

Successo in matematica: una varietà di strategie e approcci

Relatori:

Rosetta Zan

Leonardo Sasso

Pierangela Accomazzo



Insegnare ad avere...

✓ Successo in matematica Una questione di cornici

Relatore: Rosetta Zan



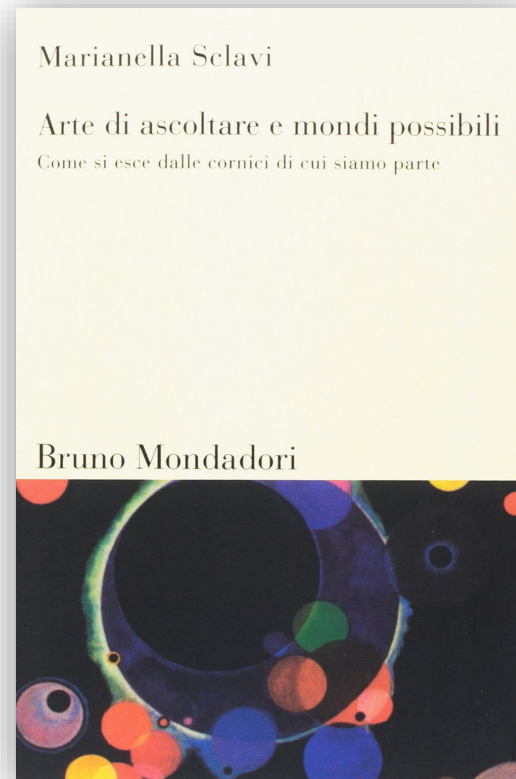


MARIANELLA SCLAVI

Arte di ascoltare e mondi possibili

Come si esce dalle cornici
di cui siamo parte

Cornici culturali, linguistiche, ...



Cosa vuol dire la parola...



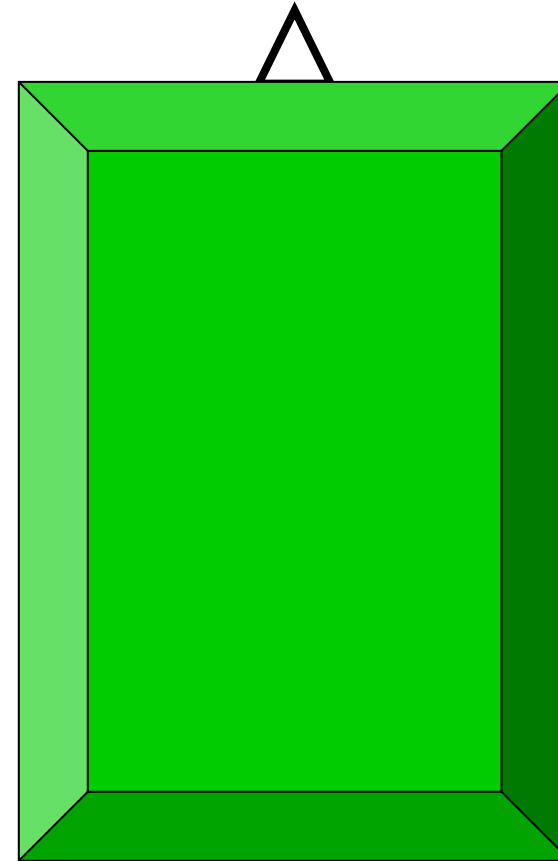
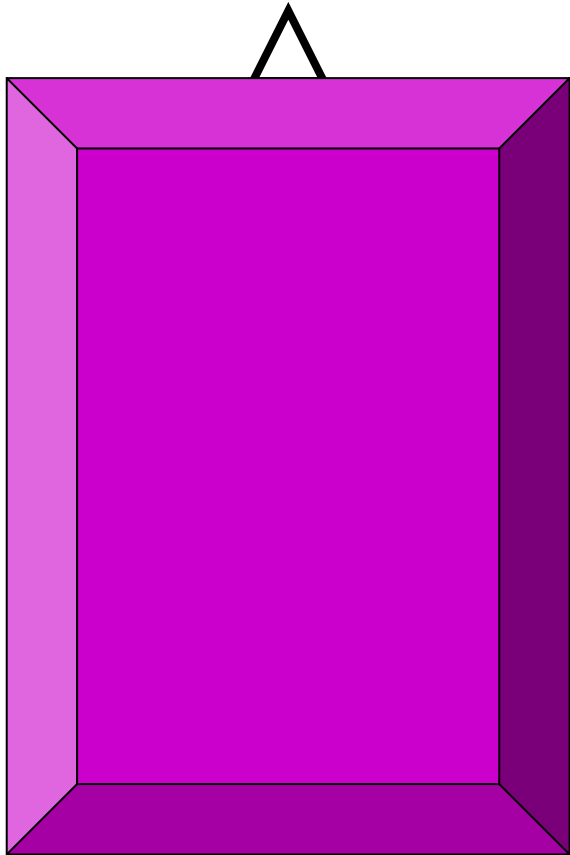
AGO

?



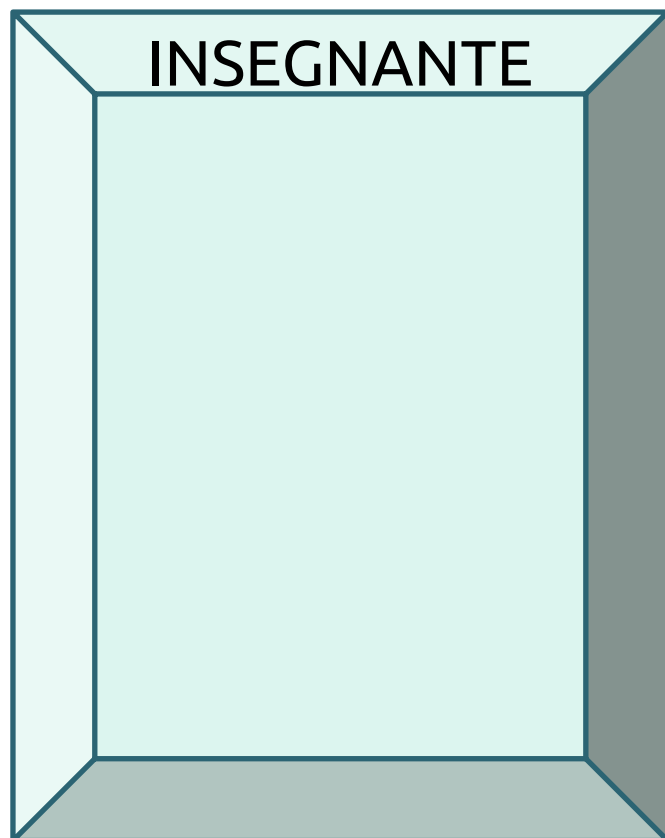
INSEGNARE MATEMATICA

...è una questione di cornici



INSEGNARE MATEMATICA

...è una questione di cornici



INSEGNARE MATEMATICA



DEASCUOLA

Basterebbe che ti
impegnassi di più...

Devi usare correttamente
il **linguaggio**!

Ci puoi arrivare:
basta che **ragioni**!

Ma hai **capito**...?



IMPEGNARSI

RAGIONARE

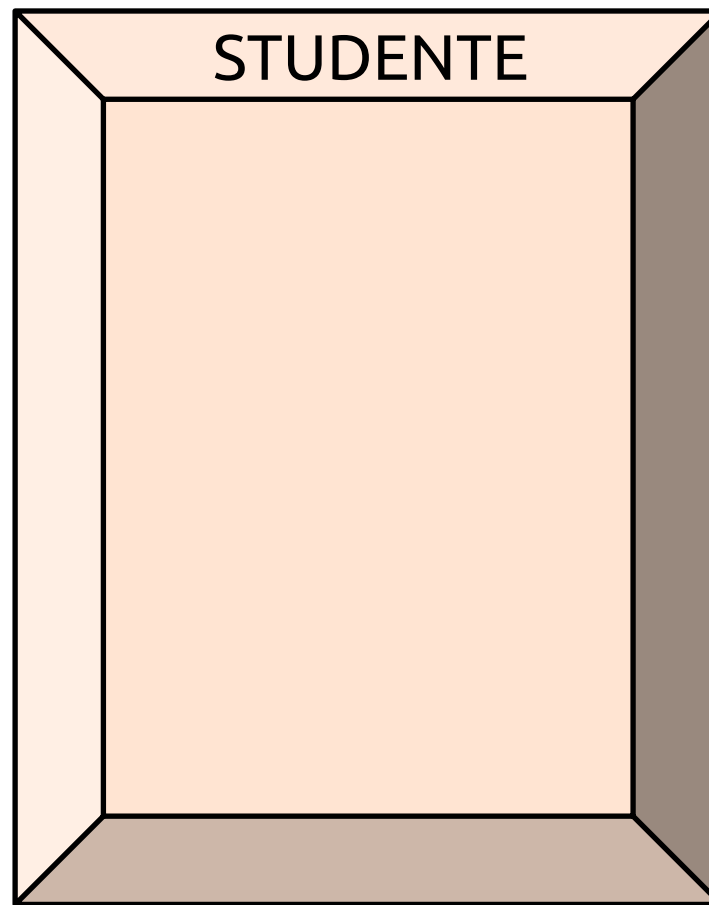
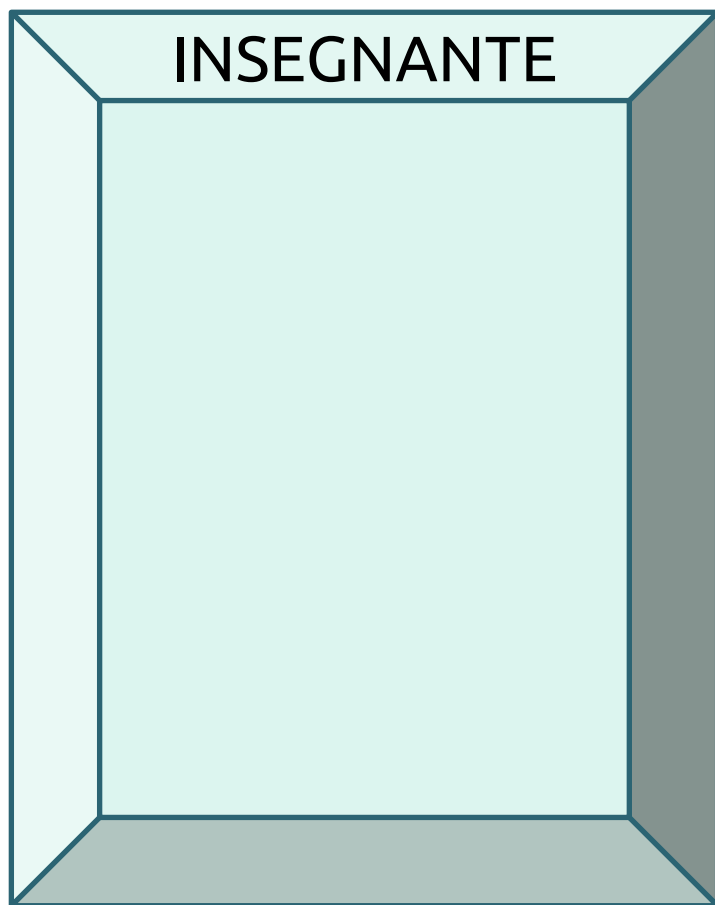
USARE
CORRETTAMENTE



CAPIRE



INSEGNARE MATEMATICA



INSEGNARE MATEMATICA



DEASCUOLA

IMPEGNARSI

INSEGNANTE

Investire risorse
in modo mirato.

