

la SCUOLA

17 marzo 2021



Difficoltà in matematica: un approccio inclusivo

Rosetta Zan



La matematica in
genere è considerata
una delle discipline
meno inclusive.

Perché?



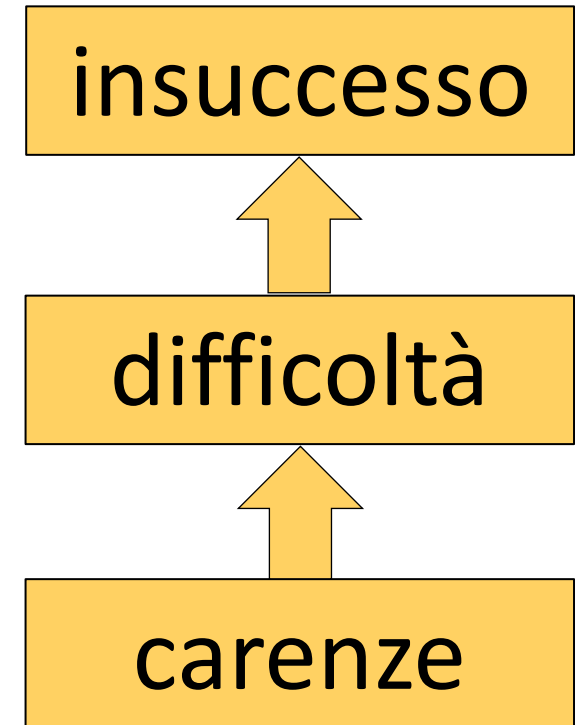
La matematica viene percepita come:

- astratta, lontana dalla realtà
- una materia in cui viene richiesto di risolvere problemi assurdi ed esercizi ripetitivi, di cui non si coglie il senso
- caratterizzata da un linguaggio (volutamente?) criptico
- da un modo di ragionare distante da quello della vita quotidiana
- una materia che non ammette errori

...una materia che esclude chi non ha certe 'capacità'

Quali 'capacità'?

- capacità logiche
- capacità d'astrazione
- intuizione
- velocità di pensiero
- ...



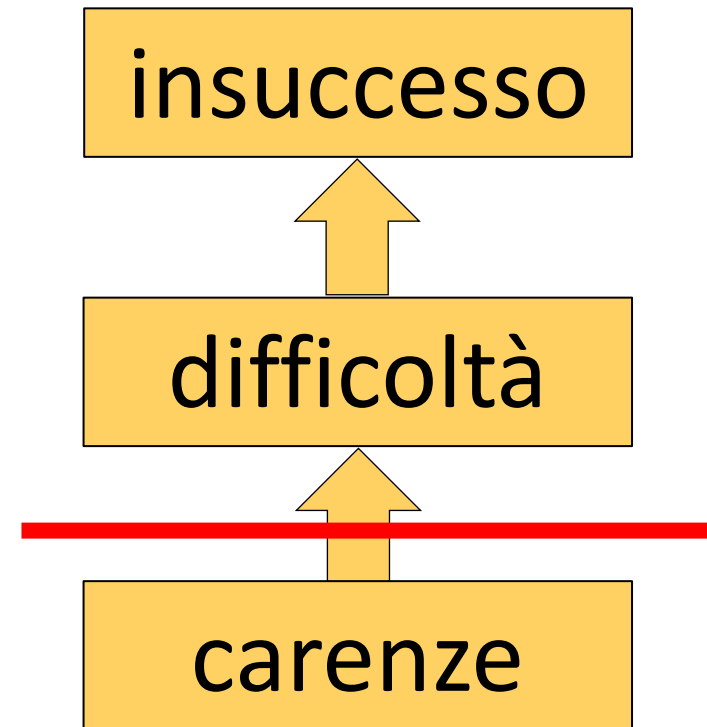
...una materia che esclude chi non ha certe 'capacità'

Come si interviene per essere inclusivi?

- In realtà c'è anche chi ritiene che la scuola secondaria di 2° grado non debba essere inclusiva
- e quindi che sia legittimo escludere chi non ha ancora acquisito certe 'capacità'

Ma:

- la scuola fino a una certa età è obbligatoria
- la matematica è una materia obbligatoria in tutto il percorso scolastico
- è interesse di tutti che ogni cittadino abbia una formazione matematica adeguata



Come si interviene per essere inclusivi?

- riducendo la complessità
- semplificando le richieste
- ...cercando di favorire la risposta corretta

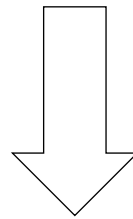


l'insuccesso è superato...
...ma le carenze rimangono



Come si interviene per essere inclusivi?

- riducendo la complessità
- semplificando le richieste
- ...cercando di favorire la risposta corretta



implicita in questi interventi c'è un'idea
di successo in matematica

SUCCESSO in matematica
identificato con
la produzione di risposte corrette

In realtà questa idea di successo:

- è epistemologicamente scorretta, cioè non rispetta la natura della matematica

SUCCESSO in matematica
identificato con
la produzione di risposte corrette

PRODOTTI

risposte giuste

PROCESSI

ragionamenti significativi

In matematica una risposta corretta non sostenuta da un ragionamento corretto non ha valore.

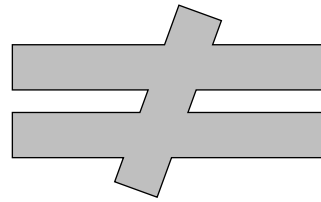
Un ragionamento può essere significativo anche se non si conclude con una risposta corretta.

PRODOTTI



**APPROCCIO
PROCEDURALE**

- regole
- esercizi ripetitivi
- ricordare
- eseguire
- ...



PROCESSI



**APPROCCIO
CONCETTUALE**

- 'fatti' matematici (teoremi, definizioni, assiomi, convenzioni...)
- problemi
- attivare processi
- ...

PROCESSI

ESPLORARE

CONGETTURARE

RAPPRESENTARE

DIMOSTRARE

ATTIVARE PROCESSI
DI CONTROLLO

...

STABILIRE
CONVENZIONI

DEFINIRE

LINGUAGGIO
MATEMATICO

ESPLORARE

CONGETTURARE

RAPPRESENTARE

DIMOSTRARE

ATTIVARE PROCESSI
DI CONTROLLO

PORSI / AFFRONTARE
PROBLEMI
RISOLVERE

...

STABILIRE
CONVENZIONI

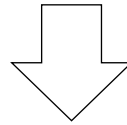
DEFINIRE

In realtà questa idea di successo:

- è epistemologicamente scorretta, cioè non rispetta la natura della matematica
- è poco inclusiva

SUCCESSO in matematica
identificato con
la produzione di risposte corrette

- I prodotti sono giusti o sbagliati...
...quindi non ci permettono di riconoscere i piccoli progressi
- D'altra parte se semplifichiamo la richiesta o diamo 'aiuti' per permettere 'prodotti giusti'...



non diamo sufficienti stimoli per crescere e apprendere
soprattutto agli allievi che ne hanno più bisogno

Come si interviene per essere inclusivi?

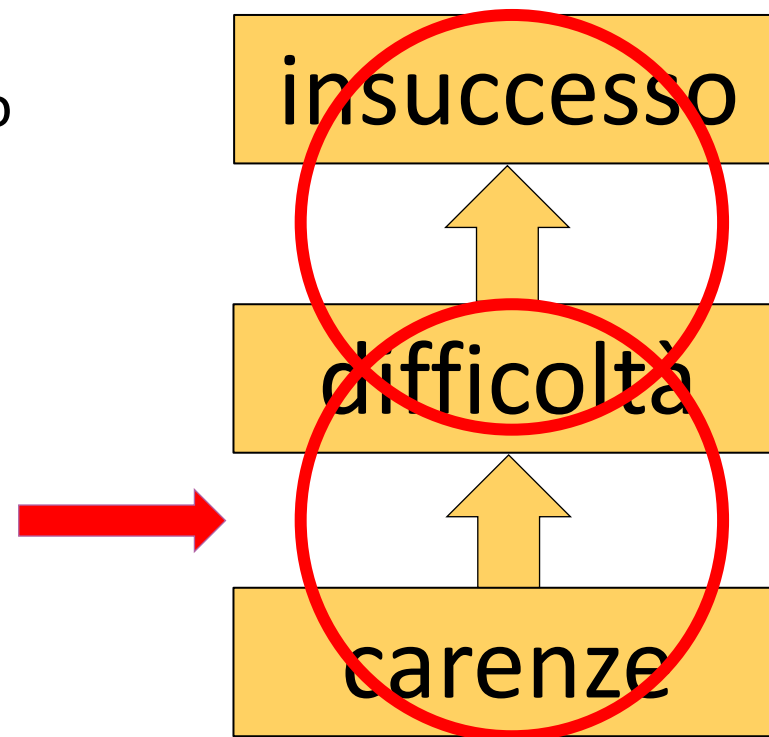
1. Si sceglie di ~~Non~~ essere inclusivi.

2. Si banalizzano le richieste per aumentare la probabilità di ottenere una risposta corretta.

3. ...c'è una terza via?

Un insegnante di matematica INCLUSIVO

- si rende conto delle difficoltà che ha un allievo
- cerca di capirne le cause
- attiva comportamenti di conseguenza



Un insegnante di matematica INCLUSIVO

- si rende conto delle difficoltà che ha un allievo

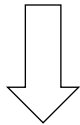
OSSERVAZIONE

- cerca di capirne le cause

INTERPRETAZIONE

- attiva comportamenti di conseguenza

INTERVENTO



un intervento che non si preoccupa di osservare gli allievi, di ipotizzare un'interpretazione – cioè una *diagnosi* - è poco inclusivo, e soprattutto è poco efficace...

...ma l'intervento dovrebbe essere coerente con la diagnosi fatta

OSSERVAZIONE**INTERPRETAZIONE****INTERVENTO**

Cosa succede nell'approccio
tradizionale alle difficoltà?

un intervento che non si preoccupa di osservare gli allievi, di ipotizzare
un'interpretazione – cioè una *diagnosi* - è poco inclusivo,
e soprattutto è poco efficace...

...ma l'intervento dovrebbe essere coerente con la diagnosi fatta

OSSERVAZIONE



- errori, e più in generale...
- assenza di risposte corrette



INTERPRETAZIONE



INTERVENTO



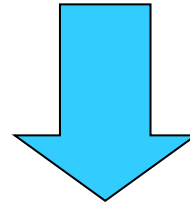
- Ripetizione degli argomenti in gioco

l'interpretazione

~~giusta / sbagliata~~

è un'ipotesi di lavoro

funziona / non funziona



è indispensabile per dirigere l'azione didattica

OSSERVAZIONE



- errori, e più in generale...
- assenza di risposte corrette

INTERPRETAZIONE



- Non si impegna abbastanza
- Ha lacune di base
- Ha un atteggiamento negativo
- Non ragiona
- Non sa studiare
- ...

INTERVENTO



- Ripetizione degli argomenti in gioco

OSSERVAZIONE



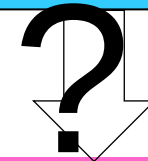
- errori, e più in generale...
- assenza di risposte corrette

INTERPRETAZIONE



- Non si impegna abbastanza
- Ha lacune di base
- Ha un atteggiamento negativo
- Non ragiona
- Non sa studiare
- ...

incoerente



INTERVENTO



- Ripetizione degli argomenti in gioco

D'altra parte, quali azioni didattiche suggeriscono queste interpretazioni?

INTERPRETAZIONE

?

INTERVENTO

- Non si impegna abbastanza
- Ha lacune di base
- Ha un atteggiamento negativo
- Non ragiona
- Non sa studiare
- ...

- Ripetizione degli argomenti in gioco

È l'interpretazione più frequente!

- Non si impegna abbastanza
- Ha lacune di base
- Ha un atteggiamento negativo
- Non ragiona
- Non sa studiare
- ...

Criticità

- Quali azioni suggerisce all'insegnante?
Cosa può fare se non aspettare che lo studente si impegni?
 - La diagnosi di scarso impegno non aiuta lo studente a capire quali comportamenti deve modificare
 - L'impegno se non è mirato non è risolutivo
- Non si impegna abbastanza
 - Ha lacune di base
 - Ha un atteggiamento negativo
 - Non ragiona
 - Non sa studiare
 - ...

L'attribuzione di fallimento all'impegno viene usata da alcuni studenti per sostenere l'autostima:

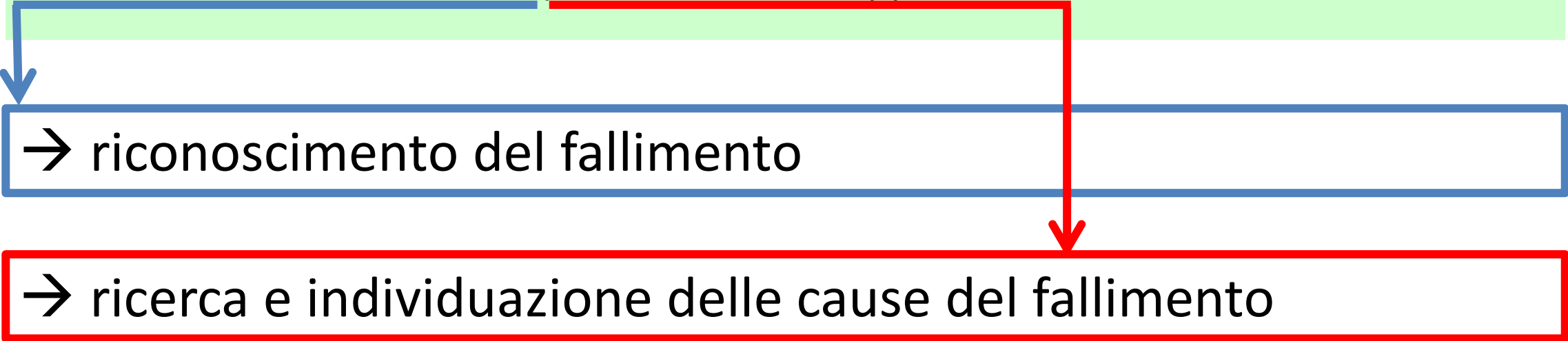
“Alle scuole medie non studiavo neppure più, pensavo che la situazione non cambiasse più di tanto, anzi ciò mi convinceva ancora di più di essere stupida. Invece non studiando, potevo almeno illudermi che forse non arrivavo a buoni risultati per mancanza di applicazione.” (Alessandra, 5^a secondaria di 2° grado)

...ma cosa succede quando poi lo studente decide di *impegnarsi*, convinto che in questo modo il successo sarà assicurato?

