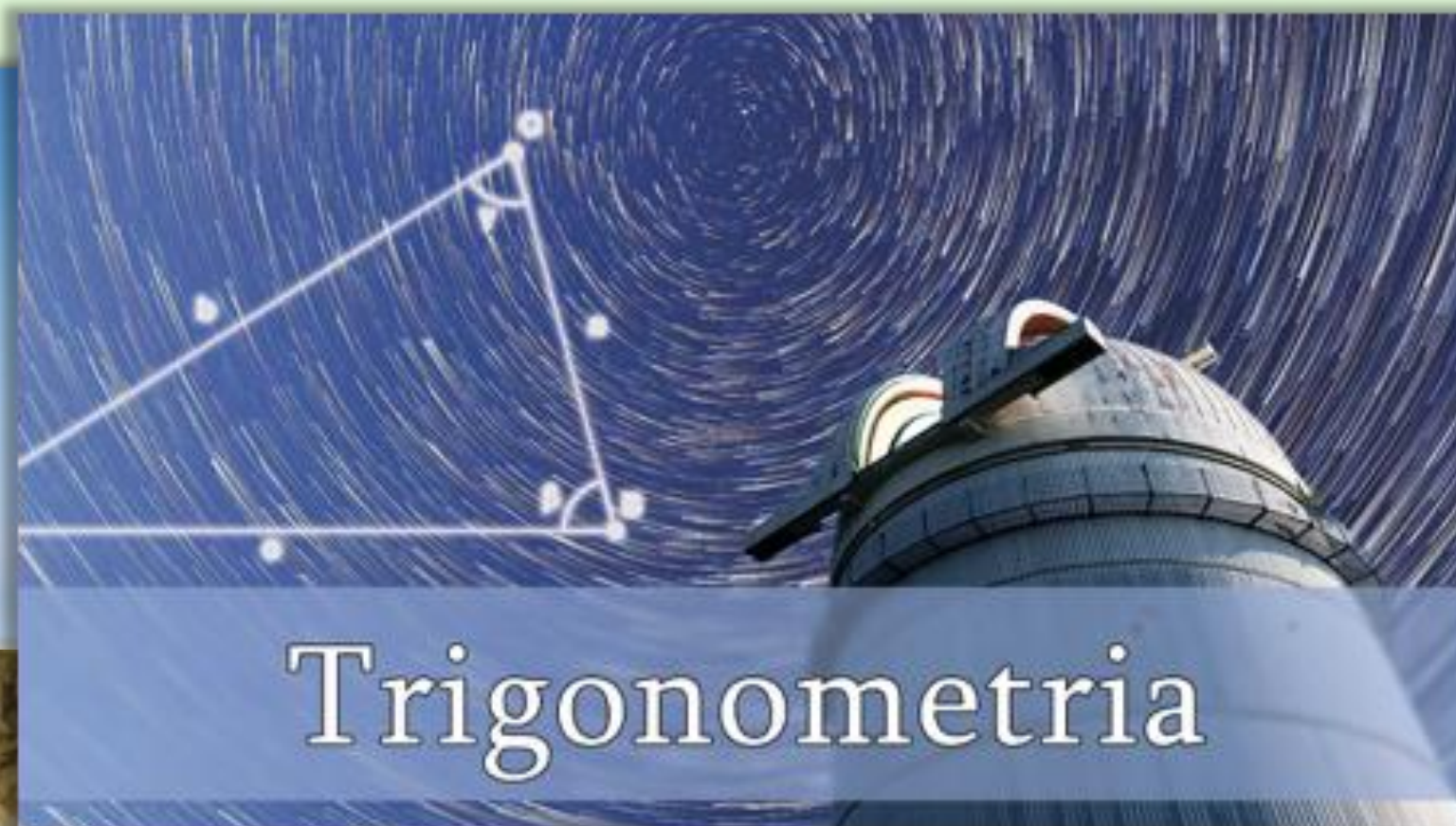
<https://deascuola.it/deaflix/>





La nuova risorsa: DEAFSLIX

26 playlist per trattare gli argomenti fondamentali della matematica della Scuola Secondaria di Secondo Grado.



Matematica allo specchio

[Scheda del libro](#)

[Videopresentazione](#)

Per maggiori informazioni
contatta il tuo responsabile
di zona, [clicca qui](#)



co.claudio.zanone@deascuola.it

Grazie!

