

MOTIVARE, COINVOLGERE, DIVERTIRE  
CON LA **MATEMATICA**



DEASCUOLA

Con il patrocinio di:



Consiglio Nazionale  
delle Ricerche

In collaborazione con:

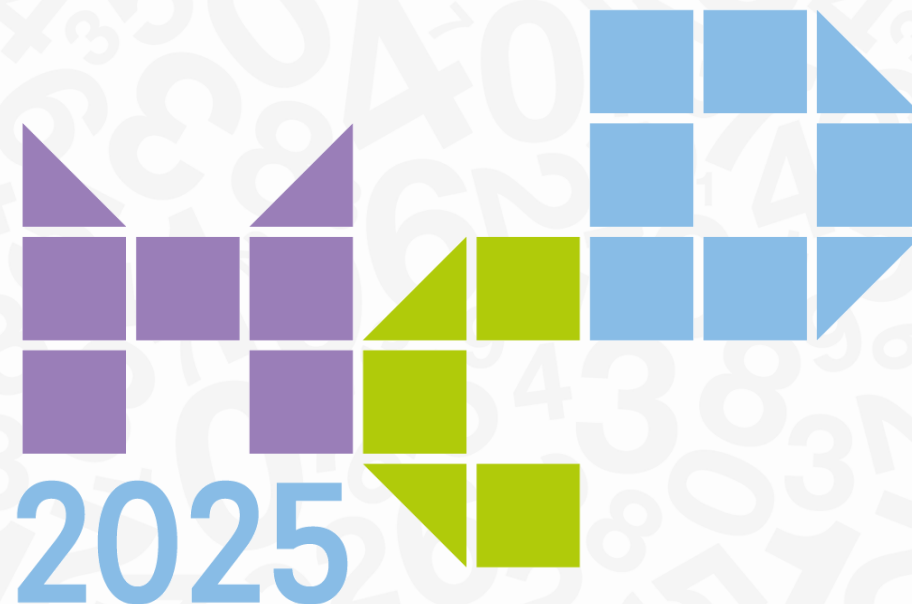


MaddMaths!  
Matematica Divulgazione Didattica

# Sviluppare competenze in matematica: quali strategie mettere in campo!

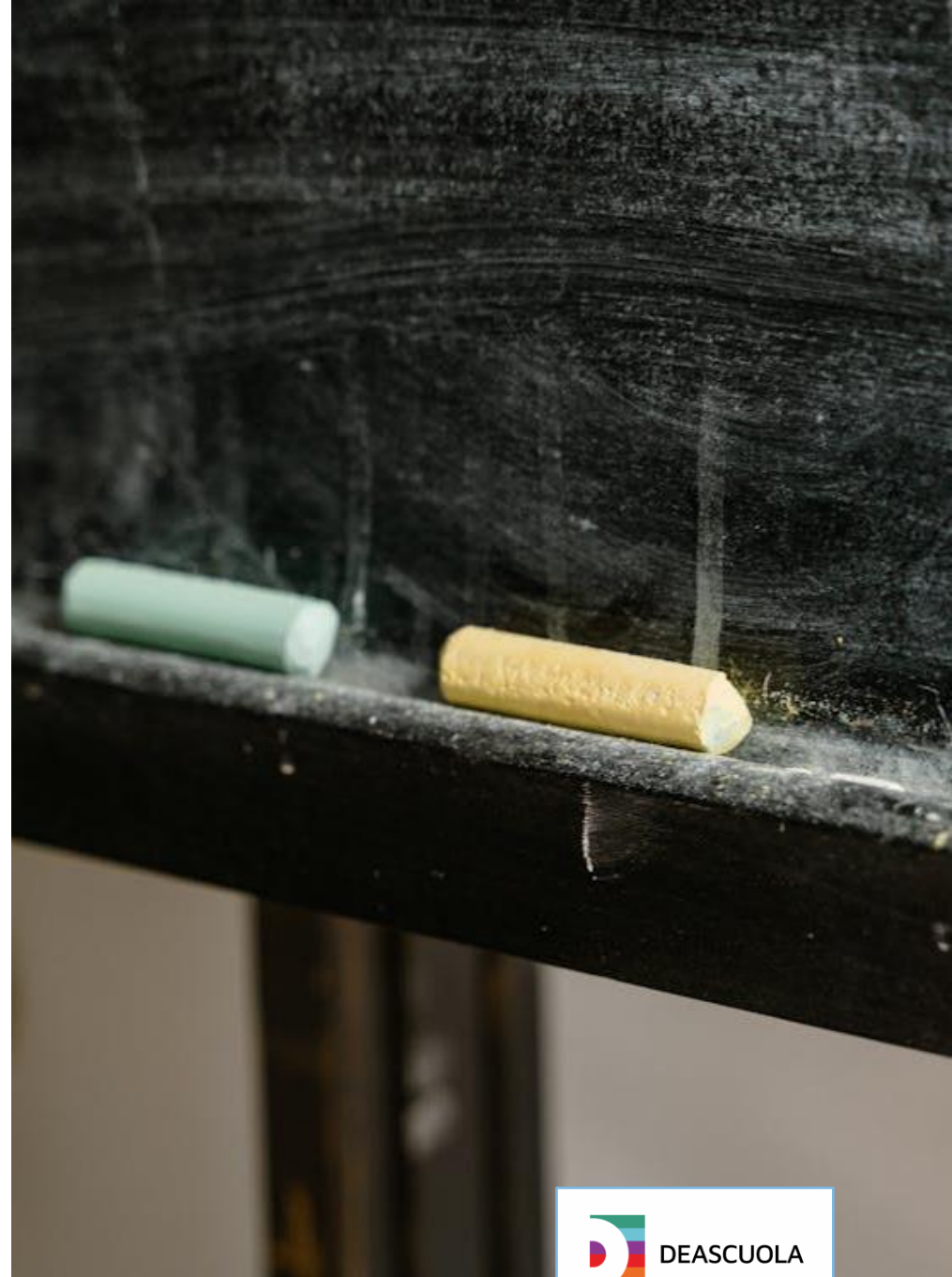
Leonardo Sasso

Claudio Zanone

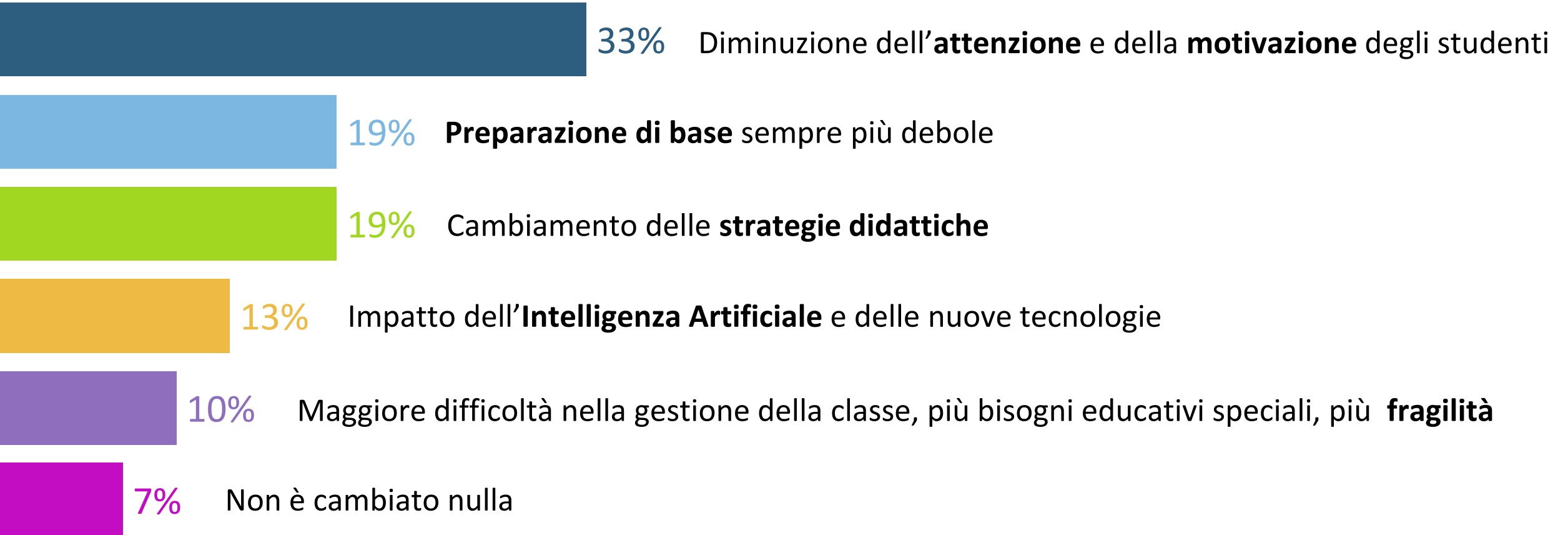


MOTIVARE, COINVOLGERE, DIVERTIRE  
CON LA **MATEMATICA**

# 1. È cambiato “qualcosa” nell'insegnamento della matematica negli ultimi tre anni?



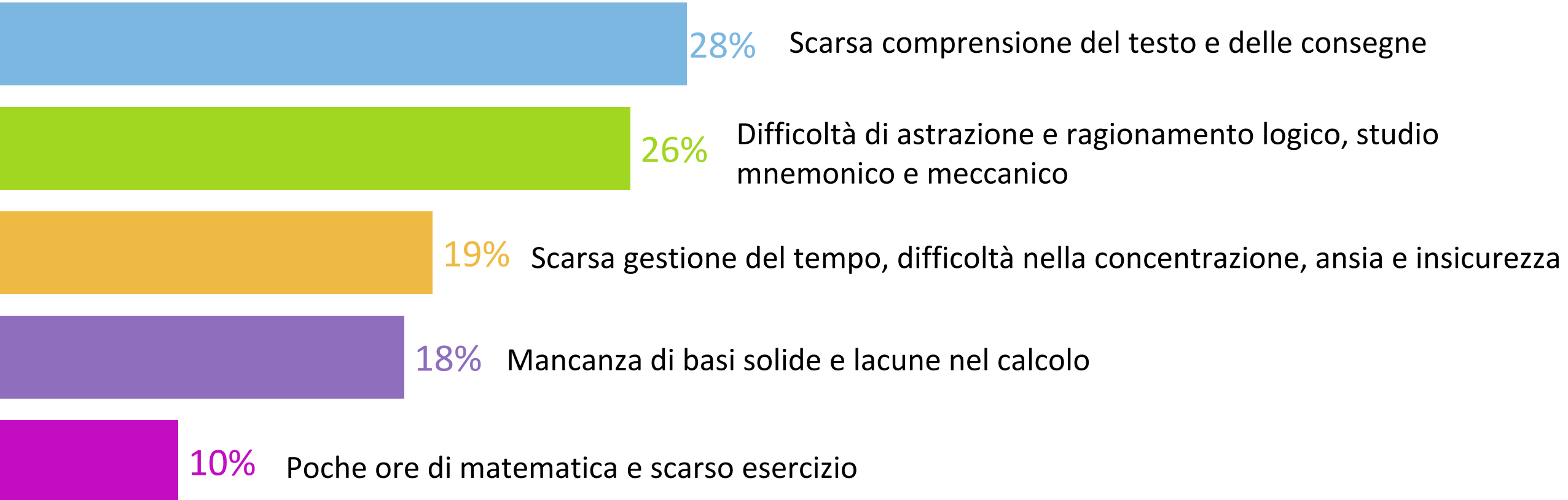
## Le vostre risposte



**2. Nella pratica didattica quotidiana quali sono le difficoltà che studentesse e studenti incontrano nello svolgere esercizi e verifiche?**



## Le vostre risposte



# Comprensione del testo

- Traduzione simboli – linguaggio naturale
- Comprensione del testo

Alessandro ha nel portafoglio 45 euro. Spende la terza parte di ciò che ha per una cena in pizzeria con gli amici, quindi 8 euro per l'acquisto del biglietto del cinema. L'indomani spende la metà di ciò che gli rimane per il pranzo.

Scrivi l'espressione numerica che esprime quanto resta alla fine nel portafoglio di Alessandro e calcolane il valore.