- All'inizio dell'università molti studenti decidono effettivamente di 'impegnarsi'
- Ma se lo studio e la fatica non sono diretti in modo adeguato (ad esempio se studiano matematica a memoria) questo impegno non darà alcun risultato
- A quel punto molti di loro si sentono completamente persi: crolla un mito durato tanti anni, e non sanno più cosa fare

Alessandra, 5^a secondaria di 2° grado

Alle scuole medie non studiavo neppure più, pensavo che la situazione non cambiasse più di tanto, anzi ciò mi convinceva ancora di più di essere stupida. Invece non studiando, potevo almeno illudermi che forse non arrivavo a buoni risultati per mancanza di applicazione.”

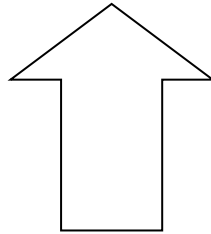


→ riconoscimento del fallimento

→ ricerca e individuazione delle cause del fallimento

Processo di attribuzione causale (Weiner):

- Locus: interno/esterno
- Stabilità: quanto è stabile
- Controllabilità: quanto è controllabile



→ ricerca e individuazione delle cause del fallimento

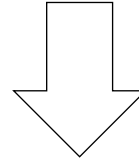
Processo di attribuzione causale (Weiner):

- Locus: interno/esterno
- Stabilità: quanto è stabile
- Controllabilità: quanto è controllabile

Ho preso l'insufficienza al compito

- Perché era difficile
- Perché non ho studiato abbastanza
- Perché la professoressa ce l'ha con me
- Perché non me l'hanno passato
- Perché mi sentivo male

se una persona percepisce come incontrollabile la causa di un
fallimento



riterrà inutile investire risorse per cercare di superarlo

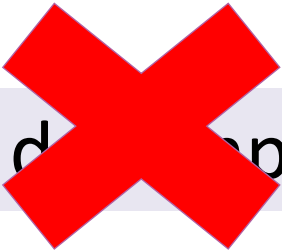
Questo vale per tutti:

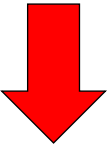
- per lo studente
- ma anche per l'insegnante

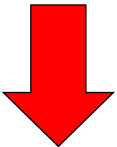
Criticità

- Quali azioni suggerisce all'insegnante?
Cosa può fare se non aspettare che lo studente si impegni?
- La diagnosi di scarso impegno non aiuta lo studente a capire quali comportamenti deve modificare
- L'impegno se non è mirato non è risolutivo
- Inoltre le cause possono essere molto diverse:
 - scarsa motivazione
 - scarsa determinazione
 - convinzione di non potercela fare
 - ...

- Non si impegna abbastanza
- Ha lacune di base
- Ha un atteggiamento negativo
- Non ragiona
- Non sa studiare
- ...

mito d  impegno


assunzione della responsabilità
dell'apprendimento


l'insegnante può fare molto per svilupparla

- Quali lacune di base?
- È necessario passare da una diagnosi vaga e globale ad una precisa e puntuale...

- Non si impegna abbastanza
- Ha lacune di base

• Ha un atteggiamento negativo

Sono io che forse quando ho visto che in matematica non riuscivo come volevo ho gettato la spugna e adesso che cerco di impegnarmi, mi rendo conto che ho perso delle basi di matematica importanti per andare avanti e lo rimpiango. (...)

A volte vorrei fermare il tempo e mettermi in pari su “basi”, ma ormai non si può tornare indietro. (Alessandro, 5^a secondaria di 2° grado)

- Quali lacune di base?
- È necessario passare da una diagnosi vaga e globale ad una precisa e puntuale...
- ...ma per far questo è necessaria una riflessione:
 - quali sono le conoscenze in uscita dal segmento di scuola precedente effettivamente previste dagli ordinamenti attuali?
 - quali di queste conoscenze sono effettivamente da considerarsi *di base*?

- Non si impegna abbastanza
- Ha lacune di base
- Ha un atteggiamento negativo
- Non ragiona
- Non sa studiare
- ...



Importanza del raccordo

“Quello studente ha un atteggiamento negativo verso la matematica”

...è una dichiarazione di resa,
e non un'interpretazione
che suggerisce un'azione
didattica

- Non si impegna abbastanza
- Ha lacune di base
- Ha un atteggiamento negativo
- Non ragiona
- Non sa studiare
- ...

“Le ho provate tutte senza successo, *perché* quello studente ha un atteggiamento negativo verso la matematica”

Azzurra

Trovare il perimetro di un rettangolo che ha la base di 12 cm e l'altezza di 8 cm.

Azzurra: 12×8

Ins.: 'Perché moltiplichi?'

Azzurra:

'Divido?'



Basso senso
di autoefficacia

Il tema autobiografico:
“Io e la matematica: il mio
rapporto con la matematica
(dalle elementari a oggi)”

Più di 1800 temi

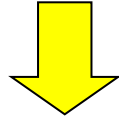
- anonimi
- assegnati non
dall'insegnante di
matematica

← Il tema di Azzurra

*“Alle elementari non ero una grossa cima in
matematica, quindi in 3^a elementare vidi che
non ero brava e chiusi così la mia testa,
dicendo che questa non faceva per me.”*

[Azzurra, 2° sec. di 1° grado]

Basso senso
di autoefficacia



La matematica
è incontrollabile



Rinuncia
a pensare



EMOZIONI

NON
RISPONDE

RISPONDE
A CASO

Alessandro

Visione distorta
della matematica

Trovare l'area di un rettangolo, sapendo che il perimetro è 126 cm, e l'altezza è $\frac{3}{4}$ della base.



...e non conclude

‘A questo punto non mi ricordo più la regola.’