STUDENTE

Fare fatica.



INSEGNARE MATEMATICA

CAPIRE

Un esempio: le disequazioni di 2° grado

Ma hai **capito**...?

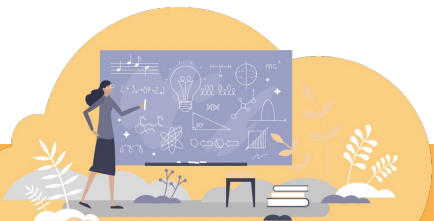
TRADUZIONE

Hai capito
perché si risolvono
in quel modo?

Sì, ho capito.

TRADUZIONE

Ho capito
che si fanno così:
si trova il delta,
poi...



CAPIRE

INSEGNANTE

Capire *perché*.

STUDENTE

Capire *come* si fa.

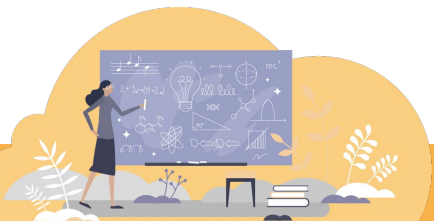


INSEGNARE MATEMATICA

RAGIONARE

Ce la puoi fare...
Basta che RAGIONI!

Non mi faccio imbrogliare...
Se poi ragiono davvero mi
dice che non va bene!



RAGIONARE

Un giorno la prof mi ha chiesto di dimostrare che:

La somma di due numeri pari è un numero pari.

E mi ha detto: "Ragiona!"

Io ho provato con un sacco di numeri:

$2+2=4$ $2+4=6$ $2+6=8$ $4+2=6$ $4+4=8$ $4+6=10$

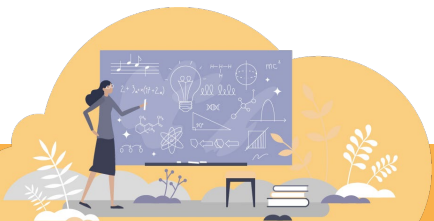
Allora ho risposto:

"Sì è vero: torna sempre..."

...ma lei ha detto che *non bastavano nemmeno 1000 esempi!*

Però una volta al primo della classe che aveva fatto *solo un esempio* ha detto: "Bravo!"

Non mi faccio imbrogliare...
Se poi ragiono davvero mi
dice che non va bene!



RAGIONARE

INSEGNANTE

Usare la razionalità
matematica

STUDENTE

Usare la razionalità
quotidiana



INSEGNARE MATEMATICA

USARE CORRETTAMENTE IL LINGUAGGIO

INSEGNANTE

Fa riferimento
al linguaggio
matematico

STUDENTE

Non riconosce
il linguaggio
matematico
come linguaggio
funzionale
a degli scopi.



INSEGNARE MATEMATICA

Un esempio: La somma di due numeri pari

Healy e Hoyles (2000) - 2549 studenti di 14-15 anni

Arthur, Bonnie, Ceri, Duncan, Eric e Yvonne stanno cercando di dimostrare se il seguente enunciato è vero o falso:

Quando sommi due numeri pari, il risultato è sempre pari

Fra le risposte scritte sopra scegli:

1. quella più vicina a **quello che tu faresti** per rispondere alla domanda: _____
2. quella a cui il **tuo insegnante** darebbe il voto più alto: _____



Quando sommi due numeri pari il risultato è sempre pari

Arthur:

Un numero pari è il doppio di un altro numero, quindi due numeri pari si possono scrivere come $2a$ e $2b$.

$$2a + 2b = 2(a+b)$$

Quindi anche la somma è pari.

Bonnie:

Sì, perché:

$$2 + 2 = 4$$

$$2 + 4 = 6$$

$$2 + 6 = 8$$

$$4 + 2 = 6$$

$$4 + 4 = 8$$

$$4 + 6 = 10.$$

Quindi è vero.

Ceri:

I numeri pari sono numeri divisibili per 2. Quando sommi numeri che hanno un fattore comune, in questo caso 2, il risultato avrà ancora tale fattore in comune.

Duncan:

I numeri pari finiscono per 0, 2, 4, 6, o 8.

Quando sommi due di questi numeri, il risultato finirà ancora per 0, 2, 4, 6 o 8.

Eric:

Sia x = un numero intero

y = un numero intero

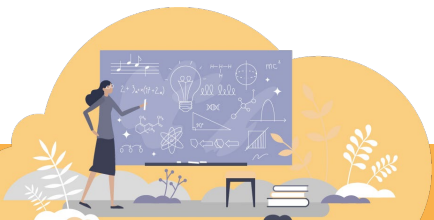
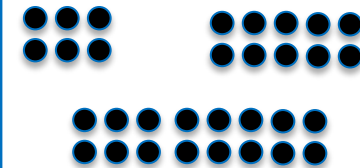
$$x+y=z$$

$$z-x=y$$

$$z-y=x$$

$$z+z-(x+y)=x+y=2z$$

Yvonne:



1. Scegli la risposta più vicina a **quello che tu faresti**

2. Scegli **quella a cui il tuo insegnante darebbe il voto più alto**

Arthur:

Un numero pari è il doppio di un altro numero, quindi due numeri pari si possono scrivere come $2a$ e $2b$.

$$2a + 2b = 2(a+b)$$

Quindi anche la somma è pari.

12% 22%

Bonnie:

Sì, perché:

$$2 + 2 = 4$$

$$2 + 4 = 6$$

$$2 + 6 = 8$$

$$4 + 2 = 6$$

$$4 + 4 = 8$$

$$4 + 6 = 10$$

Quindi è vero.

24%

3%

Ceri:

I numeri pari sono numeri divisibili per 2. Quando sommi numeri che hanno un fattore comune, in questo caso 2, il risultato avrà ancora tale fattore in comune.

17%

18%

Duncan:

I numeri pari finiscono per 0, 2, 4, 6, o 8.

Quando sommi due di questi numeri, il risultato finirà ancora per 0, 2, 4, 6 o 8.

29% 7%

Eric:

Sia x = un numero intero

y = un numero intero

$$x+y=z$$

$$z-x=y$$

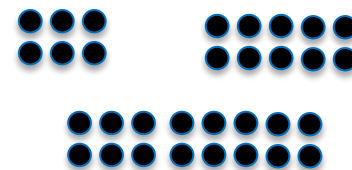
$$z-y=x$$

$$z+z-(x+y)=x+y=2z$$

2%

42%

Yvonne:



16%

9%



Intervista...

...a uno studente che aveva scelto per sé Duncan, ma Eric come risposta più apprezzata dal docente

- I.:** Quindi tu hai scelto Duncan per te, ma Eric come quello cui l'insegnante avrebbe dato il voto più alto. Perché pensi che Eric avrebbe avuto il voto più alto?
- S.:** Perché non ho capito del tutto cosa ha fatto, ...c'è un sacco di x e di y .
- I.:** Nella risposta di Eric?
- S.:** Sì. Ed è quello che piace alla professoressa G., perché le piacciono cose complicate e quindi probabilmente gli darebbe il voto migliore.

Duncan:

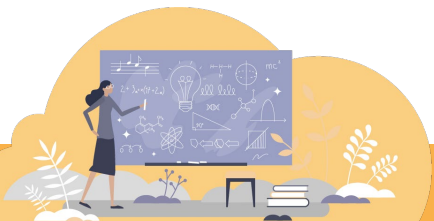
I numeri pari finiscono per 0, 2, 4, 6, o 8. Quando sommi due di questi numeri, il risultato finirà ancora per 0, 2, 4, 6 o 8.

29%

Eric:

Sia x = un numero intero
 y = un numero intero
 $x+y=z$
 $z-x=y$
 $z-y=x$
 $z+z-(x+y)=x+y=2z$

42%



Intervista...

...a uno studente che aveva scelto per sé Duncan, ma Eric come risposta più apprezzata dal docente

I.: Ho capito. Ma quello che hai scelto per te l'hai scelto perché l'hai capito?

S.: Sì, perché l'ho capito.

I.: Questo è interessante. In realtà tu hai detto che non sai se Eric ha fatto degli errori...ma la sua risposta otterrebbe il voto più alto perché è pieno di x e di y ?

S.: Sì, la risposta di Eric sembra più matematica.

Duncan:

I numeri pari finiscono per 0, 2, 4, 6, o 8. Quando sommi due di questi numeri, il risultato finirà ancora per 0, 2, 4, 6 o 8.

29%

Eric:

Sia x = un numero intero

y = un numero intero

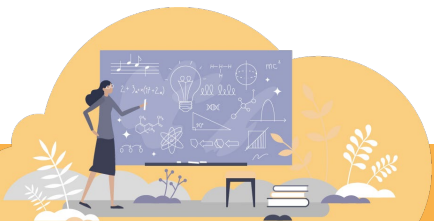
$$x+y=z$$

$$z-x=y$$

$$z-y=x$$

$$z+z-(x+y)=x+y=2z$$

42%



Intervista...

...a uno studente che aveva scelto per sé Duncan, ma Eric come risposta più apprezzata dal docente

I.: Ho capito. Ma quello che hai scelto per te l'hai scelto perché l'hai capito?

S.: Sì, perché l'ho capito.

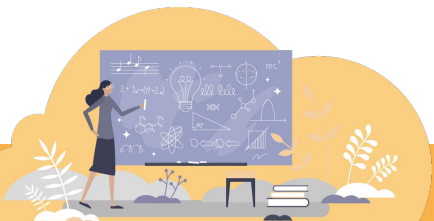
I.: Questo è interessante. In realtà tu hai detto che non sai se Eric ha fatto degli errori...ma la sua risposta otterrebbe il voto più alto perché è pieno di x e di y ?

S.: Sì, la risposta di Eric sembra più matematica.



Il linguaggio matematico è percepito:

- come una 'forma' da dare alla soluzione per soddisfare le richieste dell'insegnante
- ...e *non*:
- come uno strumento per affrontare e risolvere problemi



IMPEGNARSI

RAGIONARE

MATEMATICA

USARE
CORRETTAMENTE

CAPIRE



INSEGNARE MATEMATICA



DEASCUOLA

...è la 'stessa' matematica?

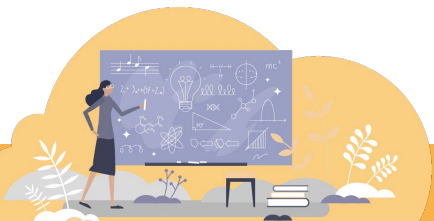
*Imparare le cose a memoria (a parte qualche formula) non mi é mai piaciuto e questa materia mi offre motivo di ragionamento e di discussione.
Mi piace perché è una materia dove bisogna ragionare, e se non lo fai diventa difficile e molto faticosa, per non dire impossibile. (Danilo, 3^a sec. di 2° grado)*

ragionare

MATEMATICA

ricordare

*Per prima cosa voglio dire che la materia in questione non è affatto una materia semplice, infatti bisogna memorizzare e saper applicare numerosissime regole e passaggi.
(Marco, 2^a sec. di 2° grado)*



...è la 'stessa' matematica?