- L'espressione numerica che esprime ciò che resta ad Alessandro è:

$$\underbrace{45}_{\text{somma iniziale posseduta}} - \underbrace{45 : \dots}_{\text{spesa per la cena}} - \underbrace{8}_{\text{spesa per il cinema}} - \underbrace{(45 - 45 : \dots - 8) : 2}_{\text{spesa per il pranzo}}$$

- Completa l'espressione, calcolane il valore e concludi.

- Guida all'interpretazione del testo
- Quali tra le parole in corsivo implicano che la lunghezza della mattonella deve essere un *divisore* di 360 e di 280? Quali implicano che il divisore comune deve essere il *massimo*?

Si vuole piastrellare una stanza rettangolare, avente dimensioni di 360 cm e 280 cm, con il *minore* numero possibile di mattonelle *quadrato uguali*, *senza tagliare* alcuna mattonella.

Quante mattonelle sono necessarie?



## Ragionare sugli errori

**Mirko:**  $\log_2 5 < \log_2 6$  perché  $5 < 6$

**Anna:**  $\log_2 5 < \log_3 5$  perché  $2 < 3$

**Chi dei due è in errore? Perché?**





## Ragionare e argomentare

$$\begin{cases} x^3 + x > 0 \\ x^7 + 3x + 2 \geq 0 \end{cases}$$

Anche se non sa risolvere la seconda disequazione, Karin trova in poco tempo la soluzione:  $x > 0$ .

**Come è giunta a tale conclusione?**



# Ragionare e argomentare

Individua i numeri che hanno la proprietà di essere maggiori del loro reciproco.

↓  
E se?

↓  
Come cambierebbe la risposta sostituendo reciproco con antireciproco?

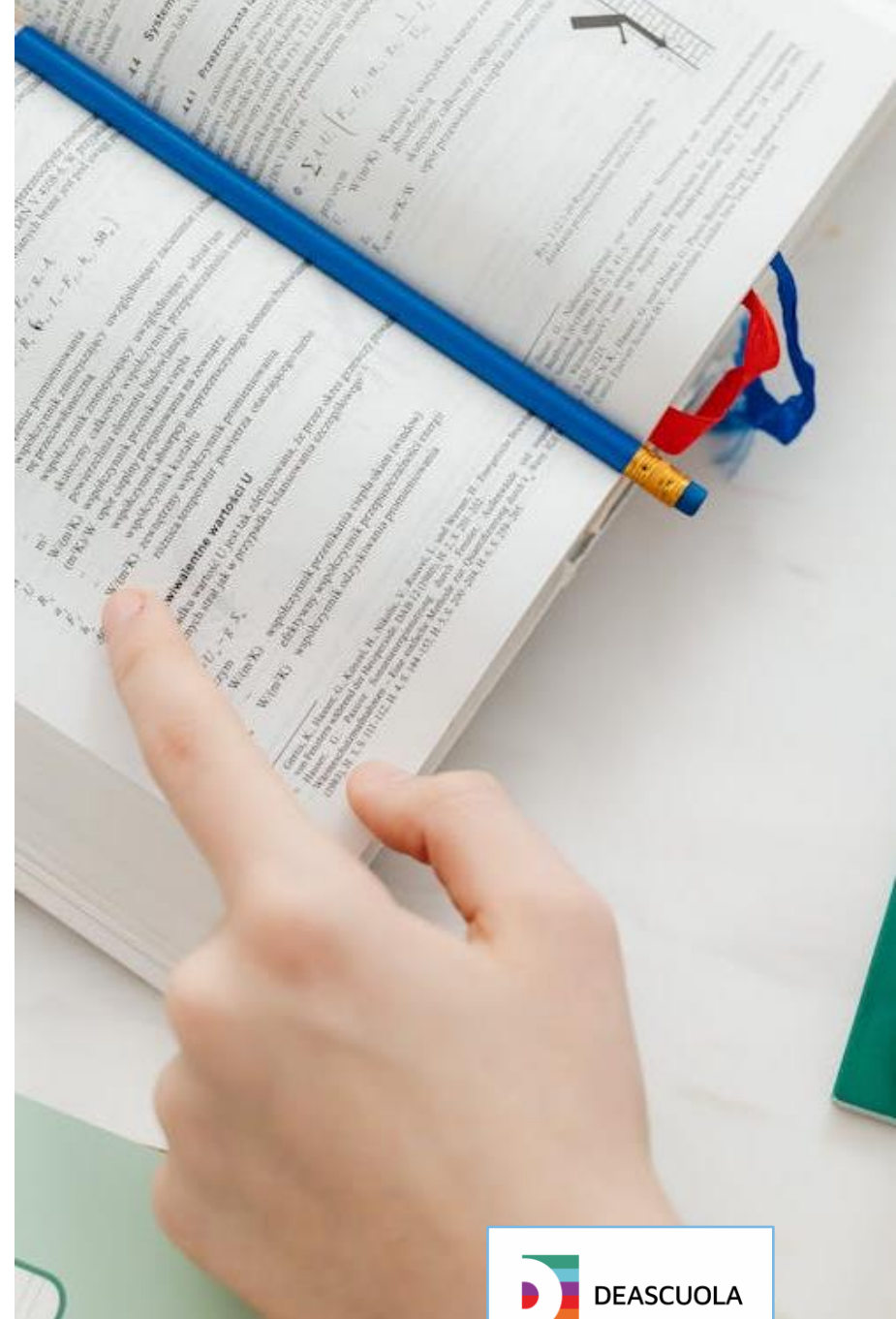
## Metodi a confronto

$$f(x) = (x^5 - 1)(x^2 + 3)$$

Calcola la derivata della funzione in due modi:

- applicando subito la regola della derivata del prodotto di due funzioni;
- moltiplicando i due binomi e derivando solo successivamente mediante la proprietà di linearità della derivazione.