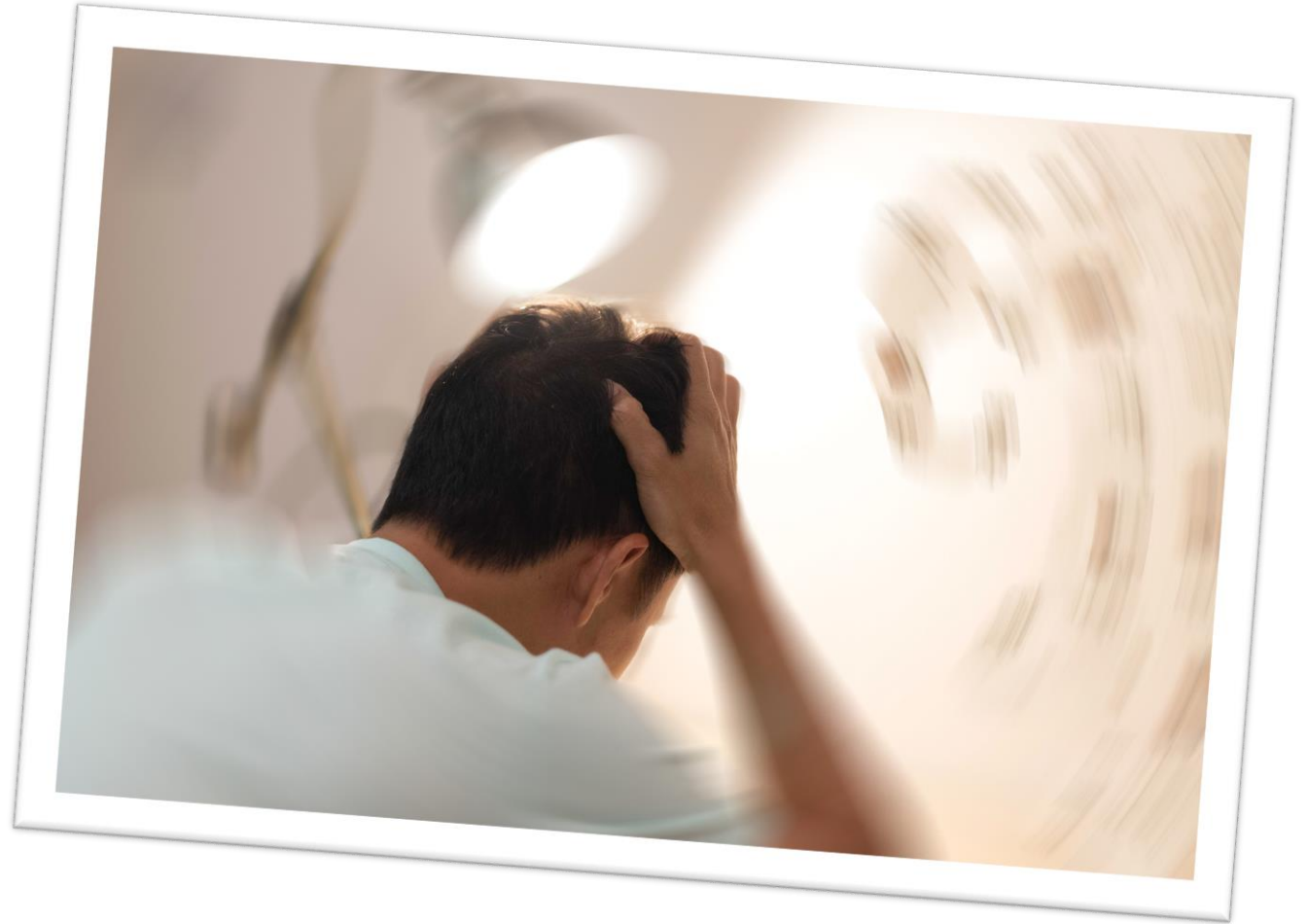
Nicola

$$-7x^2 < \sqrt{7}$$

$$x^2 > -\frac{\sqrt{7}}{7}$$

$$7x^2 + \sqrt{7} > 0$$

...e poi si blocca



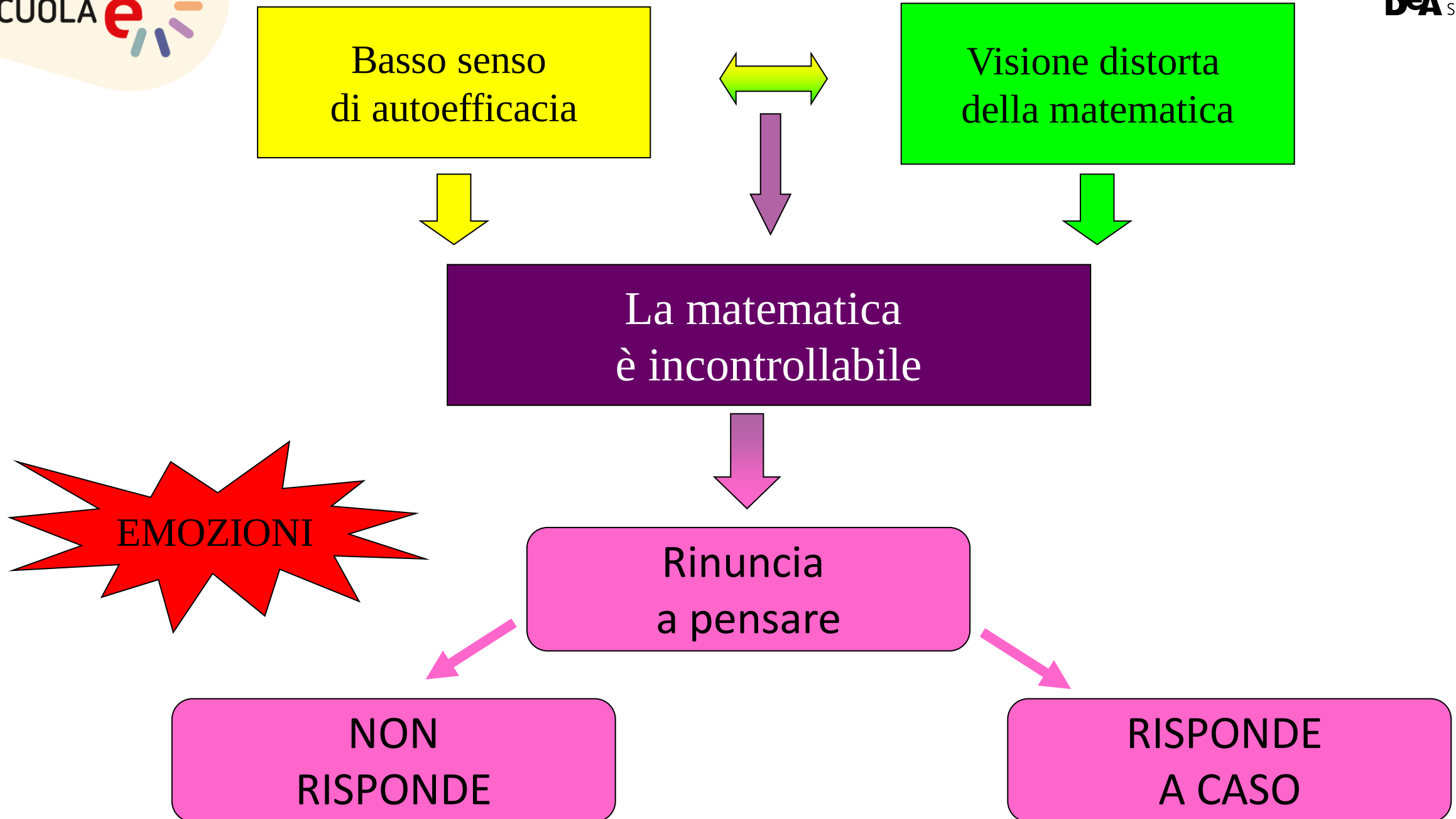
Nicola

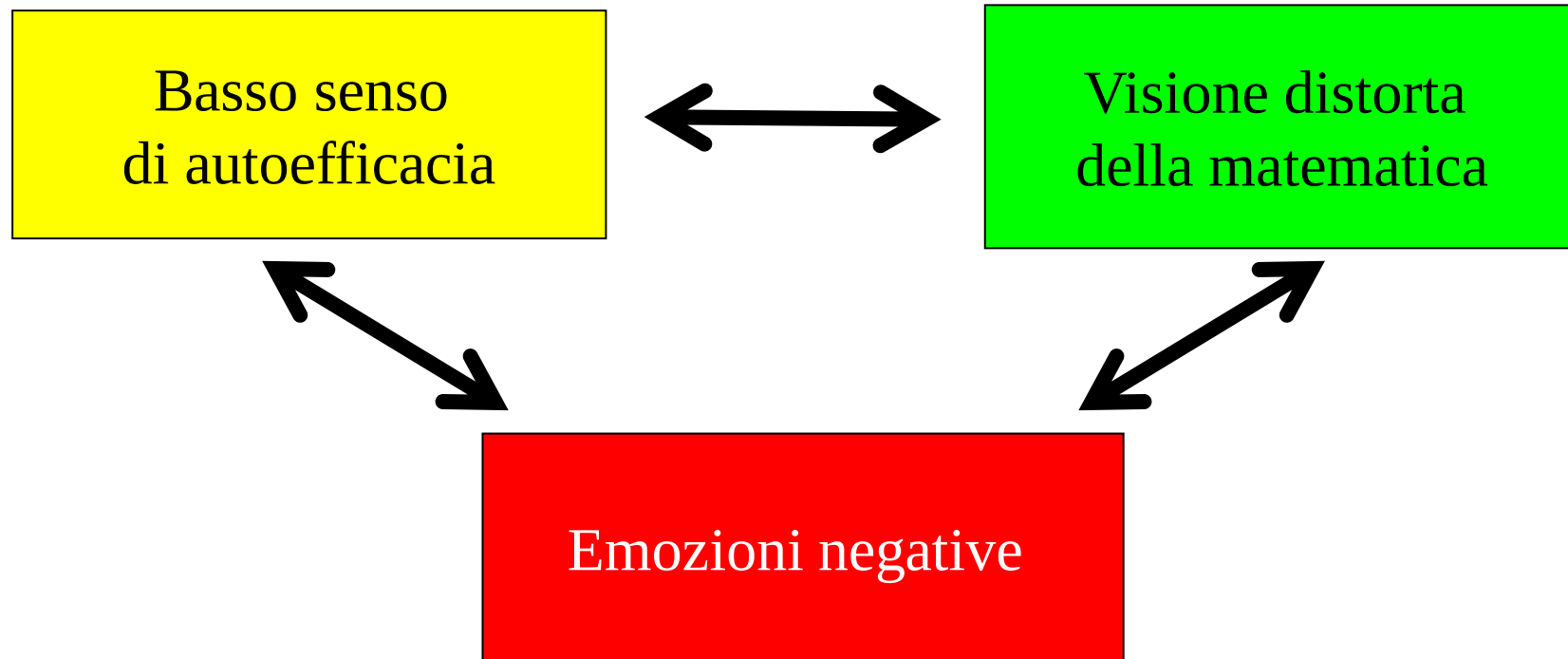
Visione distorta
della matematica

$$-7x^2 < \sqrt{7}$$

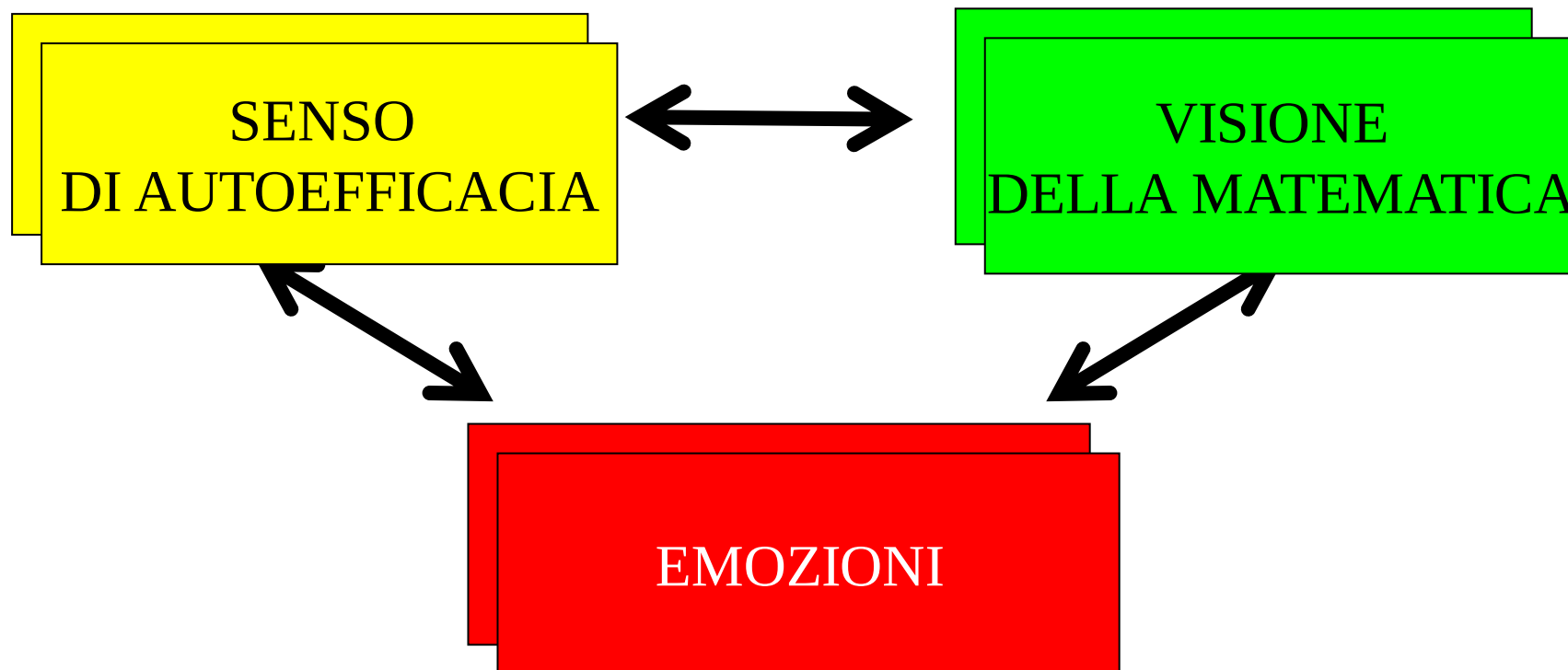
I.: *‘Perché invece di ricordarti cosa devi fare, non provi a risolverla da solo?’*

N.: *‘La matematica è fatta di regole ben precise che vanno seguite, non ci si può inventare nulla. I problemi si risolvono seguendo quelle regole e io, ora, non mi ricordo come si risolvono le disequazioni.’*



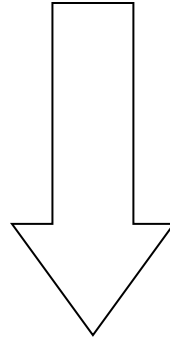


ATTEGGIAMENTO NEGATIVO VERSO LA MATEMATICA

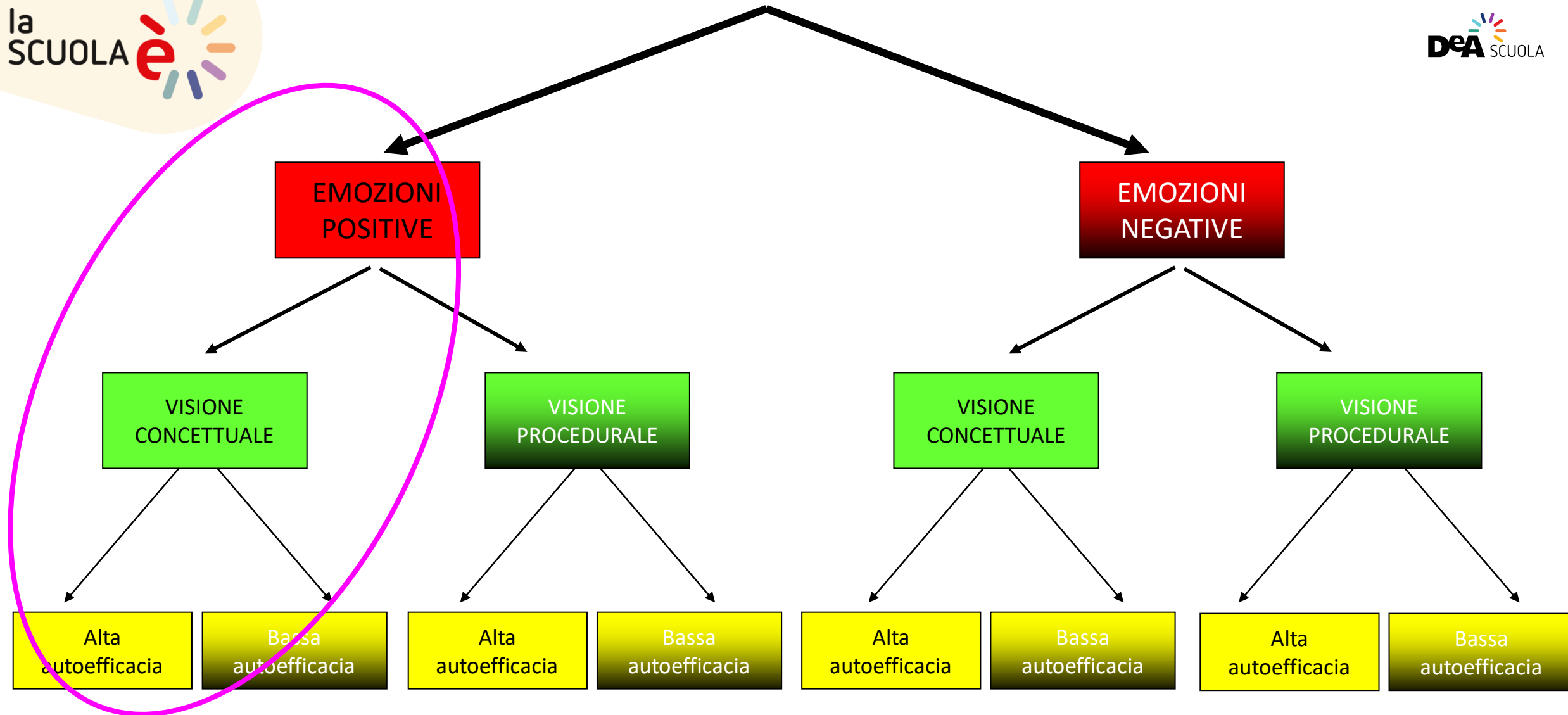


ATTEGGIAMENTO VERSO LA MATEMATICA

atteggiamento positivo / negativo

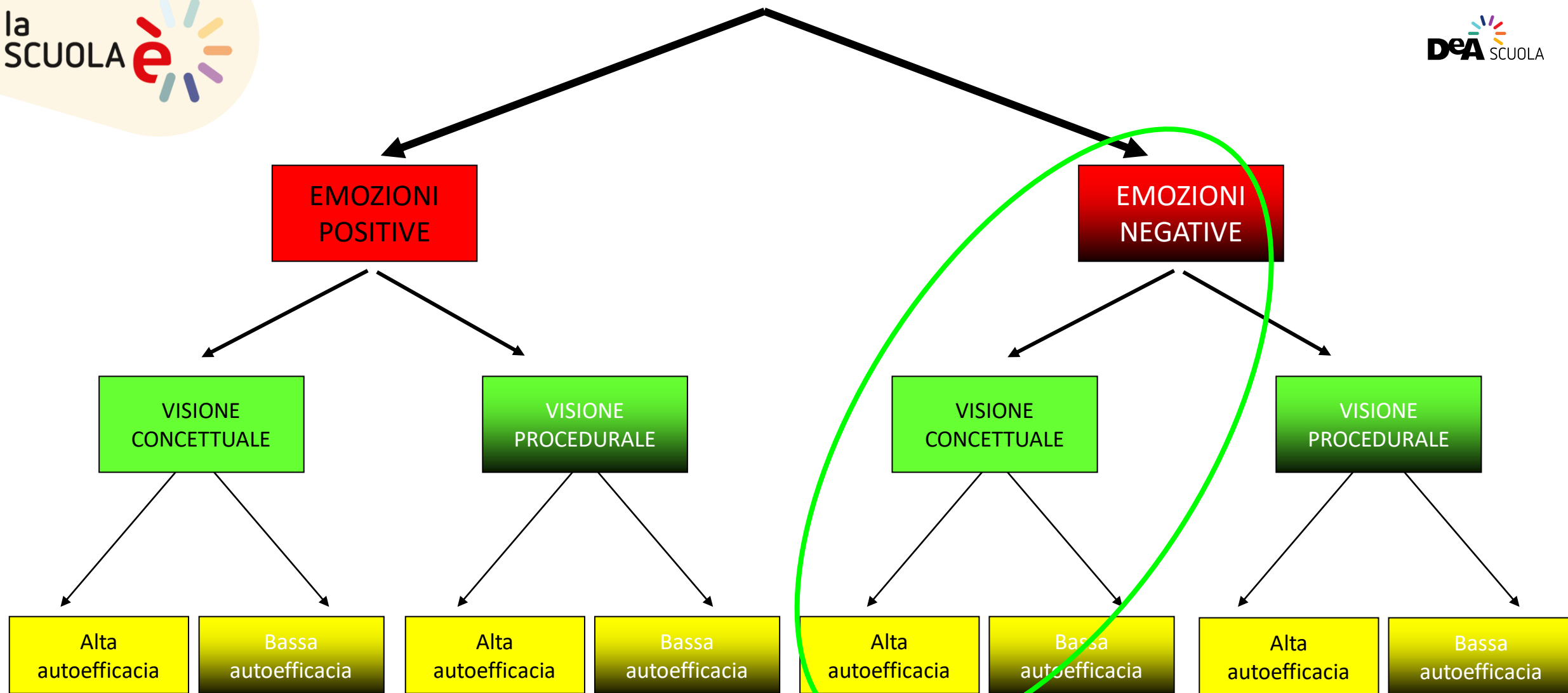


PROFILI di atteggiamento negativo



POSITIVO

GLI ALTRI 7...TUTTI NEGATIVI



Le emozioni negative sono conseguenza:

- di una visione distorta della matematica
- di uno scarso senso di autoefficacia

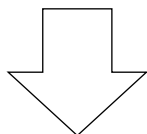
NESSUN TEMA SU 1800!