MATEMATICA
CONCETTUALE

MATEMATICA
PROCEDURALE

ragionare

MATEMATICA

ricordare



INSEGNARE MATEMATICA

...è la 'stessa' matematica?

MATEMATICA CONCETTUALE

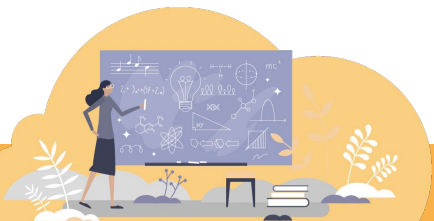
Centrata sui **processi**:

- esplorare
- congetturare
- dimostrare
- ...
- attivati da **problemi**
- **ragionare**
- **tempo**
- **l'errore** è un momento inevitabile

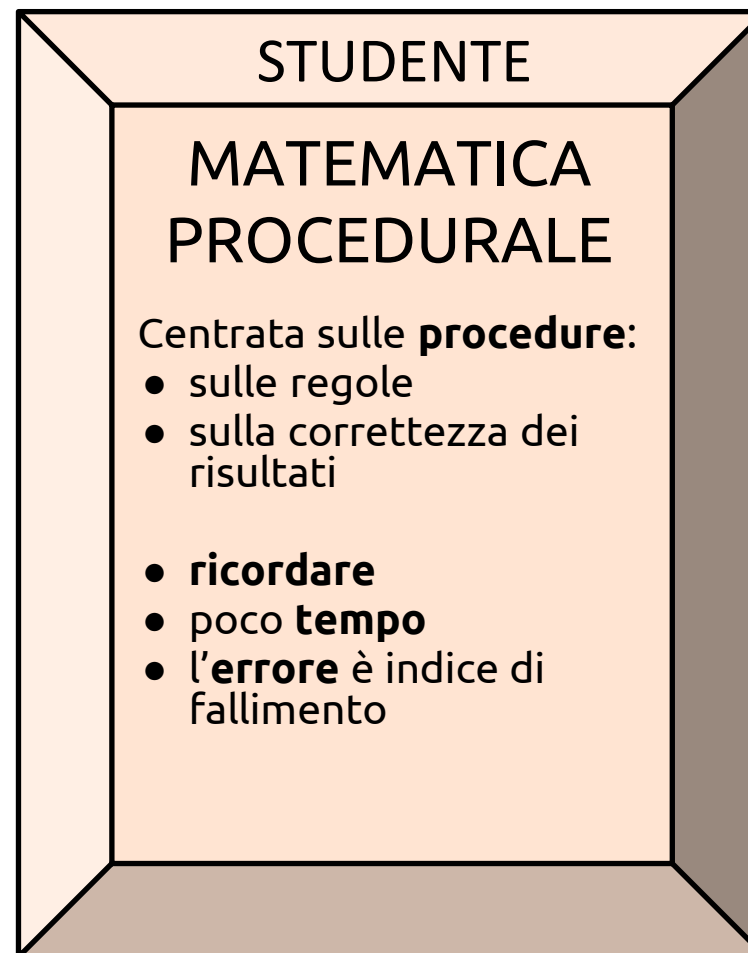
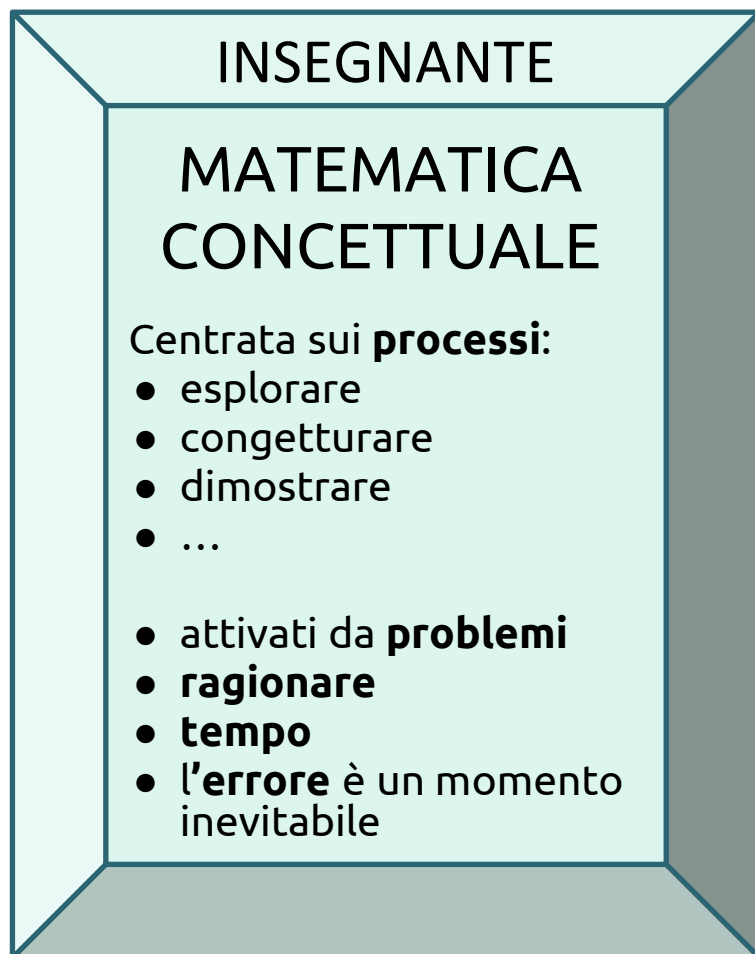
MATEMATICA PROCEDURALE

Centrata sulle **procedure**:

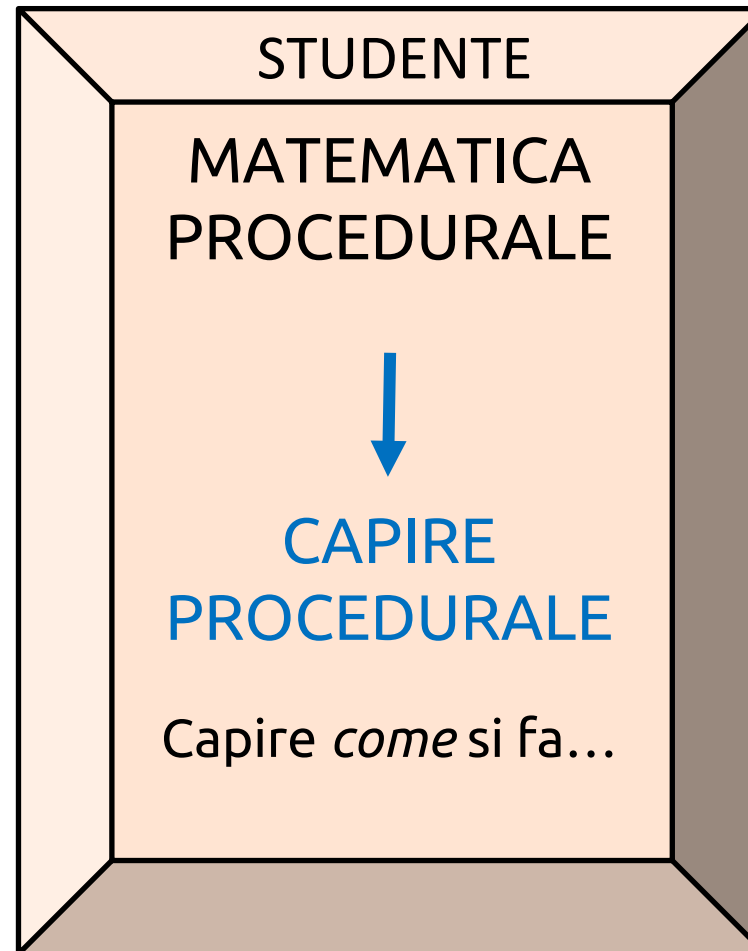
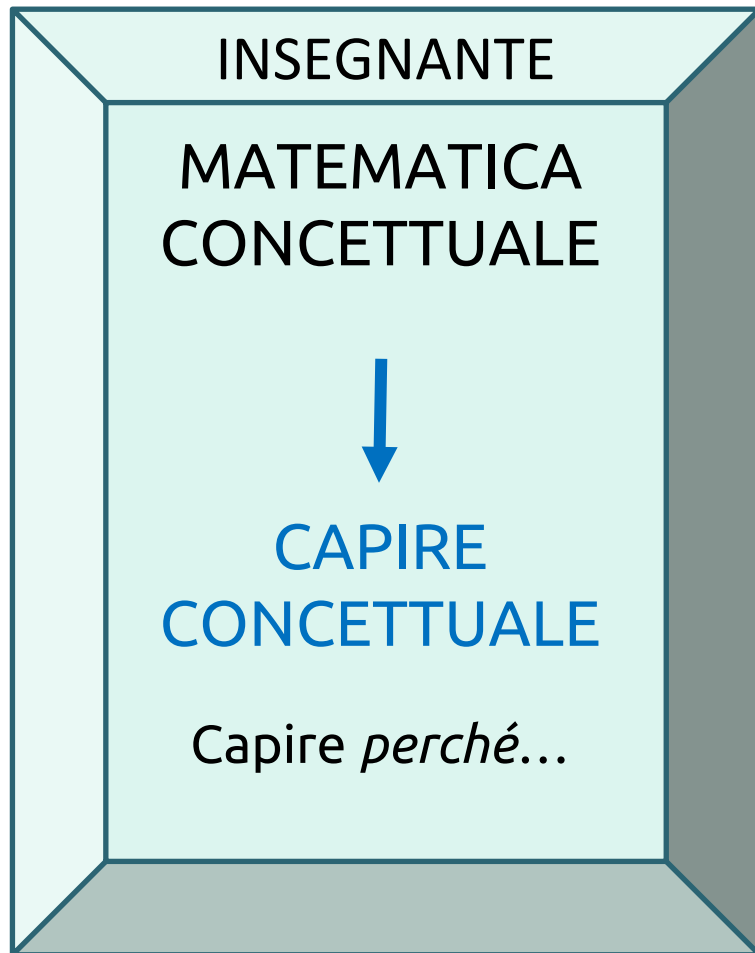
- sulle regole
- sulla correttezza dei risultati
- **ricordare**
- poco **tempo**
- **l'errore** è indice di fallimento



...è la 'stessa' matematica?