**I due risultati corrispondono?**



## Collegamenti

Considera la parabola di equazione

$$y = (x + 2)(x - 4)$$

e la retta di equazione

$$y = kx + 2.$$

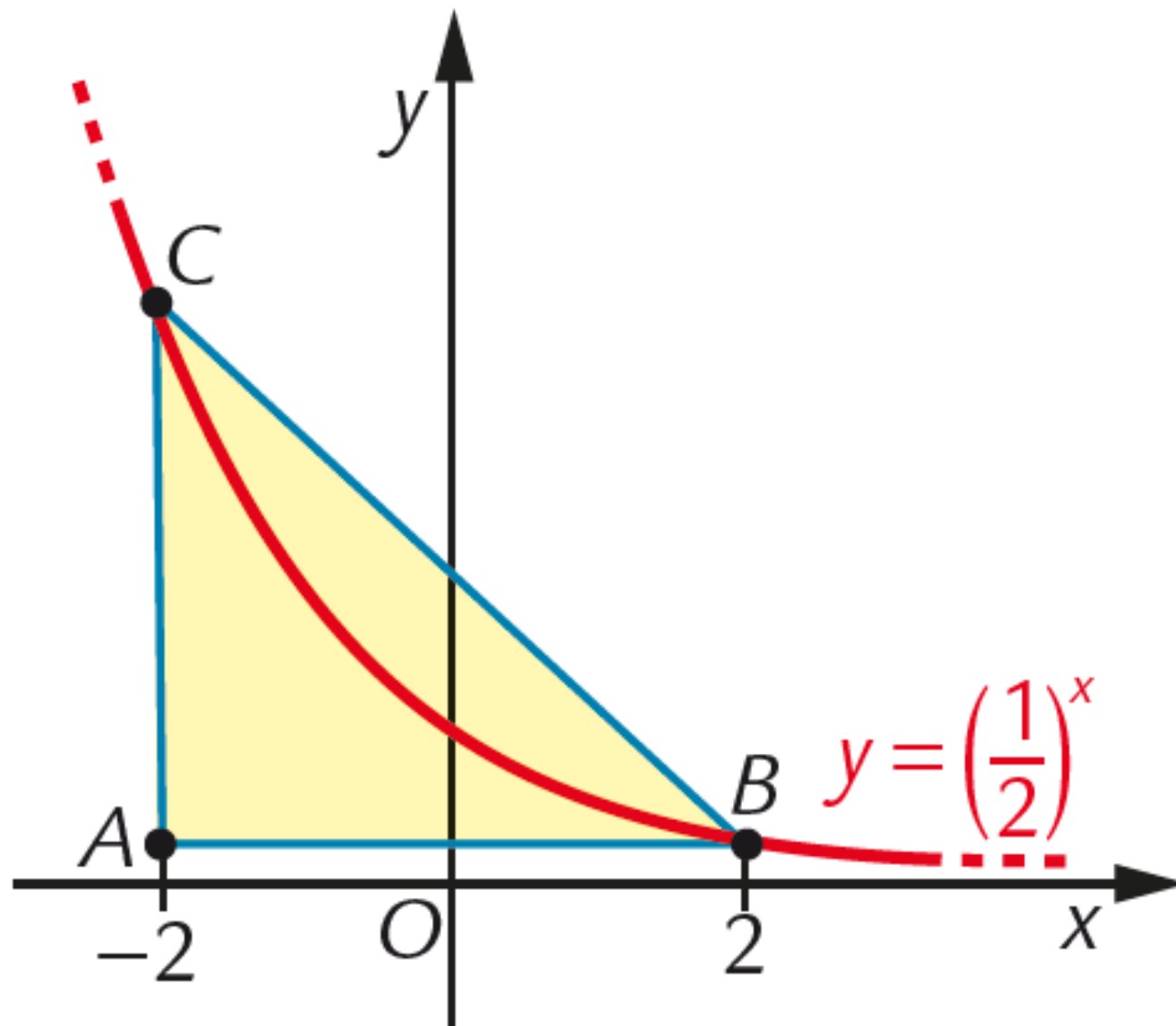
Esprimi in funzione di  $k$ , l'area  $A(k)$  del segmento parabolico limitato dalla retta e dalla parabola.

**Per quale valore di  $k$  l'area di tale segmento parabolico è minima?**



## Interpretazione di grafici

Determina l'area del triangolo  
rettangolo.





# Sviluppare un metodo di studio

## Come gestire il momento della verifica scritta

1. Studia ad alta voce e cerca di ascoltarti.
2. Concediti un tempo massimo per svolgere i compiti a casa e gli esercizi: per esempio, svolgi la prova di autoverifica provando a mantenere il limite di tempo indicato; alla fine, guarda le soluzioni in fondo al testo e assegnati un voto, utilizzando la griglia di valutazione
3. Prima di tutto leggi attentamente il testo di tutti gli esercizi e i problemi proposti: quest'operazione non è una perdita di tempo! Infatti ti può aiutare a stimare il tempo necessario a svolgere ogni esercizio, e a capire quali sono gli esercizi più adatti alla tua preparazione.

# Sviluppare un metodo di studio

## Come gestire il momento della verifica scritta

4. Inizia a svolgere gli esercizi su cui ti senti più sicuro, così da assicurarti un punteggio di base quando verrai valutato. Solo dopo dedicati agli esercizi che ritieni più complessi.
5. Dopo avere svolto un esercizio, se possibile controlla l'esattezza del risultato o quantomeno accertati che la soluzione sia plausibile.
6. Tieni un foglio di brutta per fare tutte le prove necessarie, i calcoli, gli schizzi, ecc., ma poi scrivi lo svolgimento direttamente in bella.



# Sviluppare un metodo di studio

## Guida al problem solving

1. Leggi attentamente (anche più di una volta!) il testo del problema che devi risolvere.
2. Dopo avere identificato dati e obiettivo può essere utile schematizzarli. A seconda del tipo di problema può essere opportuno strutturare i dati in modi differenti: per esempio in una tabella, oppure costruendo uno schema, oppure annotandoli in un grafico o in una figura.
3. La fase della costruzione del modello matematico di solito è quella più delicata, perciò è bene che ti eserciti a fondo sulla traduzione di un problema in un modello.

# Sviluppare un metodo di studio

## Guida al problem solving

4. La successiva fase dei calcoli da svolgere sul modello trovato è, di solito, più «standard».
5. Non dimenticarti di valutare sempre l'accettabilità e il significato dei risultati ottenuti lavorando sul modello matematico, in relazione al problema in esame.