- Cioè non utilizza la razionalità matematica?
 - Cosa vuol dire per lui/lei 'ragionare'?
 - Ha lacune di base che gli impediscono di fare i ragionamenti adeguati?
 - Si rifiuta di ragionare?
 - O comunque rinuncia a ragionare?
(ad esempio risponde a caso?)
- Non si impegna abbastanza
 - Ha lacune di base
 - Ha un atteggiamento negativo
 - Non ragiona
 - Non sa studiare
 - ...

Sono le possibili cause che sono importanti, perché sono quelle che ci danno indicazioni per l'azione didattica.

Ad esempio:

- studia a memoria
- non si pone domande quando studia
- non si rende conto che per comprendere alcune cose bisogna conoscerne altre
- ...



più in generale...

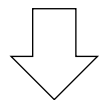
- Non si impegna abbastanza
- Ha lacune di base
- Ha un atteggiamento negativo
- Non ragiona
- Non sa studiare
- ...

Non rispetta le **caratteristiche della matematica**:

- L'organizzazione della matematica: assiomi, teoremi, definizioni,...
- La specificità del linguaggio matematico e sue funzioni
- La specificità della razionalità matematica
- L'approccio ai problemi

Non riguarda solo il metodo di studio:

- Come segue la lezione in classe
- Come affronta i compiti in classe
- ...



HA UN APPROCCIO INADEGUATO
ALLA MATEMATICA



- Non si impegna abbastanza
- Ha lacune di base
- Ha un atteggiamento negativo
- Non ragiona
- Non sa studiare
- ...

Non rispetta le **caratteristiche della matematica**:

- L'organizzazione della matematica: assiomi, teoremi, definizioni,...
- La specificità del linguaggio matematico e sue funzioni
- La specificità della razionalità matematica
- L'approccio ai problemi

Non riguarda solo il metodo di studio:

- Come segue la lezione in classe
- Come affronta i compiti in classe
- ...



HA UN APPROCCIO INADEGUATO
ALLA MATEMATICA

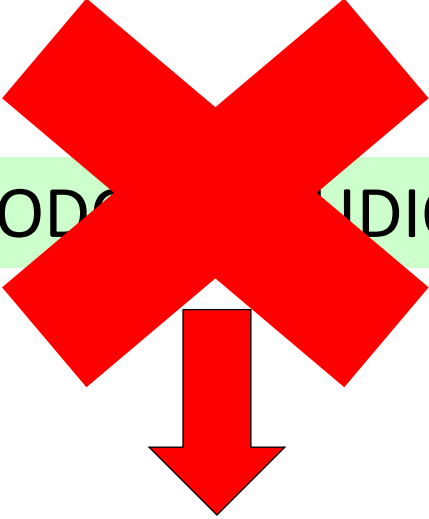


Possibili cause:

- non è consapevole di tali caratteristiche
- non sa come regolare i propri comportamenti in base a tali caratteristiche
- pensa di non essere in grado di farlo

Non rispetta le **caratteristiche della matematica**:

- L'organizzazione della matematica: assiomi, teoremi, definizioni,...
- La specificità del linguaggio matematico e sue funzioni
- La specificità della razionalità matematica
- L'approccio ai problemi



USA UN METODO DI STUDIO SBAGLIATO

HA UN APPROCCIO INADEGUATO
ALLA MATEMATICA

CONCLUSIONI



Necessità di una nuova articolazione delle diagnosi,
in modo da renderle più puntuali e produttive

Importanza:

- di una diagnosi puntuale
- del raccordo

INTERPRETAZIONE

ATTEGGIAMENTO
NEGATIVO

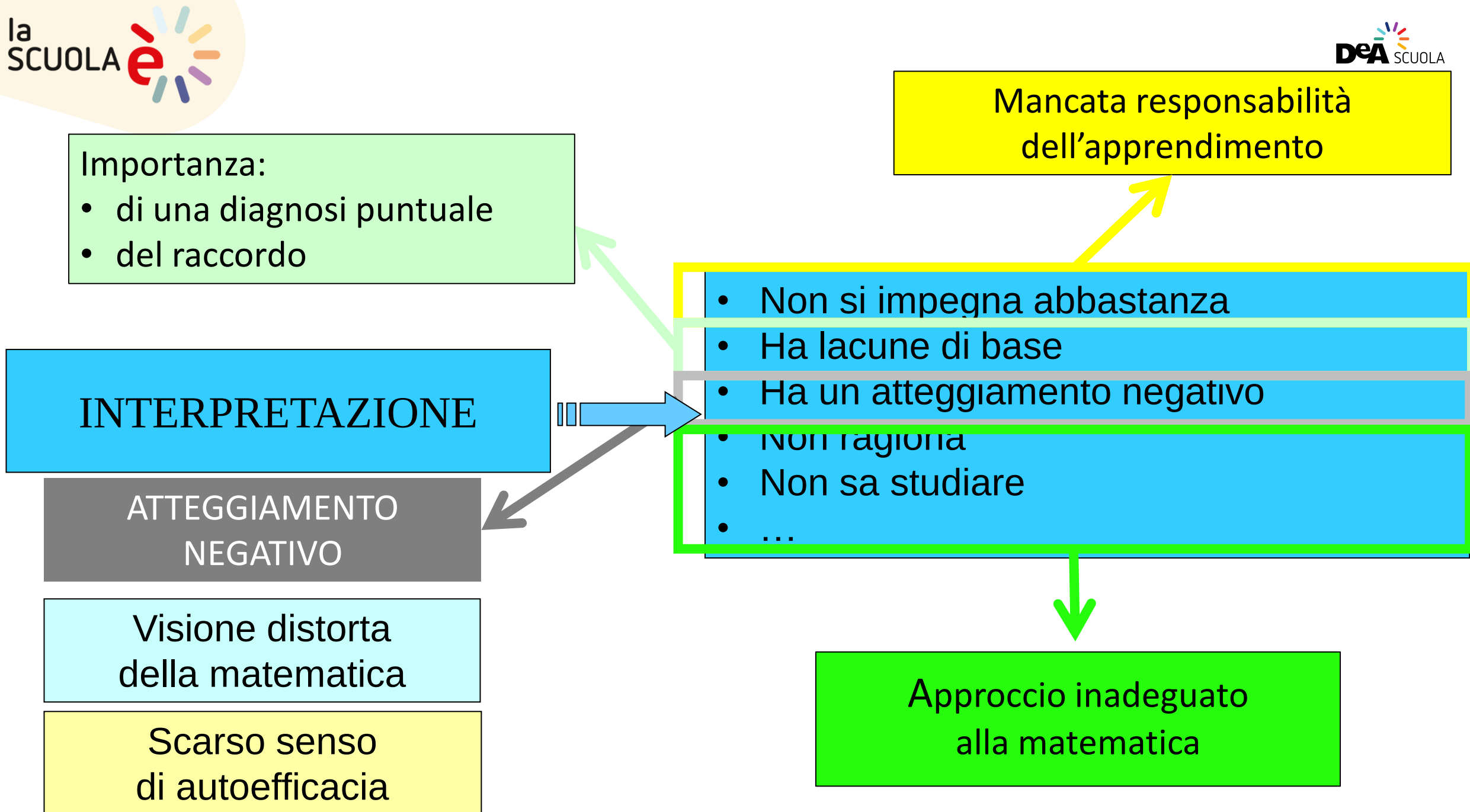
Visione distorta
della matematica

Scarso senso
di autoefficacia

- Non si impegna abbastanza
- Ha lacune di base
- Ha un atteggiamento negativo
- Non ragiona
- Non sa studiare
- ...