CAPIRE



Conseguenze di una visione procedurale



INSEGNARE MATEMATICA

Esempio: Nicola

$$-7x^2 < \sqrt{7}$$

$$x^2 > -\frac{\sqrt{7}}{7}$$

$$7x^2 + \sqrt{7} > 0$$

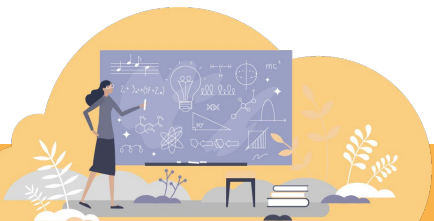
...e poi si blocca



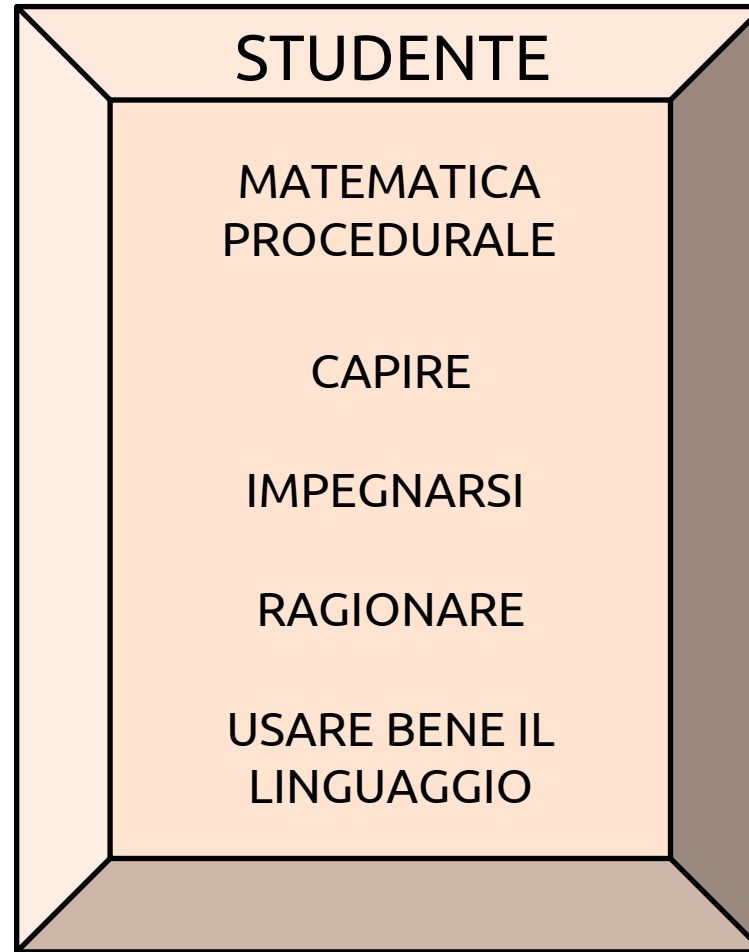
Esempio: Nicola

$$-7x^2 < \sqrt{7}$$

- I.:** *Perché invece di ricordarti cosa devi fare, non provi a risolverla da solo?*
- N.:** *La matematica è fatta di regole ben precise che vanno seguite, non ci si può inventare nulla. I problemi si risolvono seguendo quelle regole e io, ora, non mi ricordo come si risolvono le disequazioni.*

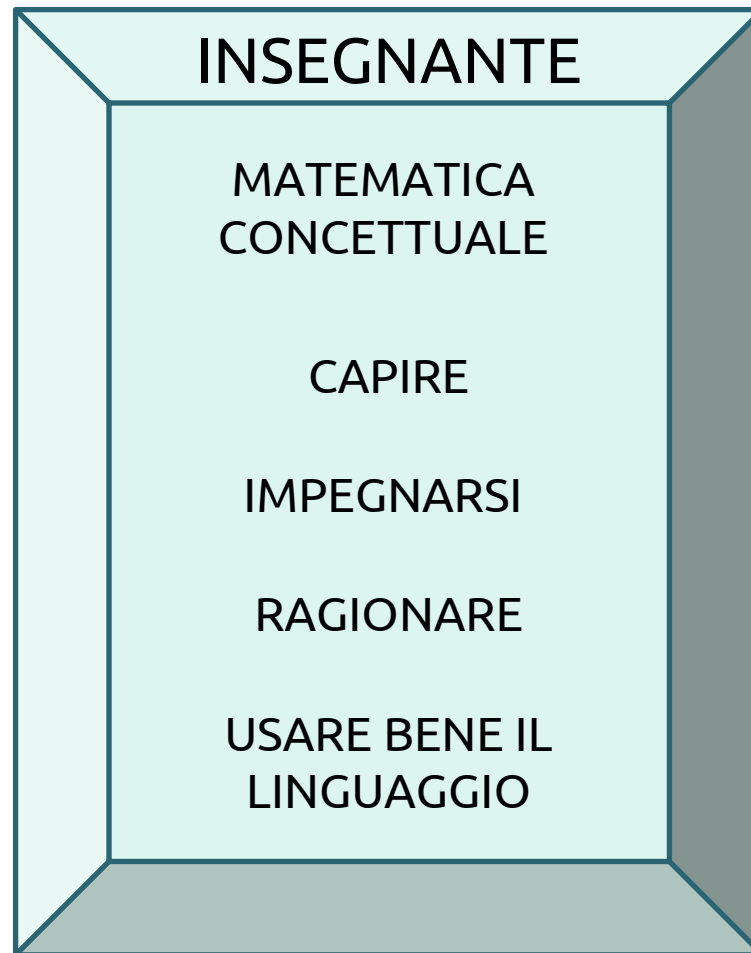


Le responsabilità dell'insegnamento



INSEGNARE MATEMATICA

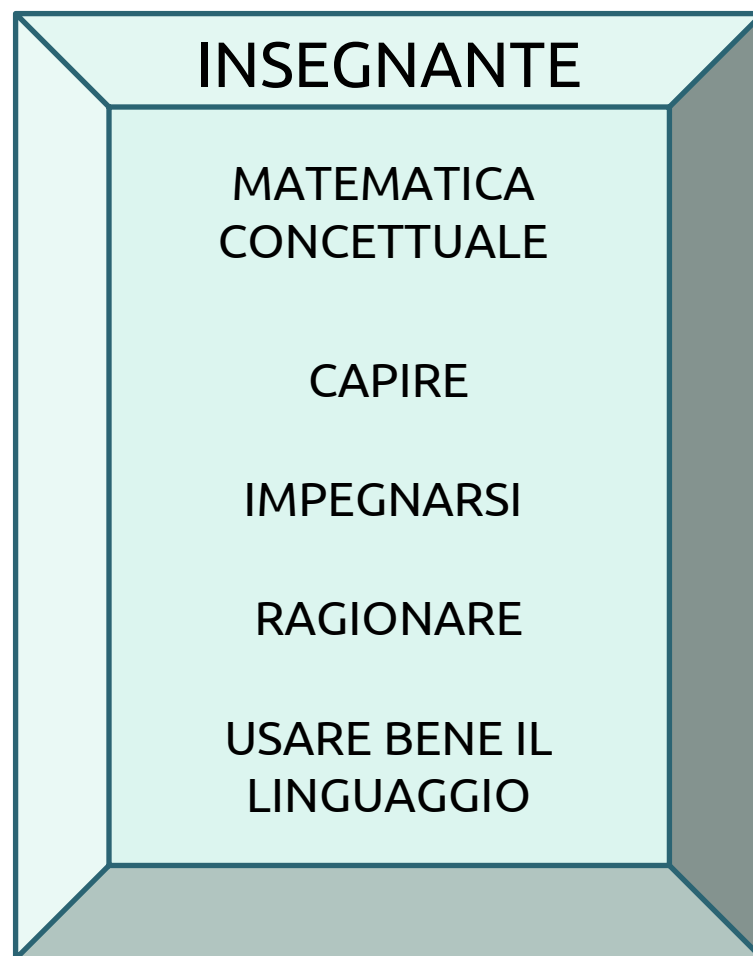
Le responsabilità dell'insegnamento



Approccio concettuale
all'insegnamento



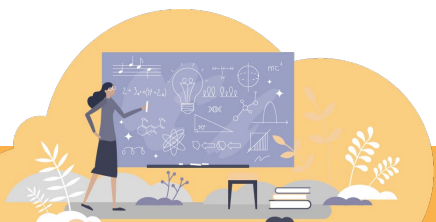
Le responsabilità dell'insegnamento



- continuo riferimento alle 'regole'
- focus sulle risposte corrette piuttosto che sulla qualità dei processi
- ...

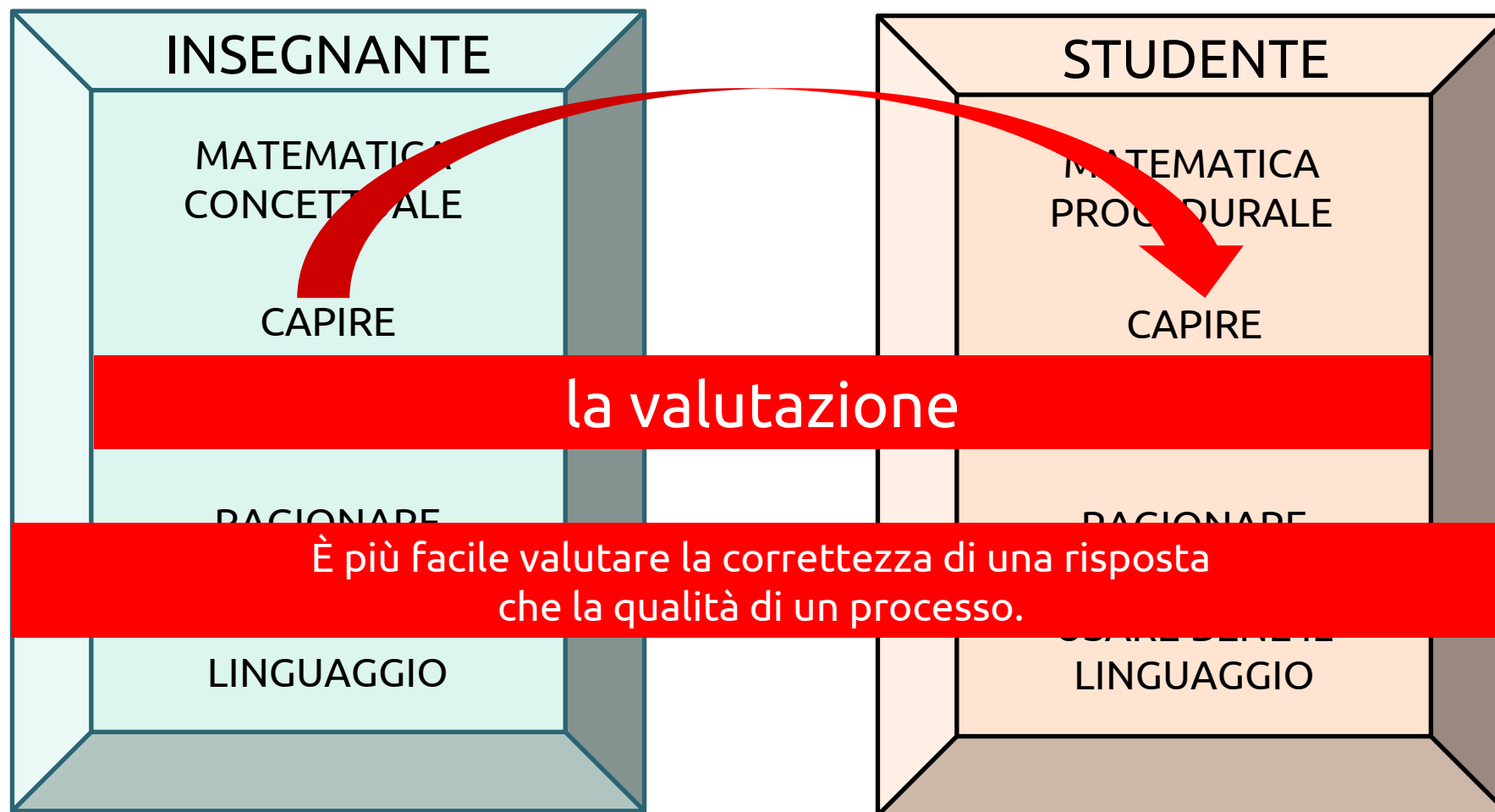
Approccio concettuale
all'insegnamento

Inoltre...