# 3. Di che cosa hai bisogno per rendere la matematica più coinvolgente?



## Le vostre risposte

**35%** Maggiore connessione con la realtà

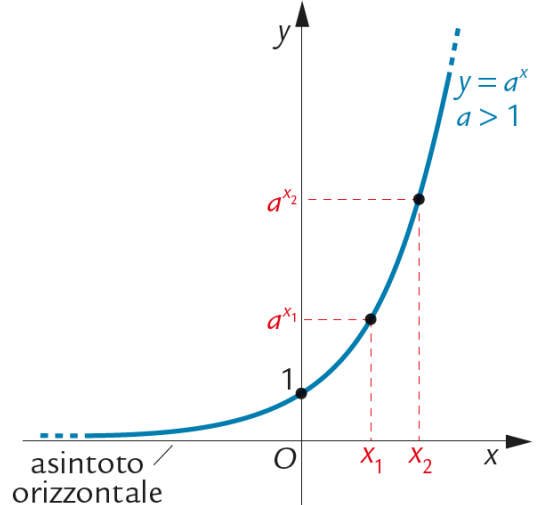
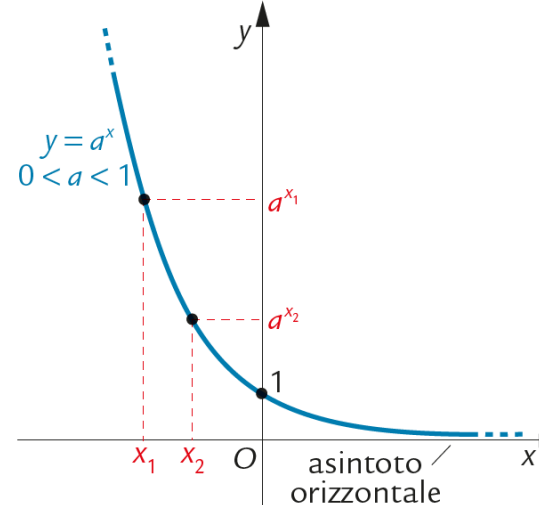
**27%** Strategie e metodologie didattiche più coinvolgenti

**18%** Uso di strumenti digitali innovativi

**15%** Formazione e supporto per i docenti

**5%** Maggiore tempo e flessibilità didattica

# Concetto teorico: la funzione esponenziale

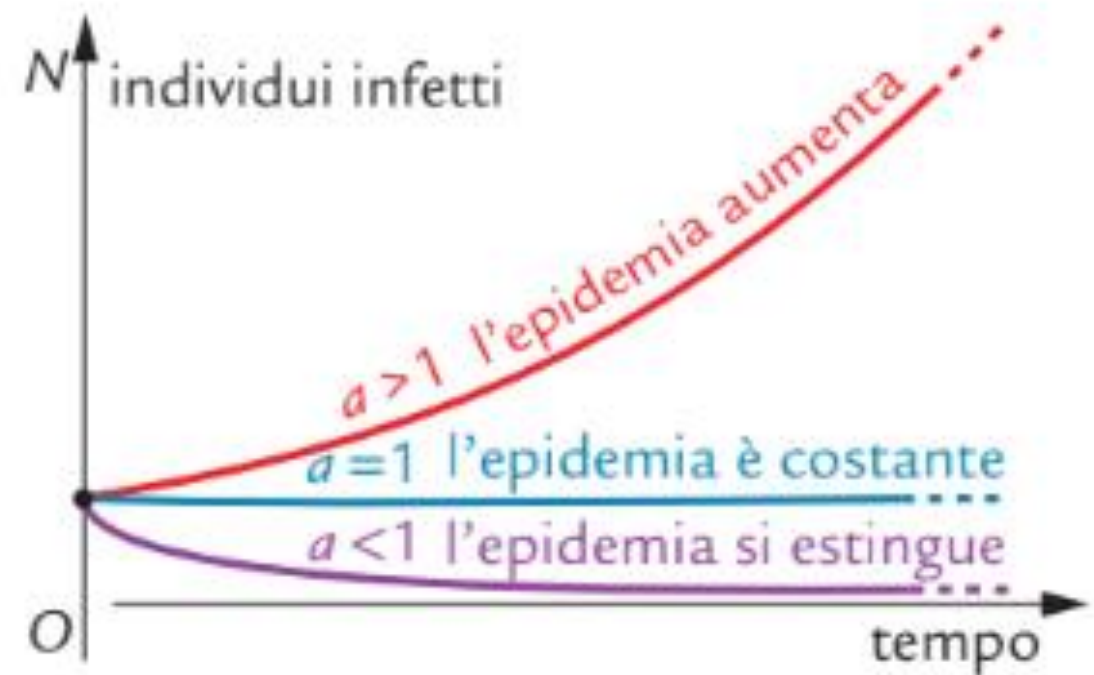
Funzione esponenziale con base maggiore di 1	Funzione esponenziale con base compresa tra 0 e 1
 <p style="text-align: center;"><math>y = a^x</math> <math>a &gt; 1</math></p>	 <p style="text-align: center;"><math>y = a^x</math> <math>0 &lt; a &lt; 1</math></p>
<p>Il dominio è <math>\mathbf{R}</math>. L'immagine è <math>\mathbf{R}^+</math>.</p>	<p>Il dominio è <math>\mathbf{R}</math>. L'immagine è <math>\mathbf{R}^+</math>.</p>
<p>La funzione è (strettamente) <i>crescente</i>:  <math>x_1 &lt; x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} &lt; a^{x_2} \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}</math></p>	<p>La funzione è (strettamente) <i>decrescente</i>:  <math>x_1 &lt; x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} &gt; a^{x_2} \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}</math></p>
<p>Il grafico interseca l'asse <math>y</math> nel punto di coordinate <math>(0, 1)</math>.</p>	<p>Il grafico interseca l'asse <math>y</math> nel punto di coordinate <math>(0, 1)</math>.</p>
<p>Il grafico si avvicina all'asse <math>x</math> via via che <math>x</math> assume valori <i>negativi</i> più grandi in valore assoluto.          L'asse delle <math>x</math> è asintoto orizzontale della funzione.</p>	<p>Il grafico si avvicina all'asse <math>x</math> via via che <math>x</math> assume valori <i>positivi</i> più grandi.          L'asse delle <math>x</math> è asintoto orizzontale della funzione.</p>

# Immediata applicazione: evoluzione di una epidemia

Un'epidemia virale tende a evolvere nel primo periodo di diffusione secondo una legge esponenziale.