Mancata responsabilità
dell'apprendimento

Approccio inadeguato
alla matematica



ATTEGGIAMENTO
NEGATIVO

Visione distorta
della matematica

Scarso senso di auto-
efficacia

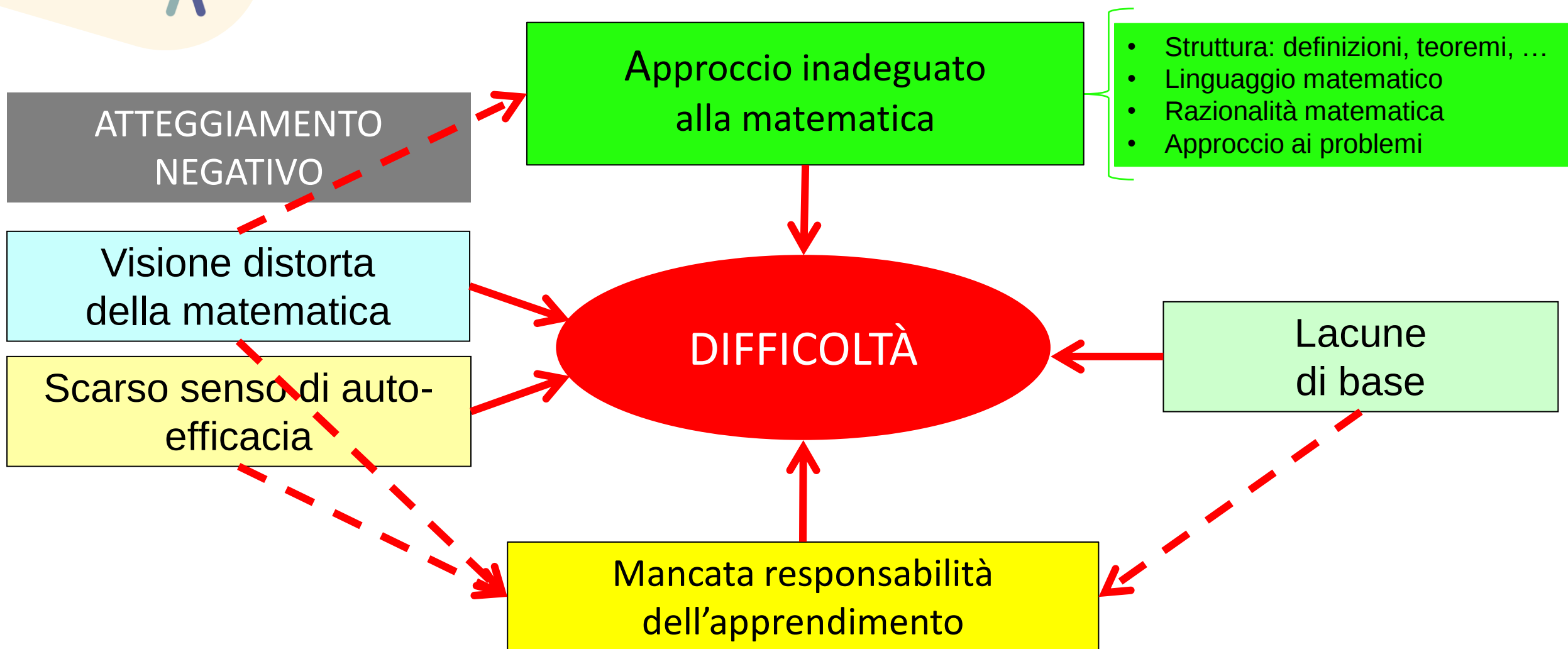
Approccio inadeguato
alla matematica

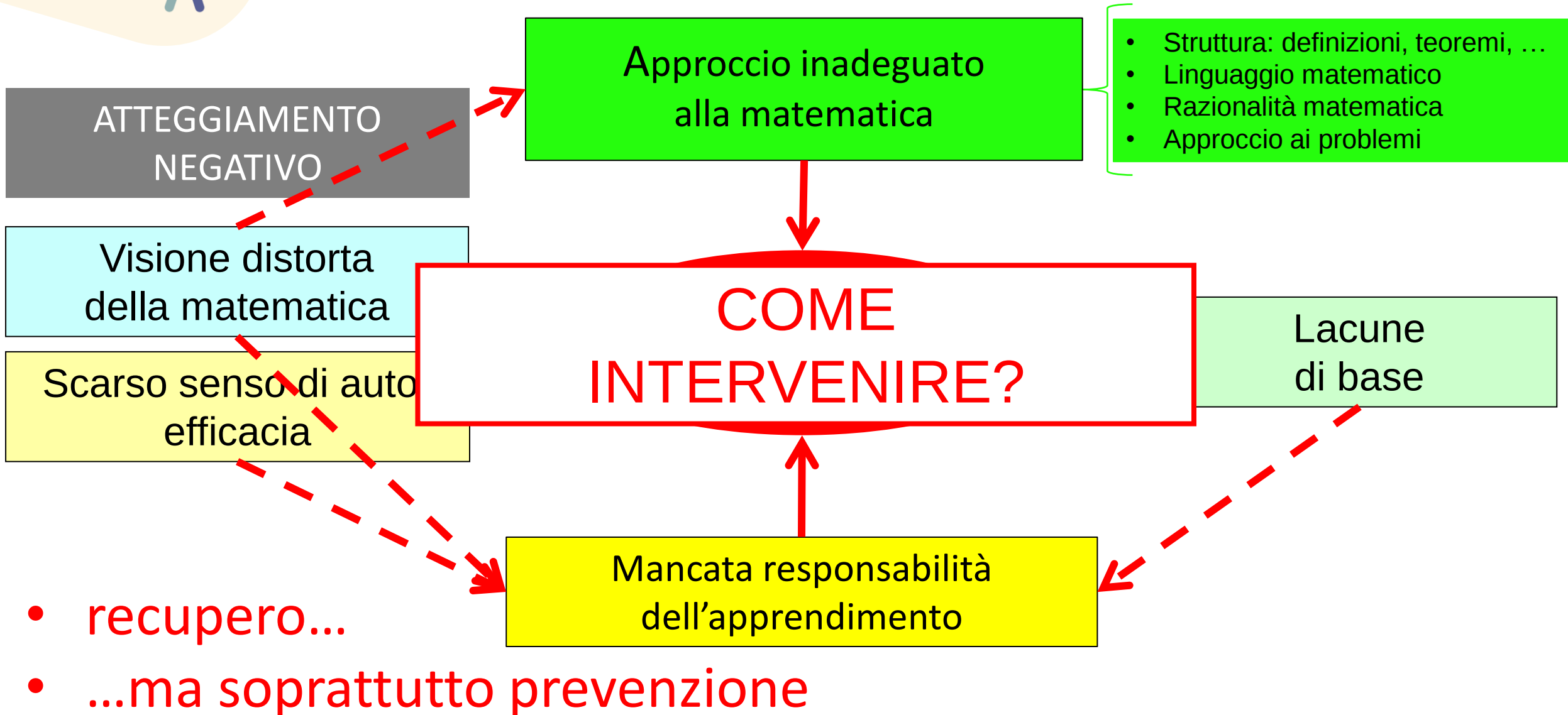
- Struttura: definizioni, teoremi, ...
- Linguaggio matematico
- Razionalità matematica
- Approccio ai problemi

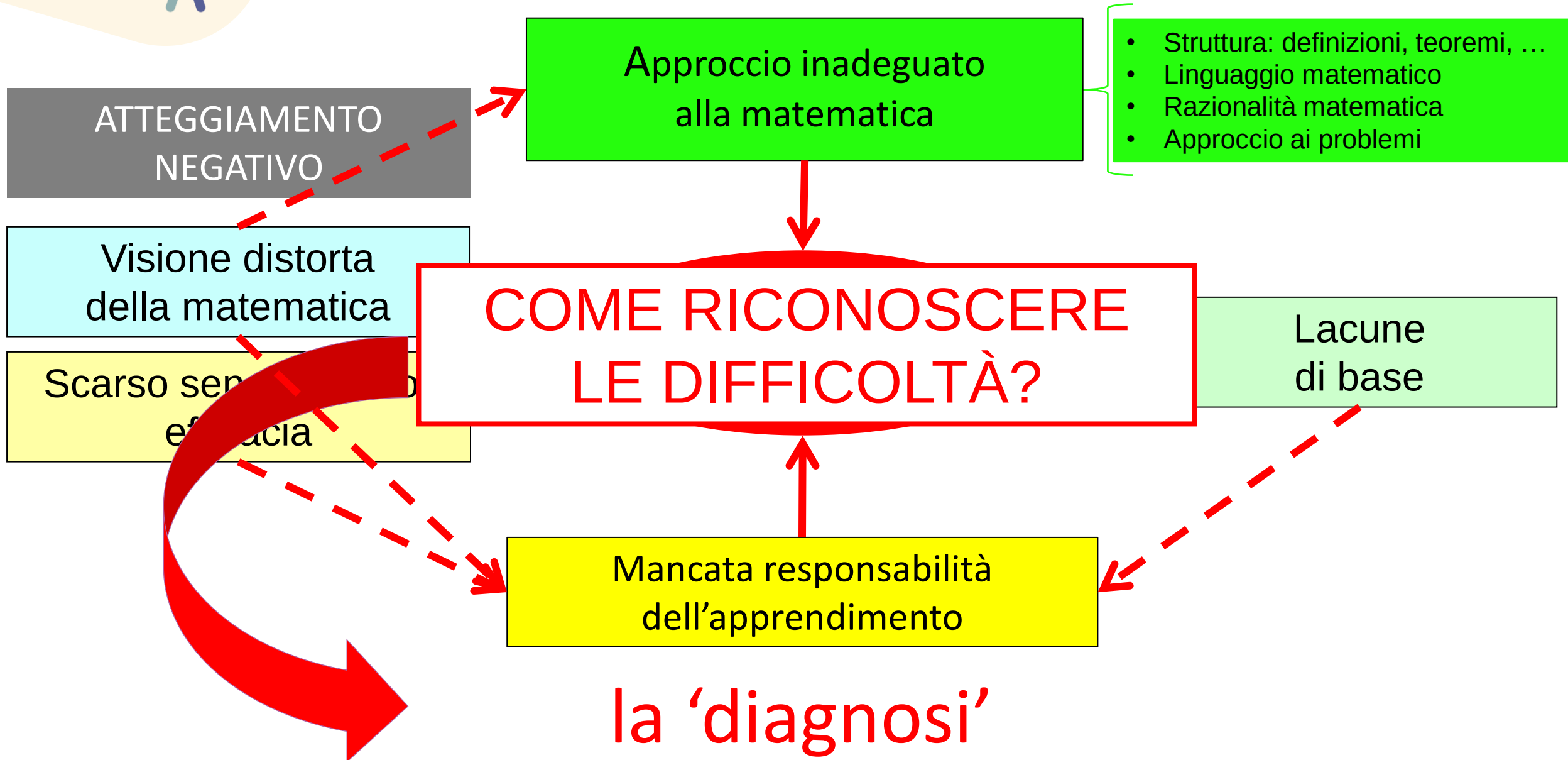
DIFFICOLTÀ

Lacune
di base

Mancata responsabilità
dell'apprendimento







Strategie, attività, materiali

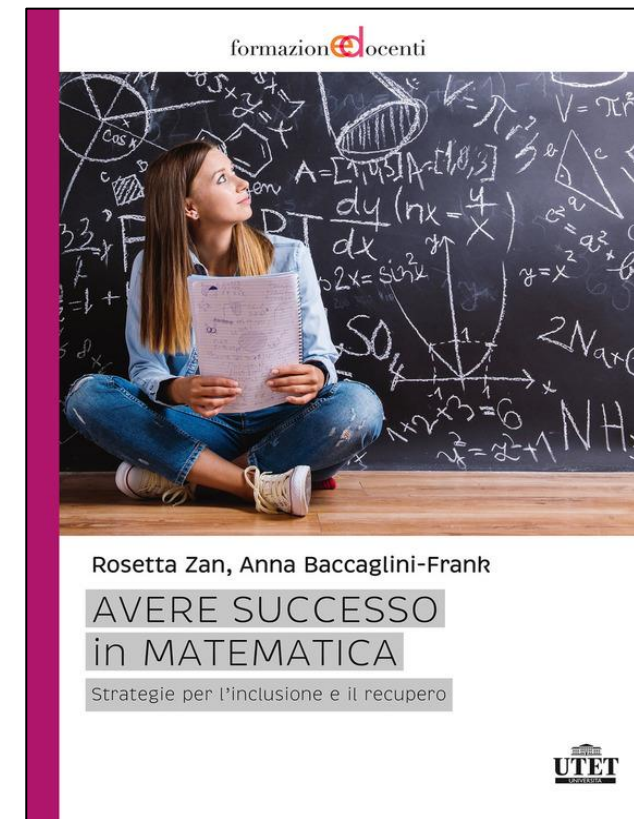
1. LA DIAGNOSI

2. L'INTERVENTO

- prevenzione
- recupero

Strategie, attività, materiali

AVERE SUCCESSO IN MATEMATICA.
Strategie per l'inclusione e il recupero.
UTET



1. LA DIAGNOSI

Proposta 1: Una batteria di problemi

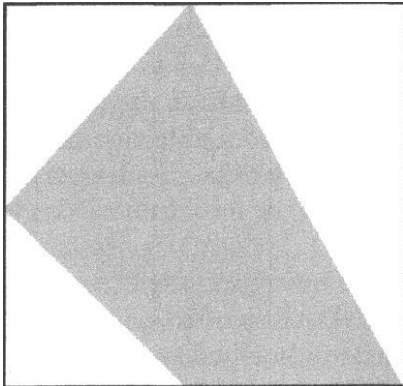
- Particolarmente utili per far emergere:
- la visione della matematica che ha lo studente
 - eventuali 'misconcetti'...
 - ...lacune di base

Batteria di problemi

Qui di seguito ci sono 4 problemi, che tu devi cercare di risolvere.
Cerca di scrivere tutti i ragionamenti che fai, tutti i tuoi pensieri, le difficoltà che incontri.

PROBLEMA 1

In un quadrato è stato disegnato un quadrilatero:



Secondo te è maggiore la superficie della parte bianca del disegno o quella grigia?

Motiva la risposta.

PROBLEMA 2

In un rettangolo il perimetro misura 112 cm e la base è $\frac{4}{3}$ dell'altezza.
Calcola l'area del rettangolo.

PROBLEMA 3

La nonna ha messo da parte 165€ per fare un regalo ai suoi nipoti Marco e Andrea.
Vuole suddividere il denaro in modo proporzionale alle età dei due nipoti: 12 anni (Marco) e 10 anni (Andrea).
Come li dovrà suddividere?

PROBLEMA 4

Risolvi la seguente disequazione:

$$-7x^2 < \sqrt{7}$$

Batteria di problemi

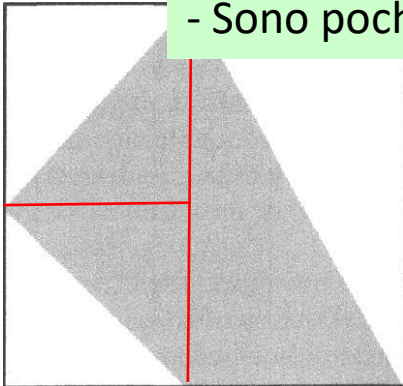
Qui di seguito ci sono 4 problemi, che tu devi cercare di risolvere.

Cerca Risposte frequenti:

- difficili
- A occhio mi sembrano uguali
 - A occhio mi sembrano diverse

PROBLEMA “Secondo me è maggiore la superficie della parte bianca perché non ho dei numeri con cui poter calcolare le due superfici, ma ho provato a unire mentalmente i tre triangoli bianchi e mi sembra che sia maggiore la superficie bianca messa a confronto con quella grigia.”

- Sono pochissimi quelli che fanno un ragionamento geometrico.



Secondo te è maggiore la superficie della parte bianca del disegno o quella grigia?

Motiva la risposta.

La maggior parte degli studenti risponde: “Non mi ricordo le formule”

PROBLEMA 2

In un rettangolo il perimetro misura 112 cm e la base è $\frac{4}{3}$ dell'altezza.
Calcola l'area del rettangolo.

Molti studenti sostengono di non poterlo svolgere perché non sanno quanto vale $\sqrt{7}$: “Non so come svolgerlo perché non mi sono mai state spiegate le radici quadrate anche se le disequazioni in sé riesco a farle.”

Anche qualcuno che risolve calcola $\sqrt{7}$.

Quando tentano di risolverla succede di tutto...

PROBLEMA 4

Risolvi la seguente disequazione:

$$-7x^2 < \sqrt{7}$$

Emergono molti misconcetti sulle disequazioni ma non solo!

$$\begin{aligned} -7x^2 &< \sqrt{7} \\ x^2 &< \frac{7}{2} + \frac{7}{1} ! \\ x^2 &< \frac{21}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -7x^2 &< \sqrt{7} \\ -7x^2 &< \sqrt{0} ! \\ ! & \\ \text{Impossibile!} & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -7x^2 &< \sqrt{7} \\ \frac{-7x^2}{7} &< \frac{\sqrt{7}}{7} \\ x^2 &> \sqrt{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -7x^2 &< \sqrt{7} \\ 7x^2 &> \sqrt{-7} \\ x^2 &> \frac{\sqrt{-7}}{7} ! \\ ! & \\ \text{Non!ho!mai!fatto!una!disequazione!così!} & \end{aligned}$$

PROBLEMA 4

Risolvi la seguente disequazione:

$$-7x^2 < \sqrt{7}$$

1. LA DIAGNOSI

Proposta 1: Una batteria di problemi (tutte le classi)

Proposta 2: Questionari per riconoscere / monitorare
l'atteggiamento verso la matematica (prime classi)

Questionario da proporre all'inizio della prima

RIFLESSIONI SULLA MATEMATICA PER AIUTARE IL TUO NUOVO INSEGNANTE A CONOSCERTI

- Quest'anno hai un nuovo insegnante di matematica. In che cosa vorresti che somigliasse agli insegnanti con cui hai lavorato in passato?
- In che cosa vorresti che fosse diverso ?
- Se ti chiedessero: "Com'è la matematica?" che cosa risponderesti?
- C'è qualcosa della matematica che ti piace in particolare?
- C'è qualcosa che non ti piace in particolare?
- In quali momenti, negli anni precedenti ti sei annoiata/o quando c'era matematica?
- In quali momenti invece ti sei divertita/o quando facevi matematica?
- E se ti chiedessero: "A che cosa serve la matematica?" che cosa risponderesti?