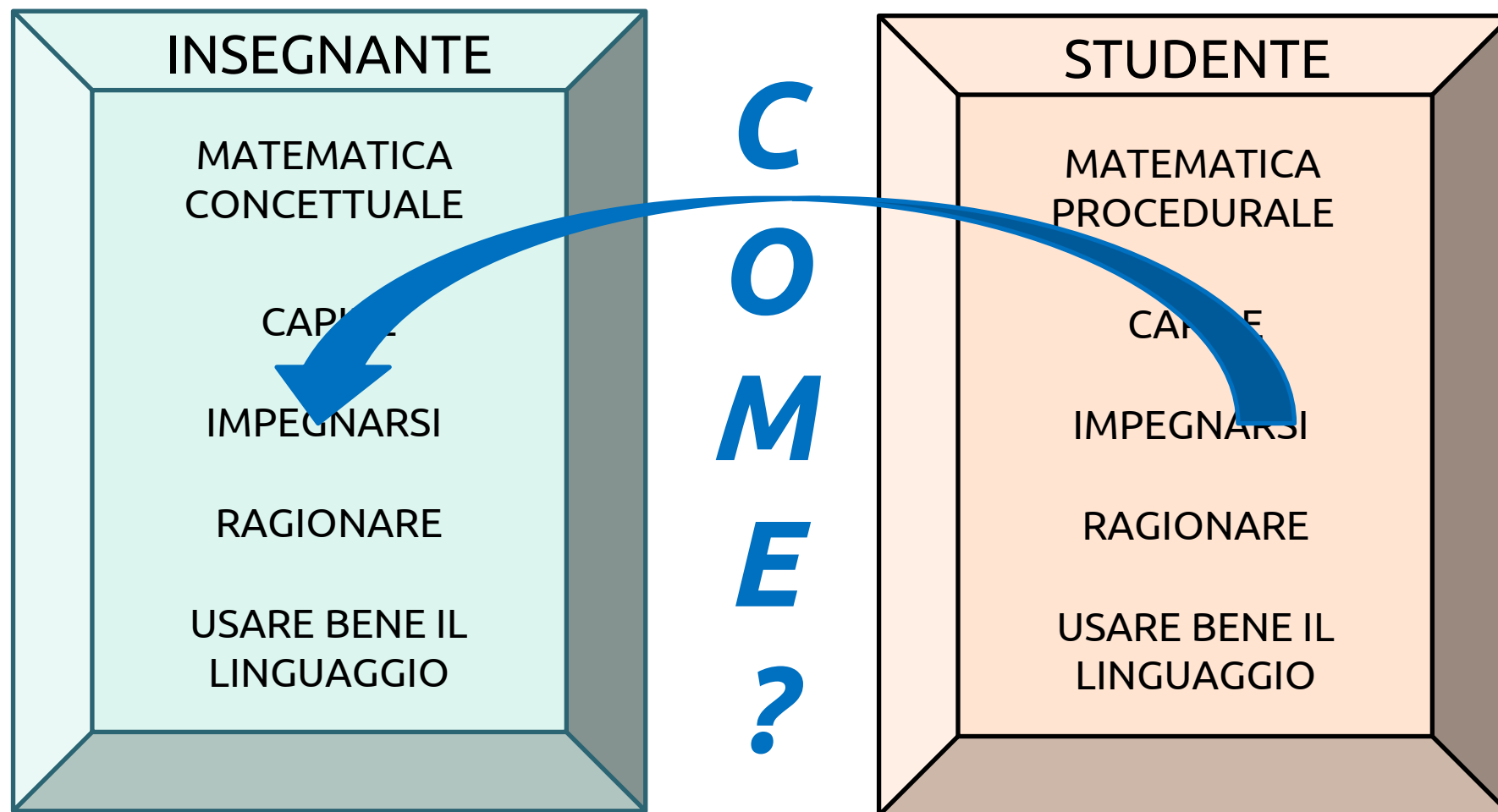


INSEGNARE MATEMATICA

'Cedimenti' dell'approccio concettuale



Il problema dell'insegnamento

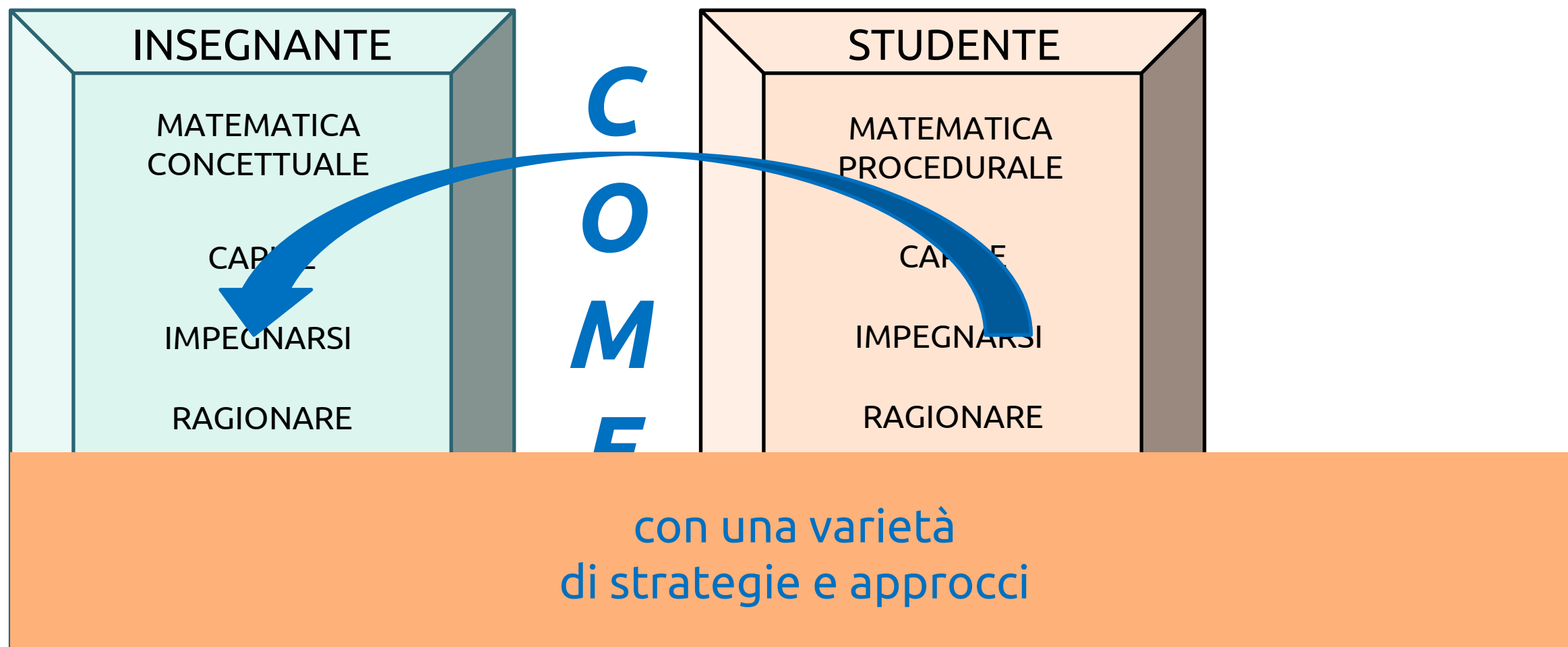


INSEGNARE MATEMATICA



DEASCUOLA

Il problema dell'insegnamento





Rosetta Zan, Anna Baccaglini-Frank

AVERE SUCCESSO in MATEMATICA

Strategie per l'inclusione e il recupero



i prossimi interventi

con una varietà
di strategie e approcci



INSEGNARE MATEMATICA

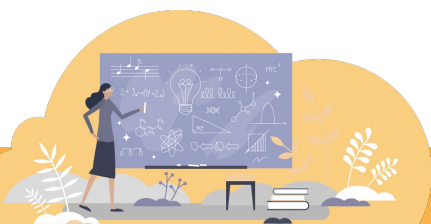


DEASCUOLA



MARIANELLA SCLAVI

Due cose che un buon insegnante
non può permettersi sono:
non rispettare l' allievo
e non essere curioso di altre cornici,
di altre visioni del mondo.



Successo in matematica: una varietà di strategie e approcci

Relatori:
Leonardo Sasso
Pierangela Accomazzo



Matematica concettuale

Centrata sui **processi**:

- esplorare
- congetturare
- dimostrare
- riflettere sul proprio operato
- spiegare, discutere
- costruire modelli



- Didattica interattiva, dialogo
- Coinvolgimento personale
- Laboratorio



Matematica concettuale

Processi attivati da

- **problemi**



- **Contesti**
- **Tipologia di problemi**
- **Strumenti**
- **Dimensione individuale e sociale**

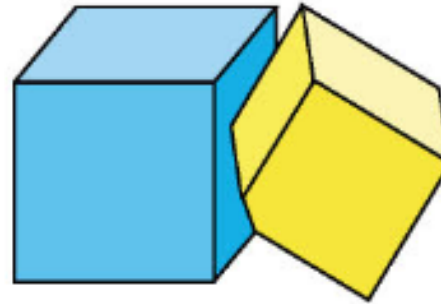


I contesti dei problemi

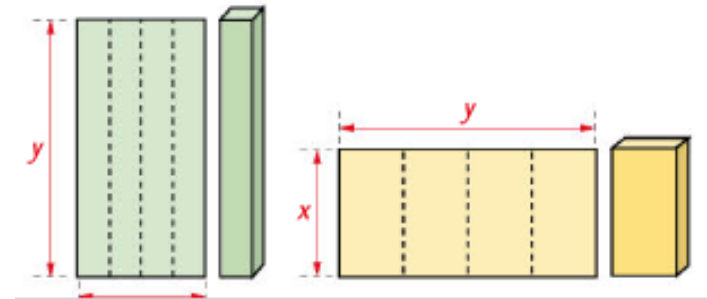
- dalla realtà



- dal gioco, dalle gare



- in ambito strettamente matematico



I contesti dei problemi

● dalla realtà: collegamenti con l'educazione civica

410  **SICUREZZA** Urti e incidenti. Consideriamo un'automobile che urta un ostacolo fisso sino a fermarsi; il danno subito dall'automobile dipende dall'energia cinetica E_C che l'auto possedeva al momento dell'urto, espressa dalla formula $E_C = \frac{1}{2} m v^2$, dove m è la massa dell'automobile e v la sua velocità.

- Se la velocità v raddoppia, è vero che anche l'energia cinetica raddoppia? E se la velocità v aumenta del 50%, di quanto aumenta in percentuale la sua energia cinetica?
- Come possiamo aspettarci che vari l'entità del danno subito da un'automobile che si schianta contro un ostacolo fisso, se la sua velocità d'urto passa da 50 km/h a 100 km/h? E se passa da 50 km/h a 75 km/h?