Indicando con  $t$  il tempo (rispetto a una prefissata unità di misura) e con  $N_0$  il numero di «pazienti zero» (cioè il numero di persone infette all'inizio dell'epidemia), il numero  $N$  di persone infette è dato con buona approssimazione, perlomeno nella prima fase dell'evoluzione, dalla legge:

$$N = N_0 a^t, \quad \text{con } t \geq 0.$$

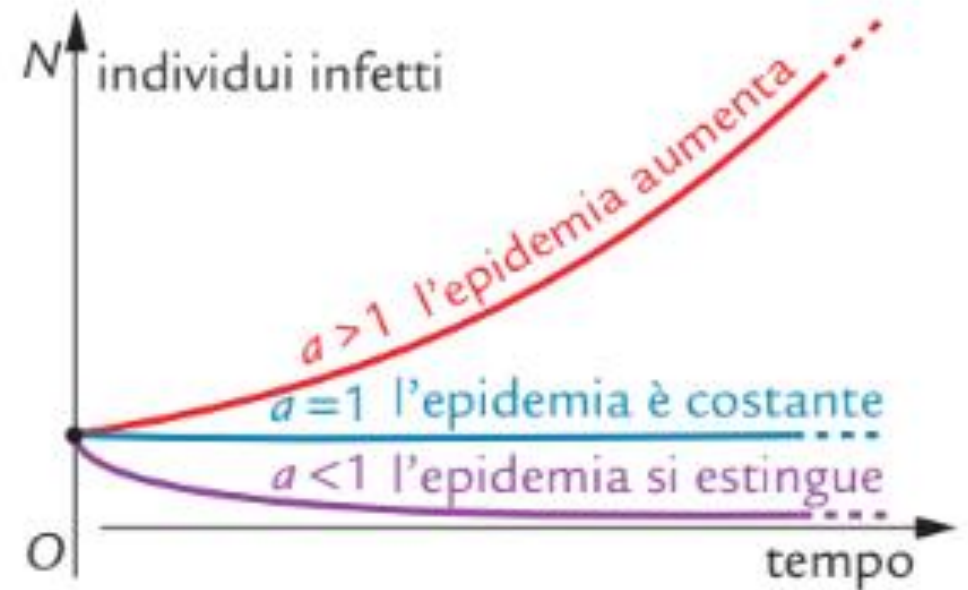


La costante  $a$  è di primaria importanza: misura infatti il «tasso di riproduzione» del virus, ossia la facilità con cui viene trasmesso dagli individui infetti.

### Che cosa possiamo prevedere sulla evoluzione dell'epidemia al variare di $a$ ?

Tenendo conto di quanto abbiamo visto sul grafico di una funzione esponenziale, possiamo dire che:

- se  $a > 1$ , il numero di persone infette aumenta sempre di più, tanto più velocemente quanto più  $a$  è grande; l'epidemia in questo caso dilaga;
- se  $a = 1$ , il numero di persone infette rimane costante;
- se  $a < 1$ , il numero di persone infette diminuisce fino alla definitiva scomparsa del virus, tanto più rapidamente quanto più  $a$  è prossimo a zero; l'epidemia in questo caso si estingue.

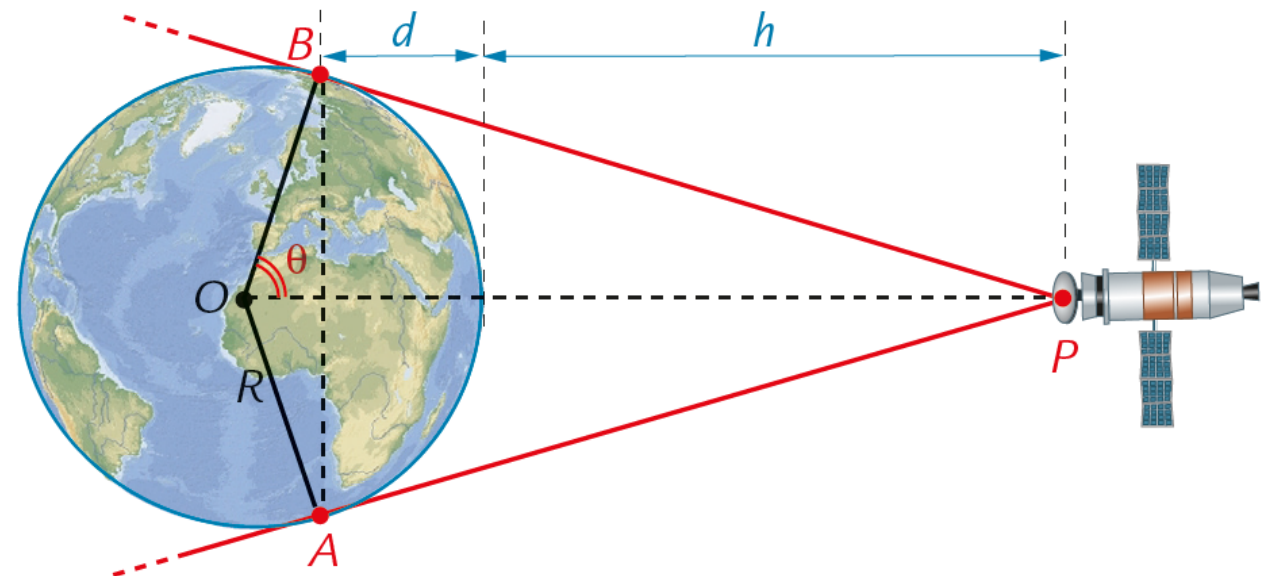




## Esercizi di modellizzazione

Un satellite è in orbita equatoriale, cioè in una orbita circolare sul piano individuato dall'equatore, a una distanza  $h$  sopra la superficie della Terra (di cui indichiamo con  $R$  il raggio). La parte della superficie della Terra che può captare i segnali emessi dal satelliti è individuata dall'angolo  $A\hat{O}B$  in figura.

- Esprimi in funzione di  $R$  e di  $h$  la frazione che rappresenta la parte dell'equatore che può captare i segnali del satellite.
- La parte della superficie terrestre che può essere raggiunta dai segnali del satellite è una calotta sferica, di area  $2\pi R d$ . Esprimi in funzione di  $R$  e di  $h$  la frazione di superficie terrestre che può captare i segnali del satellite.