Oppure...

1. Scegli un aggettivo e un'emozione per descrivere il tuo rapporto con la matematica

AGGETTIVO:

EMOZIONE:

2. Perché hai scelto questo aggettivo e questa emozione?

3. Qual è stata la tua esperienza scolastica con la matematica?

4. Racconta un episodio particolarmente significativo che (nel bene o nel male) ha influito sul tuo rapporto con la matematica.

Oppure...

Fraasi da completare, ad esempio:

Secondo me la matematica a scuola si insegna perché...

La matematica mi piacerebbe di più (di meno) se...

L'insegnante mi piacerebbe di più (di meno) se...

Domande aperte proposte a conclusione di un argomento, ad esempio:

Cosa ti è piaciuto di più? Cosa di meno? Perché?

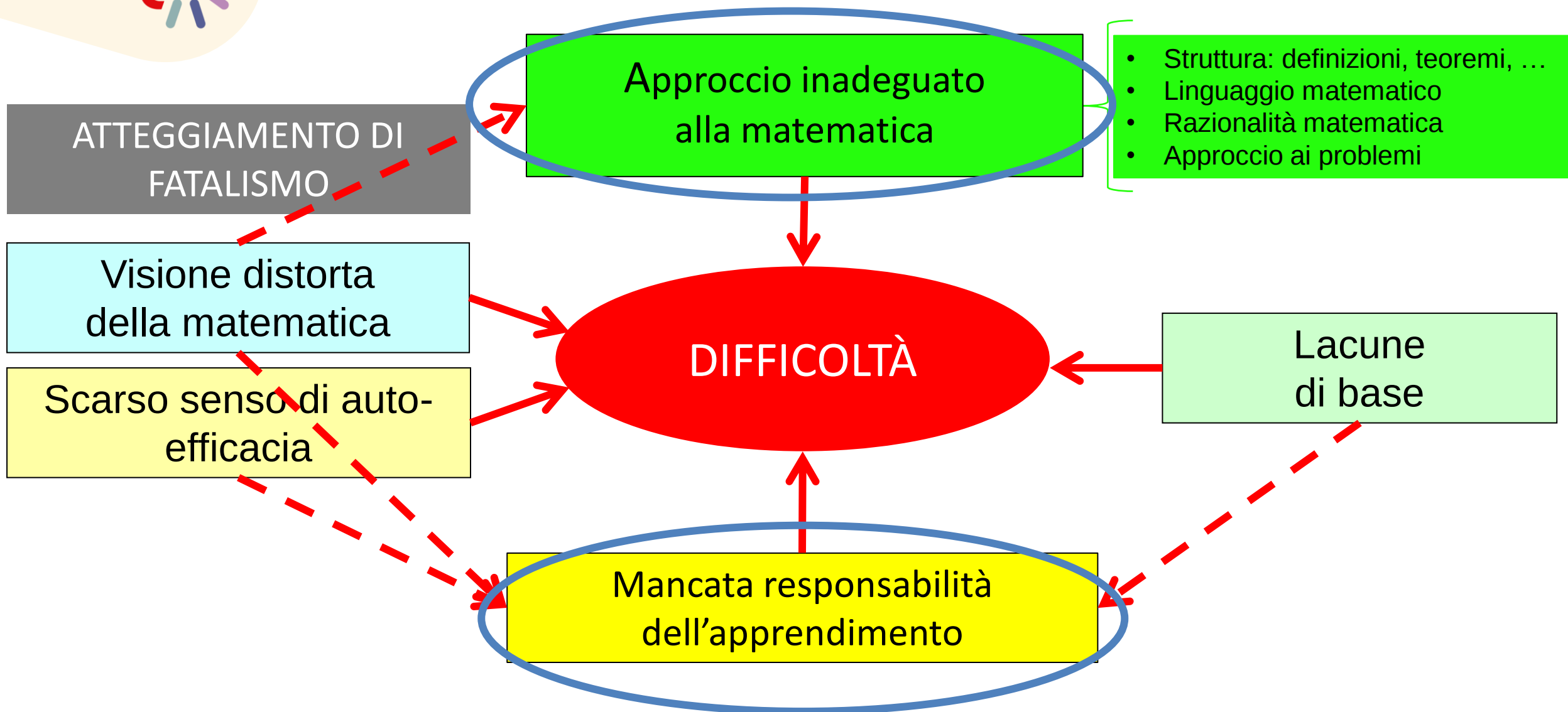
Cosa ti è risultato più facile? Cosa più difficile? Perché?

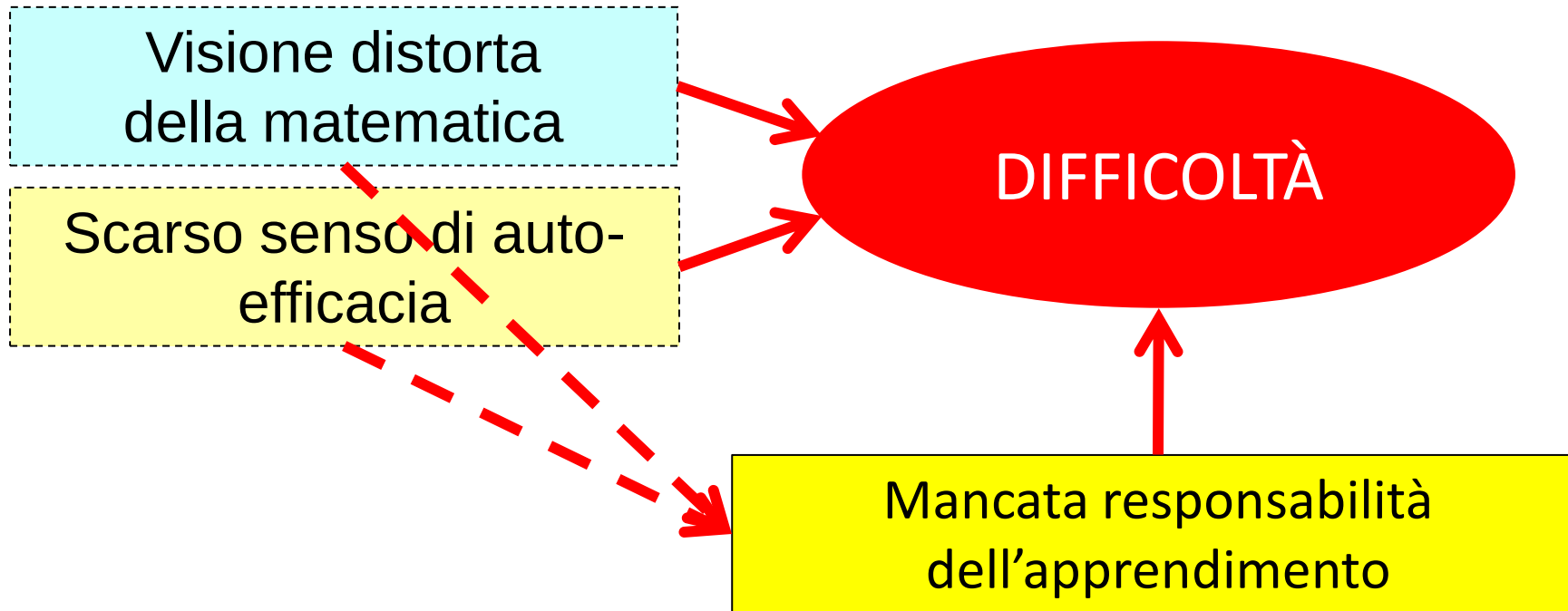
Strategie, attività, materiali

1. LA DIAGNOSI

2. L'INTERVENTO

- prevenzione
- recupero





2. L'INTERVENTO

Mancata responsabilità
dell'apprendimento

Ovvero:
Dal mito dell'impegno
alla responsabilità dell'apprendimento

Perché lo studente si assuma la responsabilità dell'apprendimento devono essere verificate alcune condizioni

Lo studente deve credere nella *necessità* di un cambiamento.

Lo studente deve credere nella *possibilità* di un cambiamento.

Lo studente deve investire le sue risorse *in modo mirato e continuo*.

Cosa può fare l'insegnante:

- in generale favorire il processo di *autovalutazione* da parte dello studente
- essere chiaro e trasparente nei criteri di valutazione utilizzati

Lo studente deve credere nella *necessità* di un cambiamento.

Lo studente deve credere nella *possibilità* di un cambiamento.

Lo studente deve investire le sue risorse *in modo mirato e continuo*.

2. L'INTERVENTO

Mancata responsabilità
dell'apprendimento



La scheda 'Facciamo il punto'

Uno strumento per l'autovalutazione

FACCIAMO IL PUNTO																																									
1. Come ti sembra di aver svolto il compito? ☐ non lo so ☐ molto male ☐ male ☐ così e così ☐ abbastanza bene ☐ bene Su cosa basi questa valutazione?																																									
2. Nella tabella che segue i numeri della prima colonna indicano il numero progressivo degli esercizi che erano nel compito. Per ogni esercizio rifletti se secondo te l'hai risolto correttamente, oppure pensi di aver fatto errori, oppure sapevi come farlo ma non sei riuscito a completarlo, oppure non hai proprio risposto, e metti quindi una crocetta nella colonna corrispondente. Inoltre nell'ultima colonna scrivi, per ogni esercizio cui non hai risposto 'L'ho risolto per intero correttamente', quali sono le tue difficoltà o dubbi. <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>L'ho risolto per intero correttamente</th> <th>Penso di aver fatto degli errori</th> <th>Sapevo come farlo ma l'ho risolto solo in parte</th> <th>Non ho risposto</th> <th>Le mie difficoltà e dubbi riguardano:</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>2</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>3</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>4</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>...</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>							L'ho risolto per intero correttamente	Penso di aver fatto degli errori	Sapevo come farlo ma l'ho risolto solo in parte	Non ho risposto	Le mie difficoltà e dubbi riguardano:	1						2						3						4						...					
	L'ho risolto per intero correttamente	Penso di aver fatto degli errori	Sapevo come farlo ma l'ho risolto solo in parte	Non ho risposto	Le mie difficoltà e dubbi riguardano:																																				
1																																									
2																																									
3																																									
4																																									
...																																									
3. Ordina gli esercizi in base alle difficoltà incontrate, a partire da quello in cui hai incontrato più difficoltà:																																									

- Questa scheda è una traccia da adattare a diverse situazioni.
- Va proposta allo studente alla fine di un compito, di una verifica, di un questionario articolati in una serie di esercizi.
- Nella prima colonna è riportato il numero progressivo dell'esercizio, e per ognuno si chiede allo studente di valutare i propri processi risolutivi.

Uno strumento per l'autovalutazione

FACCIAMO IL PUNTO					
1. Come ti sembra di aver svolto il compito?					
☐ non lo so ☐ molto male ☐ male ☐ così e così ☐ abbastanza bene ☐ bene					
Su cosa basi questa valutazione?					
2. Nella tabella che segue i numeri della prima colonna indicano il numero progressivo degli esercizi che erano nel compito. Per ogni esercizio rifletti se secondo te l'hai risolto correttamente, oppure pensi di aver fatto errori, oppure sapevi come farlo ma non sei riuscito a completarlo, oppure non hai proprio risposto, e metti quindi una crocetta nella colonna corrispondente. Inoltre nell'ultima colonna scrivi, per ogni esercizio cui non hai risposto 'L'ho risolto per intero correttamente', quali sono le tue difficoltà o dubbi.					
	L'ho risolto per intero correttamente	Penso di aver fatto degli errori	Sapevo come farlo ma l'ho risolto solo in parte	Non ho risposto	Le mie difficoltà e dubbi riguardano:
1					
2					
3					
4					
...					
3. Ordina gli esercizi in base alle difficoltà incontrate, a partire da quello in cui hai incontrato più difficoltà:					

Alcuni docenti che hanno sperimentato la scheda hanno preferito proporre delle opzioni fra cui scegliere, ad esempio:

- ☐ comprensione del testo dell'esercizio
- ☐ conoscenza della teoria
- ☐ calcolo
- ☐ tempo a disposizione
- ...

Uno strumento per l'autovalutazione

FACCIAMO IL PUNTO

1. Come ti sembra di aver svolto il compito?

☐ non lo so ☐ molto male ☐ male ☐ così e così ☐ abbastanza bene ☐ bene

Su cosa basi questa valutazione?

2. Nella tabella che segue i numeri della prima colonna indicano il numero progressivo degli esercizi che erano nel compito. Per ogni esercizio rifletti se secondo te l'hai risolto correttamente, oppure pensi di aver fatto errori, oppure sapevi come farlo ma non sei riuscito a completarlo, oppure non hai proprio risposto, e metti quindi una crocetta nella colonna corrispondente.

Inoltre nell'ultima colonna scrivi, per ogni esercizio cui non hai risposto 'L'ho risolto per intero correttamente', quali sono le tue difficoltà o dubbi.

	L'ho risolto per intero correttamente	Penso di aver fatto degli errori	Sapevo come farlo ma l'ho risolto solo in parte	Non ho risposto	Le mie difficoltà e dubbi riguardano:
1					
2					
3					
4					
...					