[a. No, quadruplica; aumenta del 125%]

219  **SALUTE E PREVENZIONE** Test diagnostico. Una malattia colpisce il 4% di una popolazione di 20000 individui. Il test per diagnosticare la malattia ha dei margini di errore, per cui:

- il 2,5% dei soggetti sani che si sottopongono al test risultano comunque positivi;
- l'1% dei soggetti malati che si sottopongono al test risultano negativi.

a. Completa la tabella, supponendo che tutti gli individui della popolazione si sottopongono al test.

b. Si sceglie a caso un individuo della popolazione tra quelli per cui il test ha dato esito positivo; qual è la probabilità che risulti effettivamente malato?

c. Si sceglie a caso un individuo della popolazione; qual è la probabilità che, sottoponendosi al test, egli riceva una corretta diagnosi (ossia esito positivo se è malato ed esito negativo se invece è sano)? [b. Circa 62,26%; c. 97,56%]

	Malati	Sani	Totale
Test positivo	792	480	1272
Test negativo	8	18720	18728
Totale	800	19200	20000

193  **EDUCAZIONE FINANZIARIA**

Aliquote IRPEF. Le aliquote Irpef del 2020 prevedevano una imposta pari al 23% del reddito fino a 15 000 euro (quindi una imposta di 3450 euro per redditi di esattamente 15 000 euro). Per redditi superiori a 15 000 euro fino a 28 000 l'imposta è di 3450 euro più il 27% sul reddito eccedente i 15 000 euro. Scrivi l'espressione della funzione che esprime l'imposta y da pagare, in funzione del reddito x , per redditi fino a 28 000 euro.

264  **AMBIENTE E SOSTENIBILITÀ** Aumento del livello del mare.

Nel 2000 il livello medio del mare a Venezia era circa 25 cm più alto di quello a inizio del secolo scorso, considerato come livello di riferimento; nel 2020 il livello medio del mare (calcolato come media dei valori massimo e minimo registrati nell'anno) era circa 32 cm più alto di quello di riferimento.

- Supponendo che a Venezia questa tendenza prosegua nei prossimi anni e assumendo un modello lineare, esprimi il livello medio y del mare sopra quello di riferimento in funzione del numero x di anni trascorsi dal 2000 (quindi $x = 0$ corrisponde al 2000, $x = 1$ al 2001 e così via).
- In base al modello determinato al punto a., determina una stima dell'aumento del livello medio del mare rispetto a quello di riferimento nel 2100.
- Secondo una proiezione della Nasa, il livello del mare che bagna le coste italiane è destinato a salire entro il 2100 da un minimo di 30 cm a un massimo di 80 cm. Come giudichi la stima che hai ottenuto al punto precedente rispetto a quest'ultima affermazione?



[a. $y = 0,35x + 25$; b. 60 cm]



I contesti dei problemi

- dalla realtà:
collegamenti con l'educazione civica

Compito di realtà 1

Una riflessione su giochi e scommesse



INFORMAZIONE CONSAPEVOLE

Analizzando alcuni dei giochi più diffusi e popolari nel nostro Paese, sarà immediato trarre la conclusione seguente: il gioco d'azzardo è un pasatempo decisamente costoso. Di certo, una forma rischiosa e fallimentare di «investimento».



1 Nel gioco *Win for Life* ci sono due pannelli costituiti ciascuno da 20 numeri. Vengono estratti 10 numeri dal primo pannello e 1 dal secondo (detto *numerone*). Per vincere occorre giocare 10 numeri dal primo pannello indovinandoli *tutti oppure nessuno*; non solo, è necessario giocare 1 solo numero dal secondo pannello indovinando il *numerone* estratto.

La probabilità di indovinare 10 numeri (scegliendoli a caso dai 20) è 1 su 184756 ed è la stessa della probabilità di non indovinarne nessuno.

Qual è la probabilità di vincere?

2 a. Nella roulette francese il disco è diviso in 37 settori numerati da 0 a 36, colorati alternativamente in rosso e in nero (tranne lo zero, colorato di verde). Si può puntare denaro sull'uscita di un numero qualsiasi. Quali sono le probabilità di vincere e di perdere?

b. Un giocatore scommette 1 euro sul suo numero «fortunato». Se vince, il banco gli restituisce la puntata e aggiunge 35 volte la posta (36 euro in tutto, dunque). Immagina che il giocatore abbia giocato per un numero n molto alto di partite, puntando sempre 1 euro e vincendo 1 volta su 37 e perdendo 36 volte su 37.

Verifica che al termine il giocatore si ritroverà in passivo, con una perdita proporzionale al numero di giocate (è proprio il caso di commentare: «Più giochi, più perdi!»).

3 Nel gioco del *Superenalotto* occorre scegliere 6 numeri tra 1 e 90. Utilizzando il calcolo combinatorio, è possibile stabilire che il numero di diverse sestine che si possono estrarre da 90 numeri è esorbitante: 622 614 630. Tentando ogni volta una sestina diversa, per tre volte alla settimana senza sosta, quanti anni occorrerebbero per giocarle tutte?

4 Il *Miliardario* è una delle lotterie più popolari, alle quali si può partecipare – solo se maggiorenni – acquistando in tabaccheria un biglietto da 5 euro. I premi in denaro messi in palio vanno da un minimo di 5 euro a un massimo di 500 000 euro. Ciascun lotto contiene 108 milioni di biglietti. Sul sito dell'Agenzia delle Dogane e dei Monopoli, che gestisce in Italia il gioco d'azzardo, è pubblicata la seguente tabella sul numero di biglietti vincenti in ciascun lotto per ammontare del premio:

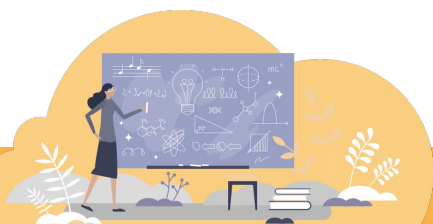
Ammontare del premio (in euro)	500 000	300 000	100 000	10 000	1 000	500	200	100	50	20	15	10	5
Numero di biglietti vincenti per lotto	18	18	18	324	13 500	36 000	45 000	720 000	900 000	1 800 000	3 060 000	7 200 000	13 140 000

Calcola:

- la somma complessivamente incassata dallo Stato per ciascun lotto di biglietti venduti (raccolta);
- l'ammontare complessivo delle vincite;
- il rapporto tra le vincite e la raccolta;

Concludi: spiega perché la lotteria *Il Miliardario* non può certo definirsi un gioco «equo».

> Risposte p. 915



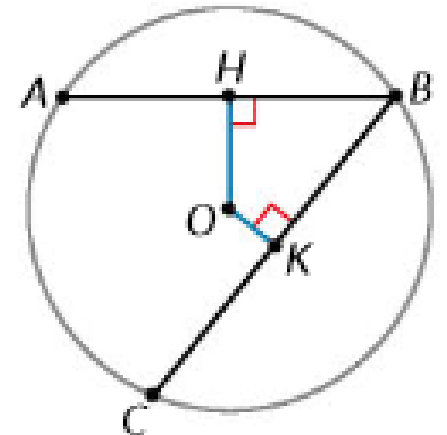
La tipologia dei problemi

Problemi aperti, in cui si chiede di individuare relazioni e regolarità.
Sono accompagnati dalla richiesta di **argomentazione**

45 Argomentare Se si aumentano di 1 sia il numeratore sia il denominatore di una frazione *propria*, la frazione aumenta o diminuisce? Analizza che cosa accade su alcuni esempi e formula una congettura, quindi cerca di giustificarla. Cambia qualcosa se la frazione che si considera è *impropria*?

- Esplorare, congetturare
- Confrontarsi, riflettere, discutere
- Esporre il proprio ragionamento

37 Argomentare Le due corde AB e BC in figura sono tali che $OH > OK$ e $AB = 10$ cm; inoltre la corda BC ha una misura, in cm, espressa da un numero intero. Qual è la più piccola misura possibile di BC ? Giustifica il ragionamento.

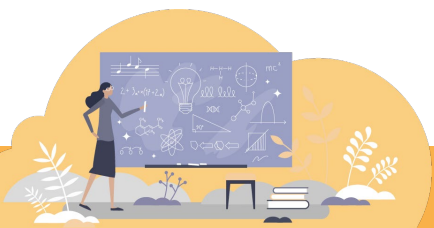


La tipologia dei problemi

528 **Metodi a confronto.** Una delle difficoltà del calcolo letterale sta nel fatto che le manipolazioni più opportune dipendono dallo scopo che ci si prefigge nel calcolo. Rifletti su tale questione in relazione alle seguenti situazioni.

- Volendo risolvere l'equazione $(x - 2)(x + 1)(x - 3) - 2x(x - 2)(x + 1) = 0$, quali calcoli conviene eseguire? È più utile sviluppare i calcoli al primo membro svolgendo le moltiplicazioni oppure eseguire dei raccoglimenti?
- Volendo risolvere l'equazione $(x - 2)(x - 3) - (x + 2)(x - 4) = 0$, quali calcoli conviene eseguire?
- Volendo risolvere l'equazione $(2x - 3)^2 - (x - 4)^2 = 0$, quali calcoli conviene eseguire?
- Volendo risolvere l'equazione $(x - 2)^2 + (x - 1)^2 = 0$, è utile eseguire calcoli?

- Riflettere; analizzare.
- Saper ripercorrere il proprio ragionamento
- Esporre una procedura risolutiva con linguaggio appropriato; discutere



La tipologia dei problemi

837 Con e senza calcolatrice. Senza utilizzare la calcolatrice, valuta l'ordine di grandezza del risultato delle seguenti espressioni. Verifica poi le tue risposte, eseguendo il calcolo con la calcolatrice.

a. $\sqrt{1400} + 1203 - \sqrt{27} \cdot 200$ b. $80^2 + \sqrt{160001} + 30\sqrt{3599}$ c. $(\sqrt{20} + \sqrt[3]{215})^5$ d. $\frac{\sqrt{8091}^2 \cdot \sqrt{30}^3}{1205}$

83 Check. Dopo aver risolto con il metodo di sostituzione il sistema $\begin{cases} 2x - \frac{1}{2}y = 2 \\ 4x + y = 8 \end{cases}$, verifica nei seguenti due modi che la soluzione trovata è corretta:

- sostituisci la soluzione trovata nel sistema e verifica che soddisfa entrambe le equazioni;
- traccia i grafici delle due rette che corrispondono alle equazioni del sistema e verifica che le coordinate del loro punto d'intersezione corrispondono alla soluzione.

$$\left[\left(\frac{3}{2}, 2\right)\right]$$

335 E se? In una città, tre autobus, che percorrono rispettivamente la linea A, la linea B e la linea C, iniziano il loro servizio dallo stesso capolinea alle ore 6 di mattina. L'autobus della linea A ritorna al capolinea ogni 45 minuti, l'autobus della linea B ogni 30 minuti e l'autobus della linea C ogni 25 minuti. A che ora della giornata i tre autobus si troveranno di nuovo insieme, per la prima volta, al capolinea?

► Se un piccolo cantiere sulla linea A rallentasse di un solo minuto la corsa, cambierebbe significativamente la risposta alla domanda precedente?