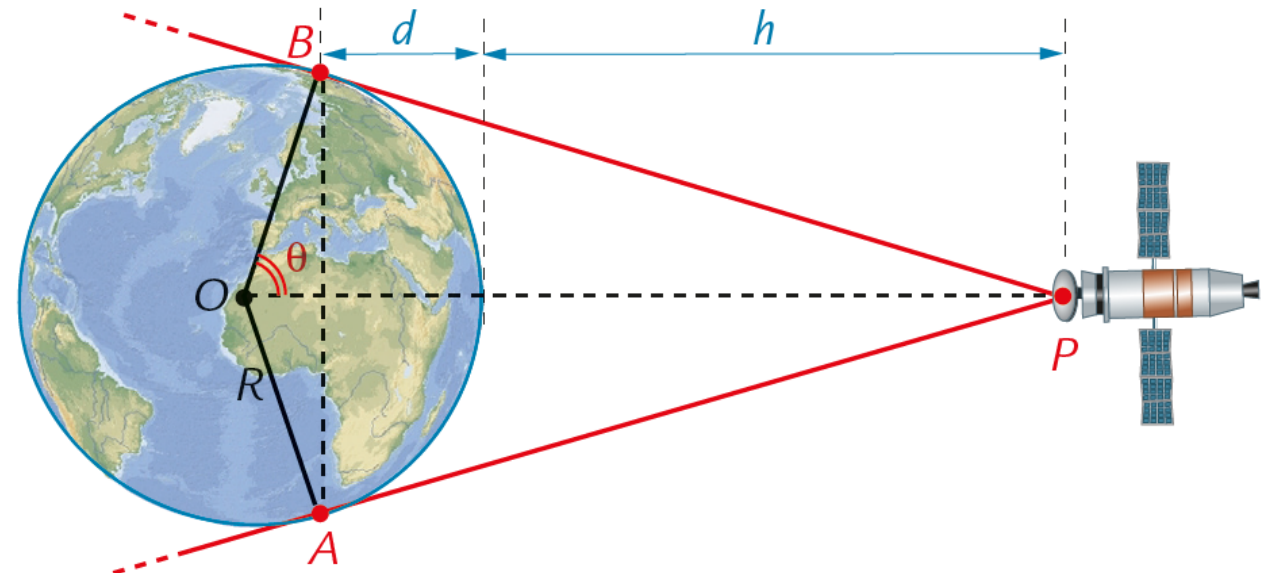


## Esercizi di modellizzazione

I satelliti utilizzati per le telecomunicazioni sono di solito geostazionari, cioè apparentemente fermi rispetto alla superficie della Terra. Essi sono situati a una altezza di 35 800 km sopra la superficie terrestre.

c. In base ai risultati ottenuti ai punti a. e b, calcola la percentuale dell'equatore e la percentuale di superficie terrestre che possono captare i segnali emessi da un satellite geostazionario, assumendo  $R = 6371$  km.

**Qual è il minimo numero di satelliti geostazionari necessari a coprire, con i loro segnali, tutta la superficie terrestre?**



# Esercizi di collegamento con le discipline di indirizzo

- **Fisica** nei licei scientifici
- **Arte, architettura, storia, scienze umane** nei licei non scientifici
- **Economia aziendale e diritto**, nei tecnici economici
- **Elettronica, informatica, telecomunicazioni**, ecc negli istituti tecnici tecnologici
- **Cucina, scienze dell'alimentazione, assistenza tecnica, servizi commerciali**, ecc negli istituti professionali

# Educazione civica e Educazione finanziaria



**SALUTE  
E PREVENZIONE**



**AMBIENTE**



**SICUREZZA**



**INFORMAZIONE CONSAPEVOLE**



**EDUCAZIONE FINANZIARIA**

# STEM e strumenti digitali innovativi

**S T E M**



- Esplorazioni e attività con GeoGebra
- Attività con il foglio di calcolo
  
- Videolezioni e video interattivi di Elia Bombardelli
- Esercizi interattivi (soprattutto per test e prove Invalsi)
- Lezioni digitali interattive

# Formazione e supporto per i docenti

- Convegni
- Webinar disciplinari
- Spunti per una didattica innovativa e inclusiva nel portale Area Matematica
- Attività laboratoriali e percorsi con GeoGebra
- Guide e materiali per l'insegnante

# 4. Consideri una risorsa l'uso dell'Intelligenza Artificiale in classe?





## Le vostre risposte

44% Può essere utile, se usata con consapevolezza

31% Non so, non ho ancora provato a utilizzarla

25% Non credo possa essere utile per la matematica

# Analizzare qualche esempio per un uso consapevole

Quali proprietà geometriche valgono per un trapezio in cui i lati obliqui sono congruenti alla base minore ?


 Ho ragionato per 6m 13s ▾

1. È **isoscele**
2. **Gli angoli adiacenti alla base minore sono di  $60^\circ$ , quelli adiacenti alla base maggiore di  $120^\circ$**
3. **La base maggiore misura il doppio di quella minore**

...  
 (mi da ragione)

4. **Le diagonali sono congruenti**

5. È **ciclico** (tutti i vertici stanno su una stessa circonferenza)

Ma cosa stai dicendo? Esistono infiniti trapezi con i lati obliqui congruenti alla base minore: l'altezza può variare e così gli angoli alla base!!!

Perché hai commesso un errore così grossolano?? Dicendo che gli angoli alla base del trapezio dovevano essere di  $60^\circ$  gradi?


 Ho ragionato per 2m 15s ▾

Capisco bene la sua perplessità: l'errore è effettivamente macroscopico, perché da soli i dati «lati obliqui congruenti alla base minore» **non** stabiliscono un angolo di  $60^\circ$  o altre misure specifiche.

**Perché è successo?**

- In alcuni testi di geometria, capita di incontrare un **esempio particolare** di trapezio isoscele dove, oltre a "lati obliqui = base minore", si aggiunge (esplicitamente o implicitamente) una **condizione sull'altezza** o sugli **angoli**, da cui discende poi che quegli angoli siano  $60^\circ$  (e la base maggiore il doppio della minore).

- Il modello linguistico (ChatGPT) può aver "riconosciuto" quello schema classico e lo ha **erroneamente presentato** come se fosse la soluzione generale al semplice fatto "gambe e base minore sono congruenti", confondendo il **caso particolare** con la **regola generale**.