3. Ordina gli esercizi in base alle difficoltà incontrate, a partire da quello in cui hai incontrato più difficoltà:

Qual è il valore aggiunto?

Cosa invece si perde?

- ☐ comprensione del testo dell'esercizio
- ☐ conoscenza della teoria
- ☐ calcolo
- ☐ tempo a disposizione
- ...

Uno strumento per l'autovalutazione

FACCIAMO IL PUNTO					
1. Come ti sembra di aver svolto il compito?					
☐ non lo so ☐ molto male ☐ male ☐ così e così ☐ abbastanza bene ☐ bene					
Su cosa basi questa valutazione?					
2. Nella tabella che segue i numeri della prima colonna indicano il numero progressivo degli esercizi che erano nel compito. Per ogni esercizio rifletti se secondo te l'hai risolto correttamente, oppure pensi di aver fatto errori, oppure sapevi come farlo ma non sei riuscito a completarlo, oppure non hai proprio risposto, e metti quindi una crocetta nella colonna corrispondente. Inoltre nell'ultima colonna scrivi, per ogni esercizio cui non hai risposto 'L'ho risolto per intero correttamente', quali sono le tue difficoltà o dubbi.					
	L'ho risolto per intero correttamente	Penso di aver fatto degli errori	Sapevo come farlo ma l'ho risolto solo in parte	Non ho risposto	Le mie difficoltà e dubbi riguardano:
1					
2					
3					
4					
...					
3. Ordina gli esercizi in base alle difficoltà incontrate, a partire da quello in cui hai incontrato più difficoltà:					

La scheda viene restituita alla riconsegna del compito.

L'attività si può completare chiedendo:

4. A questo punto dovresti essere in grado di valutare quali argomenti di questa verifica:

a) sei stato in grado di affrontare senza difficoltà (elenca):

b) richiedono da parte tua uno studio più approfondito (elenca):

Cosa può fare l'insegnante:

- fissare obiettivi realistici per il recupero ed esplicitarli
- essere incoraggiante

Lo studente deve credere nella *necessità* di un cambiamento.

Lo studente deve credere nella *possibilità* di un cambiamento.

Lo studente deve investire le sue risorse *in modo mirato e continuo*.

Cosa può fare l'insegnante:

- dare valore al lavoro fatto

Lo studente deve credere nella *necessità* di un cambiamento.

Lo studente deve credere nella *possibilità* di un cambiamento.

Lo studente deve investire le sue risorse *in modo mirato e continuo*.

2. L'INTERVENTO

Mancata responsabilità
dell'apprendimento



La scheda 'Facciamo il punto'

Il contratto didattico

Il 'contratto didattico'

[PROGETTO START, 1994]

- È un 'contratto' fra il singolo docente e il singolo allievo...
- ...in cui ognuno dei due si impegna a mettere in atto certi comportamenti
- Ad ogni 'impegno' dell'allievo corrisponde un 'impegno' simmetrico da parte dell'insegnante

Dal _____ al _____ farò tutti i compiti assegnati impegnandomi a mostrare tentativi di risoluzione anche se errati.

Dal _____ al _____ mi impegno a correggerti individualmente tutti gli esercizi/compiti assegnati.

Dal _____ al _____ al termine di ogni lezione consegnerò all'insegnante un foglio in cui descrivo sinteticamente cosa è stato fatto a lezione.

Dal _____ al _____ mi impegno a leggere le tue note sulla tua descrizione della lezione e a dedicare nella lezione successiva alcuni minuti per spiegarti quello che non hai capito.

Una settimana prima del prossimo compito in classe preparerò un compito sull'argomento indicato dall'insegnante, lo svolgerò e lo consegnerò all'insegnante.

Almeno una settimana prima del compito mi impegno a comunicarti quale sarà l'argomento del compito. Mi impegno a correggere il compito che tu hai preparato e svolto prima del compito in classe.

Dal _____ al _____ seguirò attentamente le interrogazioni dei compagni, segnando per iscritto le domande fatte. A casa risponderò per iscritto a n. _____ domande e le consegnerò all'insegnante la lezione successiva.

Mi impegno, quando ti interrogo, a farti almeno una delle domande su cui hai lavorato appuntandoti le interrogazioni dei compagni.

Il 'contratto didattico'

[PROGETTO START, 1994]

- È un 'contratto' fra il singolo docente e il singolo allievo...
- ...in cui ognuno dei due si impegna a mettere in atto certi comportamenti
- Ad ogni 'impegno' dell'allievo corrisponde un 'impegno' simmetrico da parte dell'insegnante

I comportamenti richiesti sono chiari e circoscritti a un periodo di tempo



si toglie allo studente ogni possibile alibi per non metterli in atto

Dal _____ al _____ farò tutti i compiti assegnati impegnandomi a mostrare tentativi di risoluzione anche se errati.

Dal _____ al _____ al termine di ogni lezione consegnerò all'insegnante un foglio in cui descrivo sinteticamente cosa è stato fatto a lezione.

Una settimana prima del prossimo compito in classe preparerò un compito sull'argomento indicato dall'insegnante, lo svolgerò e lo consegnerò all'insegnante.

Dal _____ al _____ seguirò attentamente le interrogazioni dei compagni, segnando per iscritto le domande fatte. A casa risponderò per iscritto a n. _____ domande e le consegnerò all'insegnante la lezione successiva.



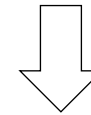
Dal _____ al _____ farò tutti i compiti assegnati impegnandomi a mostrare tentativi di risoluzione anche se errati.

Dal _____ al _____ al termine di ogni lezione consegnerò all'insegnante un foglio in cui descrivo sinteticamente cosa è stato fatto a lezione.

Una settimana prima del prossimo compito in classe preparerò un compito sull'argomento indicato dall'insegnante, lo svolgerò e lo consegnerò all'insegnante.

Dal _____ al _____ seguirò attentamente le interrogazioni dei compagni, segnando per iscritto le domande fatte. A casa risponderò per iscritto a n. _____ domande e le consegnerò all'insegnante la lezione successiva.

Questi comportamenti
producono dei risultati visibili



- Danno il senso del lavoro fatto
- Diminuiscono la percezione di incontrollabilità
- Motivano a continuare sulla stessa strada
- Aiutano a dirigere l'impegno successivo

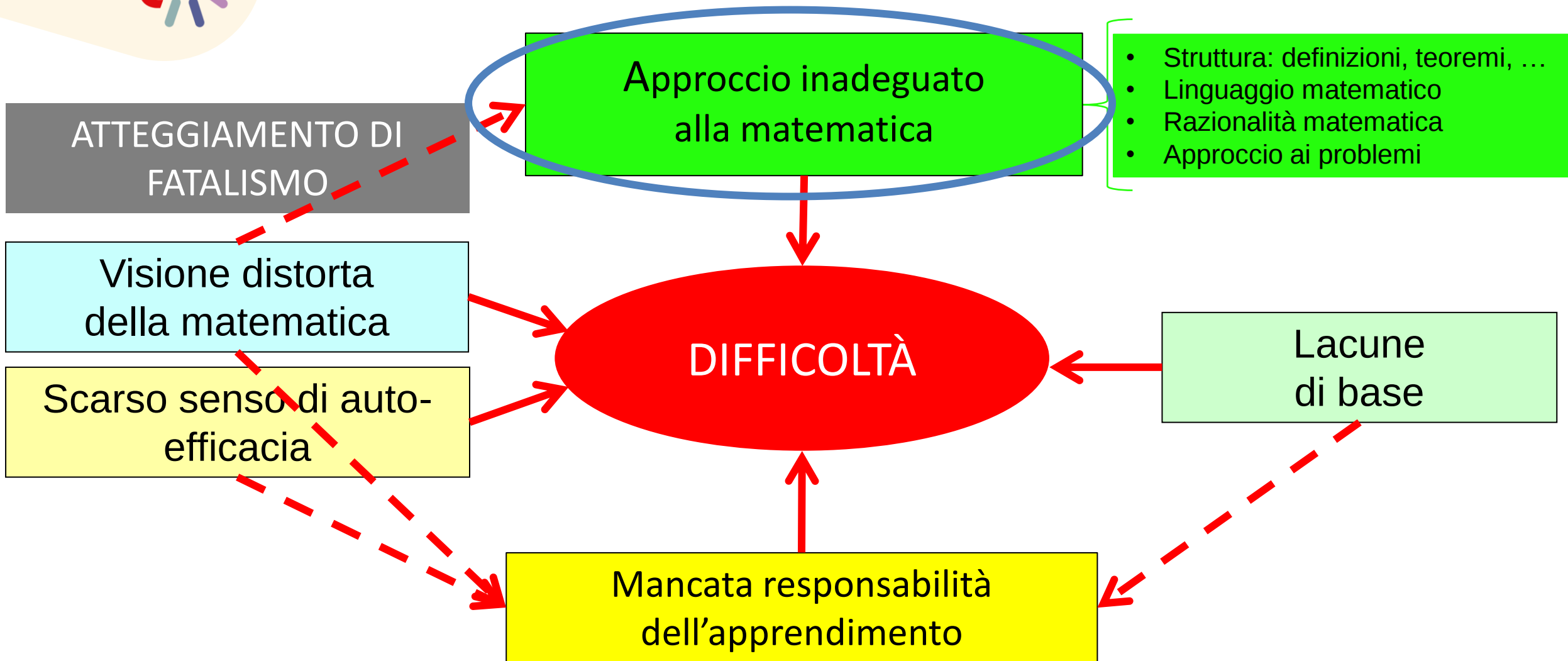
Riassumendo: cosa può fare l'insegnante

- in generale favorire il processo di *autovalutazione* da parte dello studente
- essere chiaro e trasparente nei criteri di valutazione utilizzati
- fissare obiettivi realistici per il recupero ed esplicitarli
- dare il senso del lavoro fatto

Lo studente deve credere nella *necessità* di un cambiamento.

Lo studente deve credere nella *possibilità* di un cambiamento.

Lo studente deve investire le sue risorse *in modo mirato e continuo*.



2. L'INTERVENTO

Mancata responsabilità
dell'apprendimento



La scheda 'Facciamo il punto'

Il contratto didattico

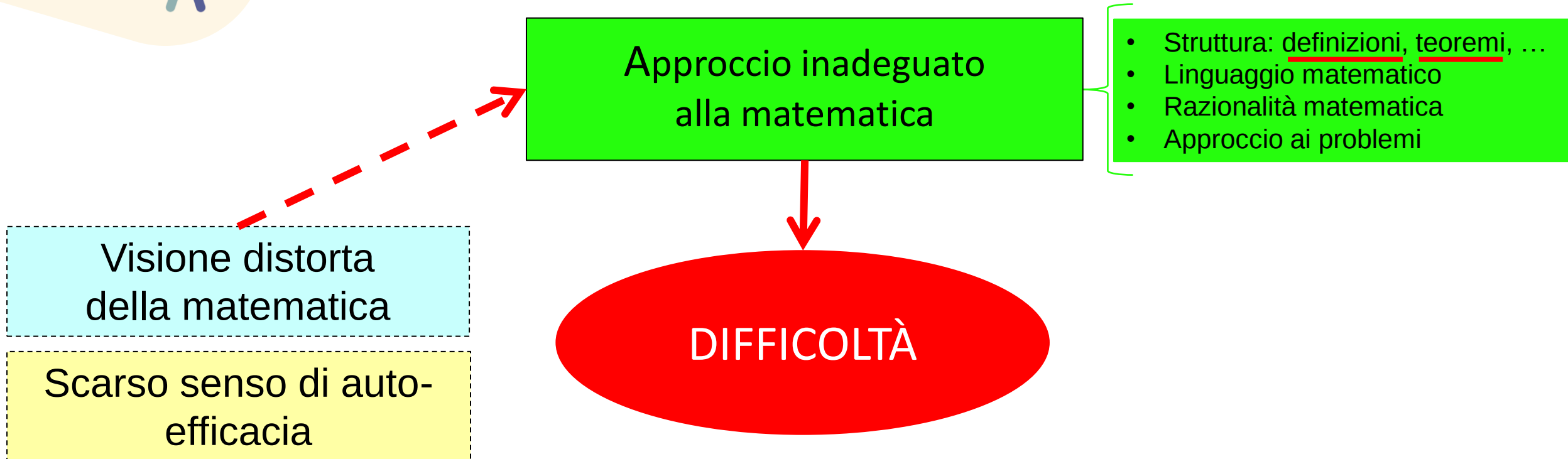
Approccio inadeguato
alla matematica

Non regola i propri comportamenti sulle
caratteristiche della matematica:

- L'organizzazione della matematica: definizioni, teoremi, assiomi, convenzioni,...
- I problemi
- La specificità del linguaggio matematico e le sue funzioni
- La specificità della razionalità matematica

Obiettivi delle attività proposte

- Favorire la costruzione di una visione adeguata:
 - della matematica
 - del linguaggio matematico
 - della razionalità matematica
- Insegnare a 'studiare':
 - a comprendere una definizione, un teorema
- Insegnare ad affrontare un problema
- Insegnare a utilizzare il linguaggio e la razionalità tipici della matematica



2. L'INTERVENTO

Mancata responsabilità
dell'apprendimento



La scheda 'Facciamo il punto'

Il contratto didattico

Approccio inadeguato
alla matematica



Capire una definizione

In matematica introduciamo continuamente *definizioni*...
...ma cosa succede quando lo facciamo?

DEFINIZIONE



IMMAGINE
MENTALE

...l'allievo si costruisce una

immagine mentale

di tale definizione

DEFINIZIONE



IMMAGINE
MENTALE

Tale immagine in generale non corrisponde alla definizione data.