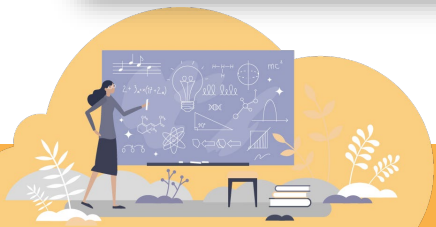
[Si incontrano alle 13:30; sì]

349 E se? In un triangolo equilatero ABC , di lato 1 cm, si conduce una corda DE , parallela ad AB , con D su AC ed E su BC . Determina la lunghezza della corda DE in modo che il perimetro del trapezio $ABED$ sia uguale a quello del triangolo DEC .

► Come cambierebbe la risposta al problema, se si volesse che il perimetro del trapezio $ABED$ fosse la metà di quello del triangolo DEC ?

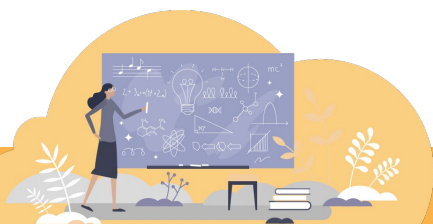
[$DE = 0,75$ cm; il problema sarebbe impossibile]

- Fare stime, prevedere il risultato
- Riflettere sul risultato: riconoscere se è plausibile, controllarlo, stabilire se è accettabile in relazione al problema
- Riflettere su come potrebbe cambiare al variare dei dati



La tipologia dei problemi

- Fare scelte, costruire un modello algebrico
- Riflettere sul risultato
- Risolvere un problema da più punti di vista (algebrico, numerico, grafico)



Compito di realtà

La dieta mediterranea STEM



SALUTE E PREVENZIONE

La Tabella 1 riporta le quantità di carboidrati, proteine e grassi che un adulto dalla normale attività lavorativa dovrebbe assumere giornalmente, secondo la dieta mediterranea.

In Tabella 2 sono riportati i valori nutrizionali medi di pasta, carne e ortaggi, in percentuale, rispetto alla quantità assunta.



Tabella 1

	Quantità da assumere giornalmente (g)
Carboidrati	300
Proteine	75
Grassi	56

Tabella 2

Alimento	Carboidrati	Proteine	Grassi
Pasta	80%	10%	1,5%
Carne	1%	18%	3%
Ortaggi	15%	3%	0,2%

1 Supponi che in una giornata siano assunti come cibi solo pasta, carne e ortaggi, rispettivamente nelle quantità x , y e z (in grammi); scrivi l'espressione algebrica che rappresenta la corrispondente quantità (in grammi):

- di carboidrati complessivamente assunti in un giorno;
- di proteine complessivamente assunte in un giorno;
- di grassi complessivamente assunti in un giorno.

2 Nelle ipotesi del punto 1, scrivi (senza risolverlo) il sistema che permette di trovare le quantità x , y e z di pasta, carne e ortaggi da assumere in un giorno per assumere le quantità di carboidrati, proteine, grassi raccomandati giornalmente dalla dieta mediterranea.

3 Risolvi il sistema trovato al punto 2 con l'aiuto del CAS di GeoGebra. Verifica che, arrotondando le soluzioni all'intero più vicino, si trovano come soluzioni approssimate i valori:

$$x = 3436, y = 1243, z = -16409$$

In base ai risultati trovati, ritieni possibile assumere le quantità di carboidrati, proteine e grassi raccomandati dalla dieta mediterranea mangiando, in una giornata, soltanto pasta, carne e ortaggi?

4 Un tuo amico vegetariano afferma che sarebbe possibile assumere le quantità di carboidrati e di proteine raccomandati dalla dieta mediterranea mangiando soltanto pasta e ortaggi.

- Indicati con x e y rispettivamente le quantità (in grammi) di pasta e ortaggi assunti giornalmente, scrivi il sistema che formalizza il problema proposto dal tuo amico.
- Risolvi il sistema con l'aiuto di GeoGebra, sia tramite l'interpretazione grafica sia mediante il CAS.
- Arrotonda le soluzioni a un numero intero e stabilisci se il tuo amico ha ragione.

5 Sarebbe possibile assumere le quantità di carboidrati e di proteine raccomandati mangiando soltanto pasta e carne? Rispondi alla domanda procedendo in modo analogo al quesito precedente.

La tipologia dei problemi

- Fare scelte, costruire un modello algebrico
- Riflettere sul risultato
- Risolvere un problema da più punti di vista (algebrico, numerico, grafico)

Compito di realtà 4

Latte e caffè STEM

La variazione di temperatura di un corpo di massa m è direttamente proporzionale alla quantità di calore che il corpo assorbe (o cede) secondo la relazione:

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta T$$

in cui c è detto «calore specifico» della sostanza di cui il corpo è costituito.

Nel caso in cui vengano messi a contatto due corpi a temperature diverse, il più caldo cede calore al più freddo (quindi la quantità di calore ceduta/assorbita è, in valore assoluto, la medesima per i due corpi) ed entrambi si portano a una stessa temperatura, intermedia tra le due iniziali, detta «temperatura di equilibrio».

1 Vuoi riscaldare una tazza di latte (250 mL), portandola dalla temperatura di 10,0 °C alla temperatura di 40,0 °C. Assumendo per il latte un calore specifico $c = 3900 \text{ J/(kg} \cdot \text{°C)}$ e una densità di $1,03 \text{ g/cm}^3$, determina la quantità di calore che è necessario fornire.

2 Se utilizzi un bollitore elettrico che ha una potenza di 800 W, quanto tempo è necessario?

3 Aggiungi alla tazza di latte, alla temperatura di 40,0 °C, una tazzina da caffè da 50,0 mL, che è alla temperatura di 65,0 °C. Assumendo per il caffè la stessa densità e lo stesso calore specifico dell'acqua ($c = 4186 \text{ J/(kg} \cdot \text{°C)}$), determina la temperatura finale del caffèlatte.

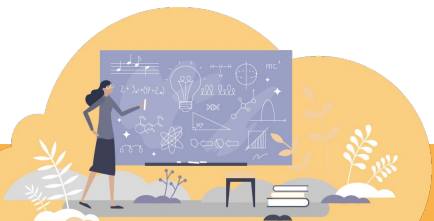
4 Mescolando due volumi di latte V_1 e V_2 , rispettivamente a temperatura $T_1 = 40,0 \text{ °C}$ e $T_2 = 20,0 \text{ °C}$, si ottengono 400 mL di latte alla temperatura di 28,0 °C. Determina V_1 e V_2 .

5 Alcuni cocktail e liquori sono a base di latte. Supponi di voler preparare un liquore, con del latte ($c = 3900 \text{ J/(kg} \cdot \text{°C)}$) alla temperatura di 5,0 °C e dell'alcool ($c = 2200 \text{ J/(kg} \cdot \text{°C)}$) alla temperatura di 15 °C. Determina la temperatura finale, se l'alcool rappresenta il 20% della massa rispetto al totale.

Utilizzi due bollitori elettrici identici (di potenza fissata P , in watt) per scaldare la medesima quantità di latte di massa m e la quantità di caffè di massa m , rispettivamente a temperatura iniziale T_1 e T_2 , con $T_1 < T_2$.

6 Per ciascuno dei due liquidi, determina la funzione lineare che descrive la temperatura finale in funzione del tempo t (in secondi) trascorso da quando è stato attivato il bollitore. Quale delle due curve avrà coefficiente angolare maggiore? Giustifica la tua risposta dal punto di vista fisico e spiega il significato del coefficiente angolare in relazione al problema.

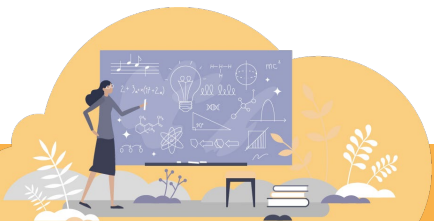
7 Rappresenta graficamente con GeoGebra le due funzioni individuate al punto precedente nel caso in cui $T_1 = 15,0 \text{ °C}$, $T_2 = 20,0 \text{ °C}$, $P = 800 \text{ W}$ e la quantità scaldata corrisponde a una massa $m = 200 \text{ g}$ sia per il latte sia per il caffè. Utilizza i grafici per determinare approssimativamente dopo quanto tempo i due liquidi sono alla stessa temperatura e qual è questa temperatura. Ritrova poi la risposta dedotta graficamente, risolvendo algebricamente il sistema opportuno.



Gli strumenti del laboratorio

Sono scelti nella loro funzione di **mediatori di apprendimento**.

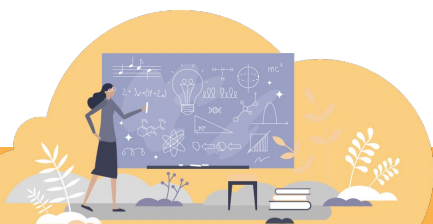
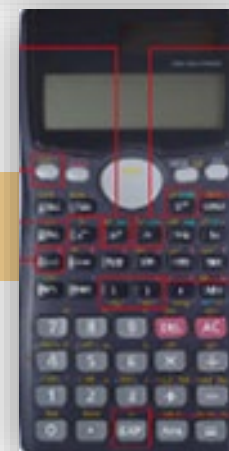
Possono essere di diverso tipo: vanno da carta, righello, compasso, a strumenti più complessi come la calcolatrice scientifica; a video interattivi o a veri e propri ambienti operativi come GeoGebra.



Gli strumenti del laboratorio

250 Con la calcolatrice. La frazione $\frac{8}{3}$ ha come corrispondente decimale un numero periodico: spiega perché puoi prevederlo senza alcun calcolo. Esegui poi la divisione con la calcolatrice: quante cifre decimali sono visualizzate? Il risultato che la calcolatrice restituisce deriva dal troncamento o dall'arrotondamento del risultato effettivo della divisione? Prova a eseguire altre divisioni con risultato periodico, come $485 : 117$ o $5651 : 521$. Comprendi perché, in generale, il display della calcolatrice non consente di determinare con certezza il periodo di un numero periodico?

Appropriarsi operativamente di uno strumento di calcolo



**108**

Attività con la carta e con GeoGebra

a. Con la carta. Ritaglia da un foglio di carta un triangolo acutangolo ABC , di base BC (Fig. a). Ripiega su sé stessa una parte del triangolo che contiene il vertice B lungo una direzione perpendicolare alla base (Fig. b). Esegui poi una seconda piega, sempre perpendicolarmente alla base, in modo che il punto C vada a sovrapporsi alla nuova posizione del punto B (Fig. c). Confronta i due angoli segnati in Fig. b, eventualmente misurandoli con un goniometro: **quale ipotesi puoi formulare?** Se avessi effettuato la prima piega in un punto diverso (ma sempre perpendicolarmente alla base) si sarebbe mantenuta la stessa proprietà?