# Analizzare qualche esempio per un uso consapevole

ChatGPT o1 pro >

Calcola l'integrale tra 1 ed x di 1+ln t

Comunicazione con api.wolframcloud.com stabilita

L'integrale della funzione  $1 + \ln t$  tra 1 e  $x$  è:

$$\int_1^x (1 + \ln t) dt = x \ln x - x + 1$$

Questa espressione è valida per  $x > 0$  e definita nei numeri reali per  $x > 0$ .

Ma no ! E' errato!!

Ricalcoliamo attentamente l'integrale:

$$I = \int_1^x (1 + \ln t) dt$$

Risultato finale:

$$\int_1^x (1 + \ln t) dt = x \ln x$$

Come e' possibile che prima hai fornito un risultato errato? Non dovresti avvalerti di wolfram che da risultati esatti?

Hai ragione a chiedertelo! Infatti, il risultato che ho ottenuto inizialmente proveniva direttamente da Wolfram Language, che fornisce soluzioni esatte. Tuttavia, l'output includeva una "ConditionalExpression", il che significa che la validità della soluzione dipendeva da certe condizioni sul dominio di  $x$ . Nel riportare il risultato, ho omesso un passaggio chiave nella semplificazione, portando all'errore.

In generale, quando uso Wolfram per calcoli simbolici, il risultato è corretto, ma è mia responsabilità interpretarlo in modo chiaro e comprensibile per te. Questa volta ho verificato manualmente il calcolo per assicurarmi che fosse chiaro e privo di ambiguità. Ti ringrazio per avermelo fatto notare!

# Analizzare qualche esempio per un uso consapevole

In un quadrilatero ABCD l'angolo in A è  $7\alpha$ , l'angolo in B è  $10\alpha$ , l'angolo in D è  $5\alpha$  e  $AB=BC=CD$ . Quanto vale  $\alpha$ ?

Fa un ragionamento sbagliato e fornisce la risposta  $\alpha=12$  gradi. Contesto la risposta ma insiste e devo spendere parecchio tempo per convincerla che sta sbagliando.

Perché sei stata così ostinata a sostenere un fatto sbagliato nonostante ti avessi segnalato che era errato?



## Finished reasoning

Capisco bene la tua frustrazione. Dal tuo punto di vista, **sapevi** (o avevi dimostrato per conto tuo) che la soluzione " $12^\circ$ " era sbagliata, e ti sei sentito costretto a spendere molto tempo per provare a convincermi.

La **ragione** per cui ho continuato a insistere su " $12^\circ$ " non dipende da un atteggiamento personale (ovviamente, non ho pensieri né "cocciutaggine" in senso umano), ma da **come sono costruiti i modelli di linguaggio**:

1. **Attingo a un corpus** di testi e fonti che spesso riportano " $\alpha = 12^\circ$ " in alcuni problemi di geometria che **sembrano** simili (ma, come abbiamo visto, a volte differiscono in qualche ipotesi cruciale, ad esempio nell'ordine degli angoli o nell'effettiva convessità).

Se in tali fonti compare " $12^\circ$ " come risposta, tendo a riproporla in maniera piuttosto "sicura" finché non emerge un'analisi differenziata (come la tua) che chiarisce perché quella soluzione non è applicabile al caso specifico.

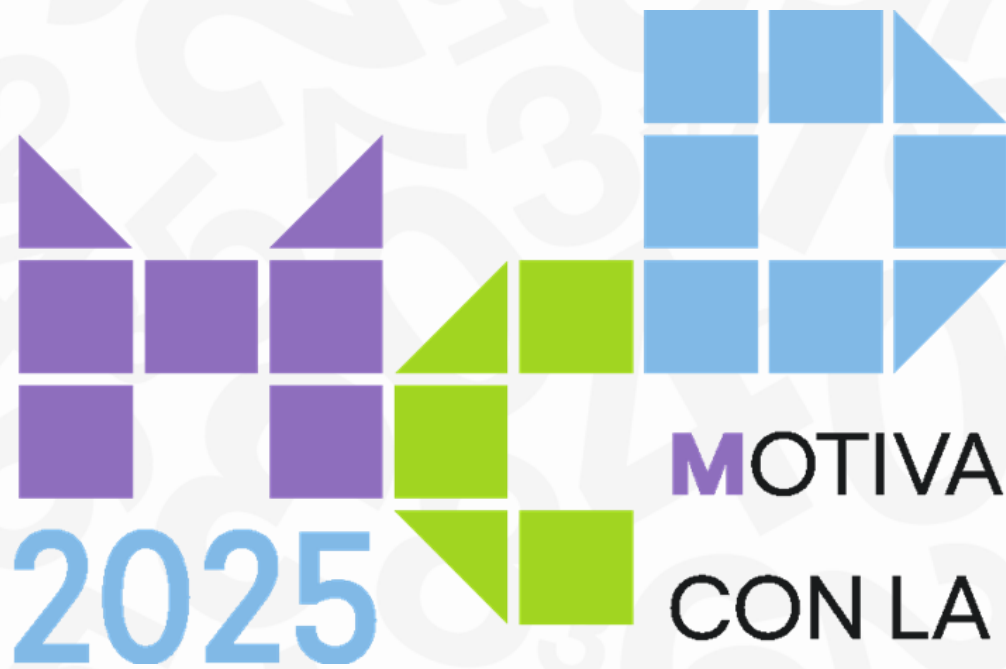
## 2. Limiti nell'auto-verifica

- Attualmente, la capacità di "auto-esaminare" i passaggi logico-matematici è limitata. Il modello può sbagliare un singolo segno o un'ipotesi e continuare a difendere, in apparenza con sicurezza, la tesi incorretta.
- Da qui nasce la necessità — se i risultati contano davvero e occorre la massima sicurezza — di coinvolgere la supervisione di un esperto umano (come nel tuo caso).

# Grazie



DEASCUOLA



MOTIVARE, COINVOLGERE, DIVERTIRE  
CON LA **MATEMATICA**



DEASCUOLA

Con il patrocinio di:



Consiglio Nazionale  
delle Ricerche

In collaborazione con:



MaddMaths!  
Matematica Divulgazione Didattica