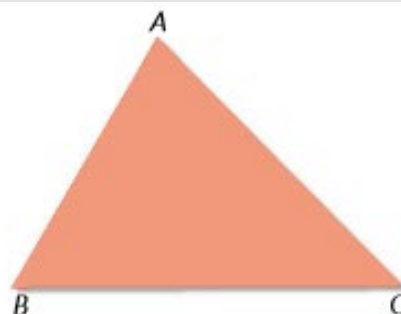


Figura a



Figura b

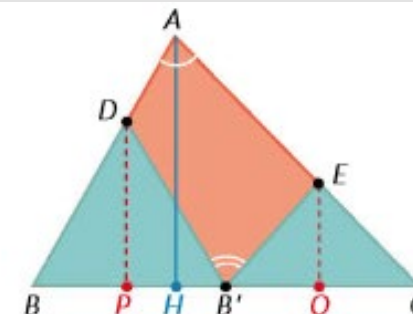
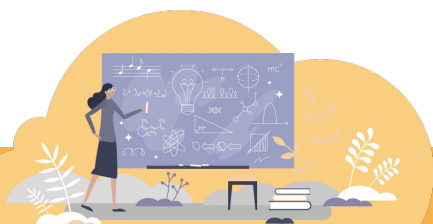


Figura c



 **132** **Esplora con GeoGebra** La potenza 3^4 è uguale a 81: l'ultima cifra del risultato di questo elevamento a potenza è 1. Qual è l'ultima cifra del risultato di 3^{150} ? Con il Foglio di calcolo di GeoGebra analizza il comportamento delle prime 20 potenze di 3:

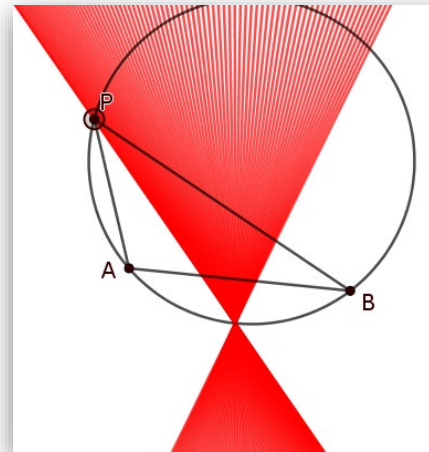
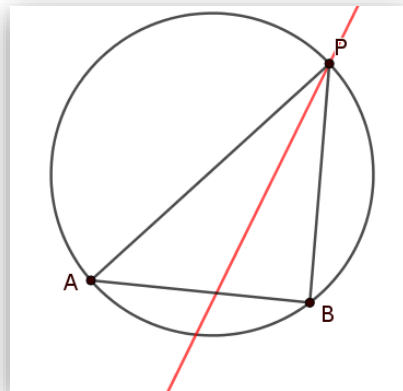
- inserisci nella colonna A i primi 20 numeri naturali, a partire da 1;
- nella colonna B calcola le potenze di 3 che hanno per esponente i numeri naturali della colonna A.

Quale regolarità si può individuare nelle ultime cifre dei risultati? Sulla base dell'osservazione precedente rispondi alla domanda iniziale e giustificala.

- Esplorare
- Congetturare
- Dimostrare



128 Attività con GeoGebra Costruisci una circonferenza e una corda AB . Prendi un punto P su uno degli archi individuati dalla corda e disegna l'angolo $\widehat{APB}$. Traccia la bisettrice di $\widehat{APB}$, colorala di rosso e attivane la *Traccia*. Muovi il punto P sull'arco che hai scelto e osserva come si dispone la bisettrice: c'è un punto fisso per cui passa sempre, al variare della posizione di P sull'arco? In caso affermativo, qual è questo punto? Come puoi giustificare questa proprietà?



- Esplorare dinamicamente
- Congetturare
- Dimostrare



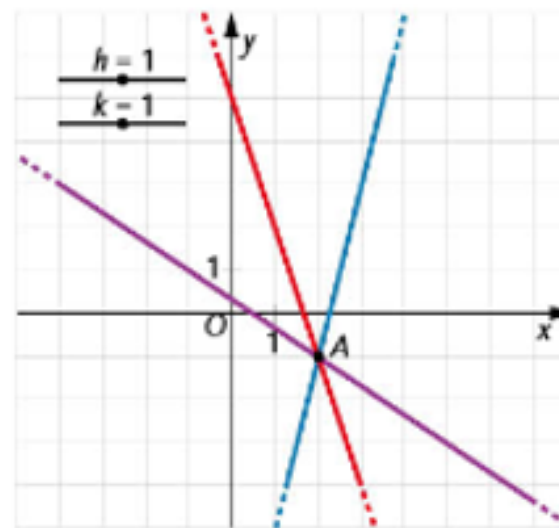
Gli strumenti del laboratorio

152

Attività con GeoGebra

Considera il sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x - y = 9 \end{cases}$

- Scrivi le due equazioni nella Barra di inserimento, etichettandole con r e s :
 $r: 2x + 3y = 1$ $s: 4x - y = 9$
- Osserva nella Vista Grafici le due rette che vengono rappresentate, indica con A il loro punto d'intersezione e deduci graficamente la soluzione del sistema. Verifica algebricamente che la soluzione dedotta dal grafico è corretta.
- Costruisci due slider h e k , variabili da -10 a 10 con passo 1 ; lascia inizialmente i valori $h = 1$ e $k = 1$.
- Dal menu *Visualizza* apri la Vista CAS; nella riga 1 indica l'equazione che si ottiene moltiplicando la prima equazione del sistema per h e sommando adesso la seconda equazione moltiplicata per k ; assegna a questa equazione l'etichetta



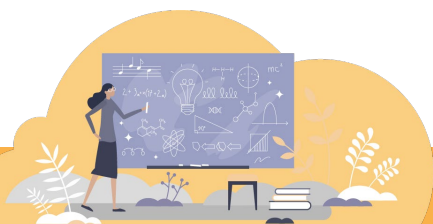
Usare registri rappresentativi diversi

t . A tal scopo devi scrivere:

$$t: h \cdot r + k \cdot s$$

Qual è l'equazione della retta che viene rappresentata? Che relazione c'è tra questa retta e il punto A ? Modifica i valori di h e k : che cosa puoi dire, in generale, della retta di equazione $h \cdot r + k \cdot s$? Si mantiene la relazione osservata tra la retta e il punto A ? Come si può interpretare graficamente il fatto che sostituendo una equazione del sistema originario con una combinazione lineare delle equazioni che formano il sistema stesso si ottiene un sistema equivalente?

- Poni $k = 1$ e muovi lo slider h : per quale valore di h la retta t è parallela all'asse x ? Qual è in questo caso la sua equazione? Poni $h = 1$ e muovi k : per quale valore di k la retta t è parallela all'asse y ? Qual è in questo caso la sua equazione? Le ultime due equazioni ottenute individuano la soluzione del sistema, che può dunque essere rappresentata come intersezione di due rette parallele agli assi.



Gli strumenti del laboratorio

275 **Attività con GeoGebra** Utilizzando il comando **Fattori primi** di GeoGebra stabilisci, mediante la scomposizione in fattori primi, se il numero 1008 è divisibile per i seguenti numeri: 56, 84, 108, 112, 672.

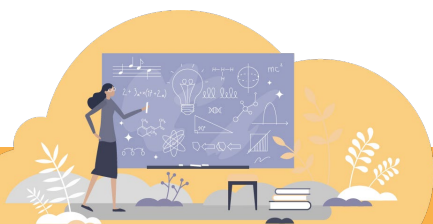
73 **Attività con GeoGebra** Nella Vista Algebra di GeoGebra è possibile eseguire la divisione tra due polinomi solo se contengono una sola variabile; inoltre la variabile deve essere denotata con il simbolo x . Esegui a mano la divisione tra i polinomi $A(x) = x^4 + 1$ e $B(x) = x + 1$, quindi controlla i risultati con GeoGebra procedendo come segue:

- apri un file di GeoGebra, nascondi la Vista Grafici e visualizza il Foglio di calcolo;
- dopo avere intestato le tre colonne A, B e C come in figura, inserisci in A2 il polinomio dividendo e in B2 il divisore (ricorda di premettere ai due polinomi il segno =). Nella cella C2 scrivi: `=Divisione(A2, B2)`.

▼ Foglio di calcolo			
	A	B	C
1	Dividendo	Divisore	Quoziente e resto
2	$x^4 + 1$	$x + 1$	$\{x^3 - x^2 + x - 1, 2\}$

Osserva il risultato: è una lista in cui compaiono il quoziente e il resto della divisione separati da una virgola.

- Appropriarsi operativamente di uno strumento di calcolo
- Individuare modalità di autocontrollo



La dimensione individuale dell'apprendimento

Occorre che le nostre allieve e i nostri allievi sappiano **riflettere sul proprio operato**, si pongano domande, si interrogino sulle loro scelte e sull'uso che fanno degli strumenti che hanno a disposizione.

È importante inoltre che **acquisiscano strumenti di autocontrollo e autovalutazione** del proprio lavoro.



La dimensione individuale dell'apprendimento

Tutte le discipline dell'area hanno come elemento fondamentale il laboratorio, inteso sia come luogo fisico (aula o altro spazio specificamente attrezzato) sia come momento in cui **l'alunno è attivo**, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, impara a raccogliere dati e a confrontarli con le ipotesi formulate, **negozia e costruisce significati interindividuali**, porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture la costruzione delle **conoscenze personali e collettive**.

Indicazioni nazionali 2007

- Lavori di gruppo
- Lezione dialogata
- Discussione, confronto



La dimensione individuale dell'apprendimento



292



Ragiona sul video

Paolo è nato 5 anni dopo Maria e fra tre anni l'età di Maria sarà il doppio di quella di Paolo. Che età hanno Paolo e Maria?



Ragiona sul video: risolvere un'equazione numerica intera a coefficienti frazionari

Condividi



Come si fa?

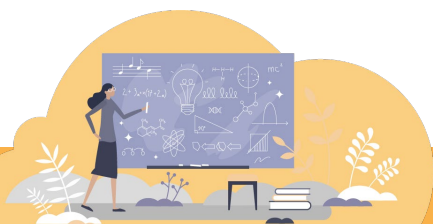
di Elia Bombardelli



00:02



02:19



INSEGNARE MATEMATICA



DEASCUOLA

La dimensione individuale dell'apprendimento

ESERCIZIO 1



Considera il testo del problema.

Paolo è nato 5 anni dopo Maria e fra 3 anni l'età di Maria sarà il doppio di quella di Paolo. Che età hanno Paolo e Maria?

ESERCIZIO 2



Sulla base delle informazioni date nel video e che sono riportate in figura, stabilisci se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa.

Paolo è nato 5 anni dopo Maria e fra 3 anni l'età di Maria sarà il doppio di quella di Paolo. Che età hanno Paolo e Maria?

Età di Paolo oggi: x anni, con $x \in \mathbb{N}$
Età di Maria oggi: $x + 5$ anni
Età di Paolo fra 3 anni: $x + 3$ anni
Età di Maria fra 3 anni: $x + 8$ anni

ESERCIZIO 3



$$x + 8 = 2x + 6 \iff x - 2x = 6 - 8$$

Considera il passaggio per il quale nel video si dice "... se a questo punto spostiamo tutti i termini in x a sinistra dell'uguale e tutti i numeri a destra dell'uguale...".

- a. Quale proprietà permette di passare dall'equazione $x + 8 = 2x + 6$ all'equazione equivalente $x - 2x = 6 - 8$?
- A ☐ La proprietà distributiva della moltiplicazione, che permette di moltiplicare il fattore **2** per il fattore $x + 3$.
 - B ☐ La proprietà commutativa dell'addizione, che permette di cambiare l'ordine agli addendi.
 - C ☐ Il secondo principio di equivalenza per le equazioni, che permette di spostare i termini **$2x$** e **8**.
 - D ☐ Il primo principio di equivalenza per le equazioni, che

« Rivedi

✓ Verifica

Prosegui »