DEFINIZIONE

Altezza di un triangolo è il segmento di perpendicolare condotto da un vertice al lato opposto.

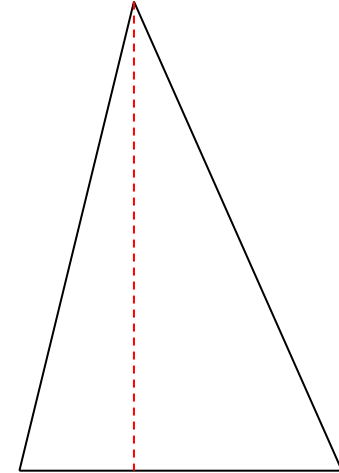
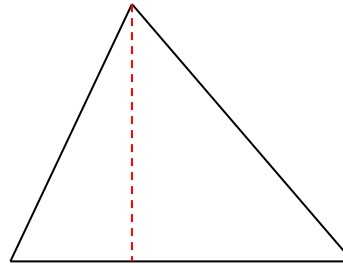
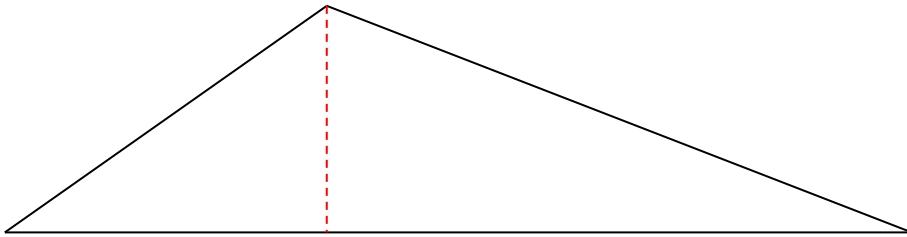
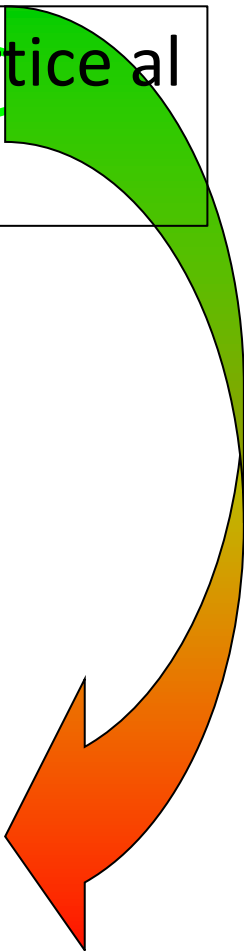


IMMAGINE
MENTALE

...è verticale



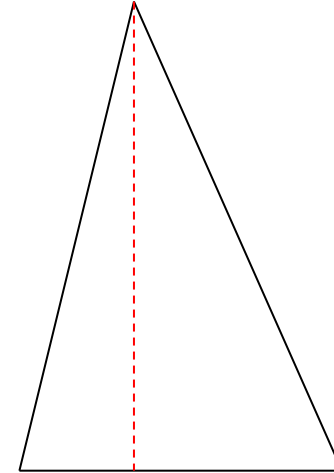
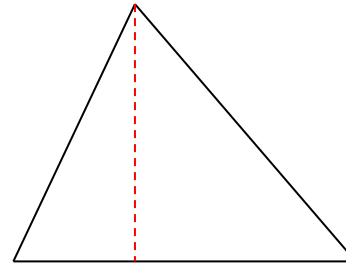
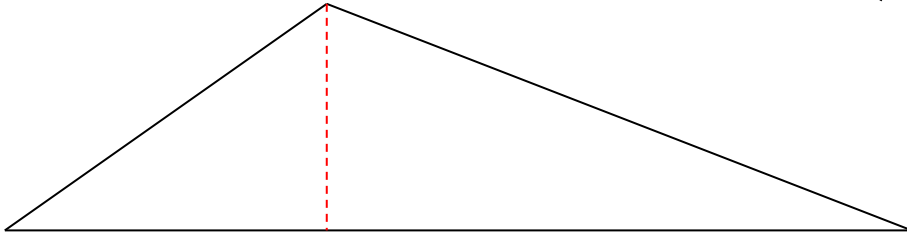
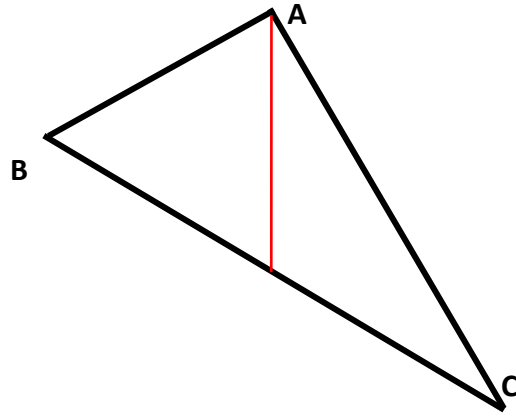
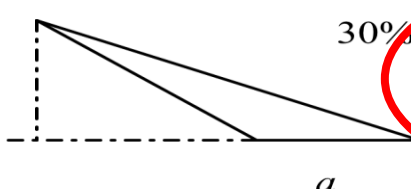
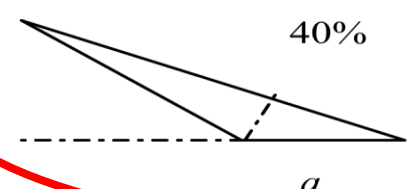
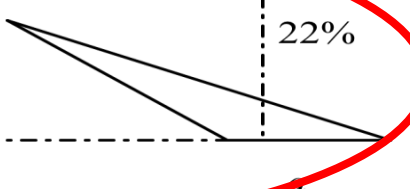
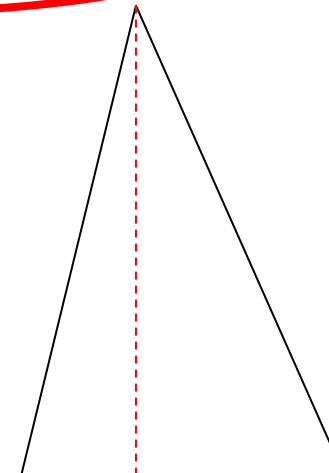
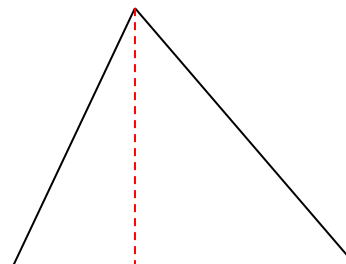
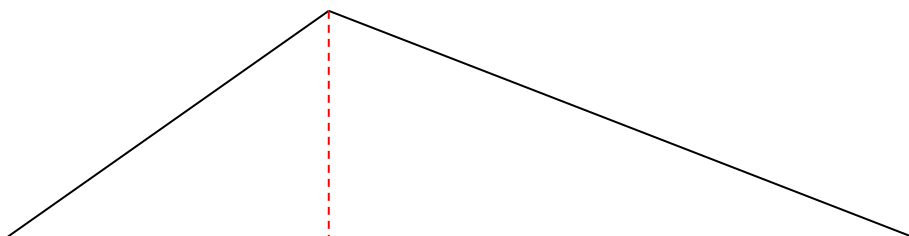


IMMAGINE
MENTALE

...è verticale

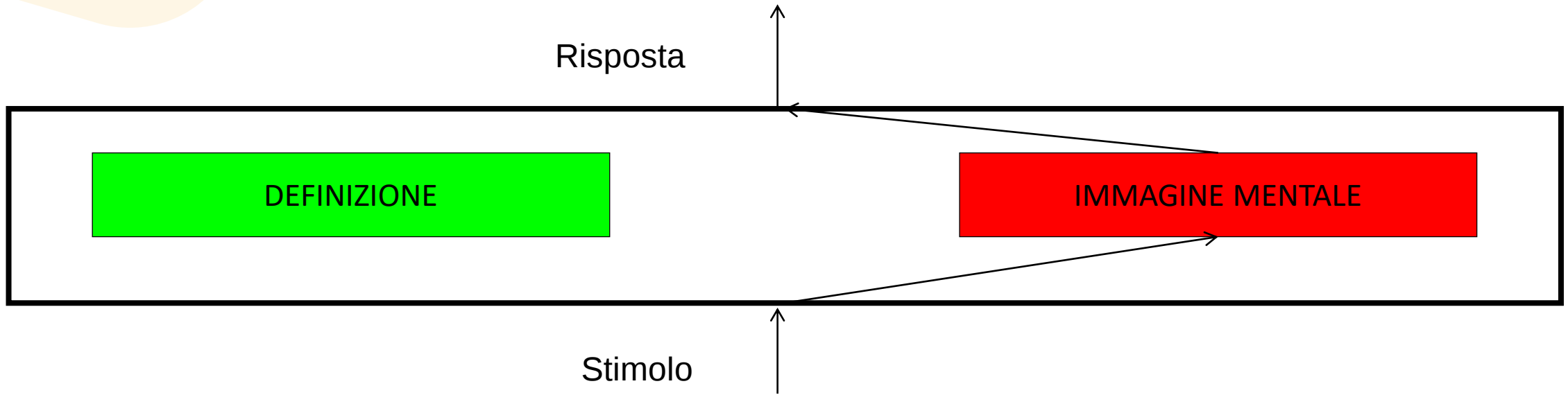
Disegnare l'altezza relativa al lato a

Risposta corretta:	Risposte scorrette:		Non risponde:
 30%	 40%	 22%	8%



**IMMAGINE
MENTALE**

...è interna al triangolo



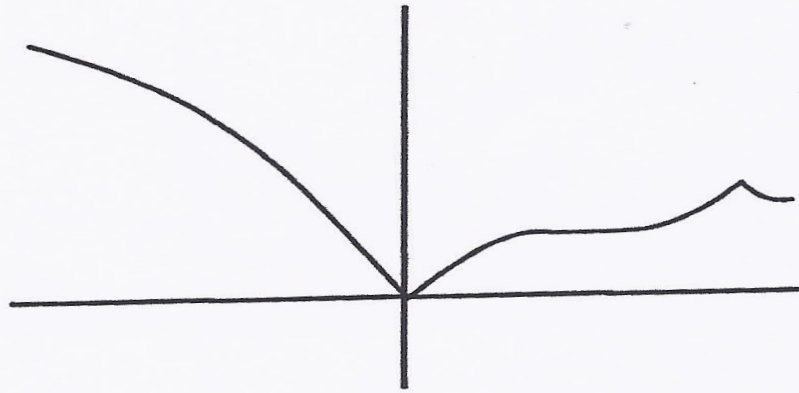
Risposta intuitiva

- l'immagine mentale agisce perciò come un 'tunnel della mente'
- ...emerge soprattutto in situazioni non standard, un po' diverse dall'usuale

Il concetto di funzione

1. Esiste una funzione in cui ogni numero diverso da 0 è associato al suo quadrato, e allo 0 è associato 1?
2. Esiste una funzione in cui ogni numero positivo è associato a 1, ogni numero negativo è associato a -1, e 0 è associato a 0?
3. Esiste una funzione il cui grafico è il seguente?

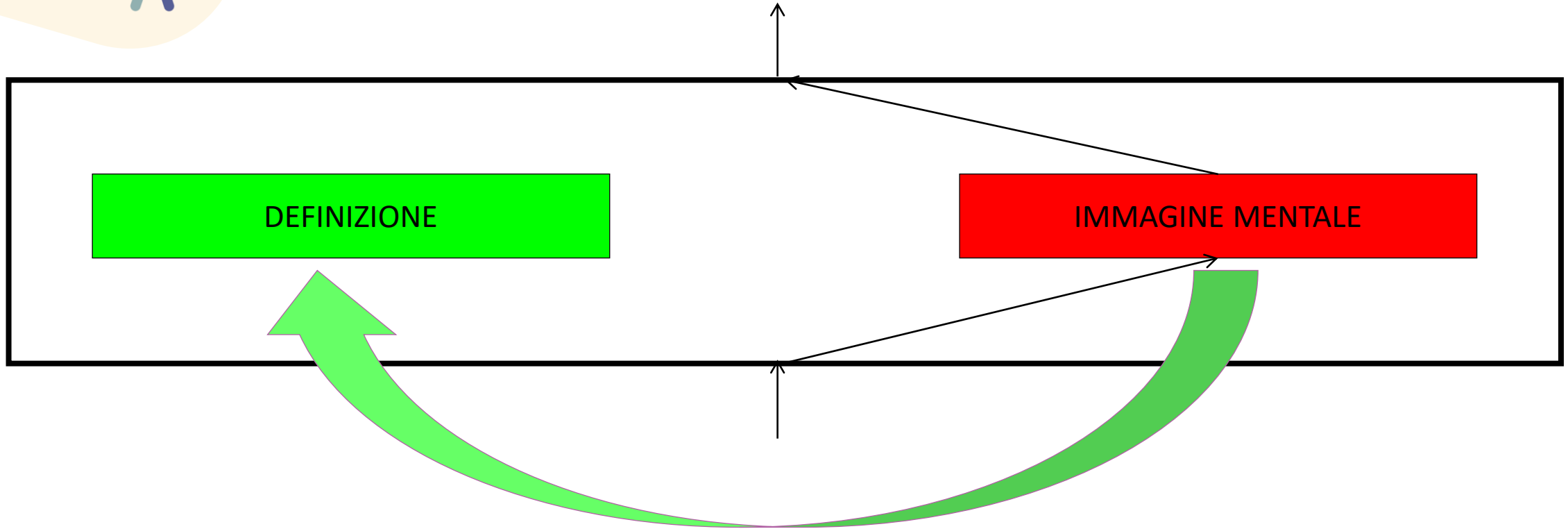
IMMAGINE MENTALE



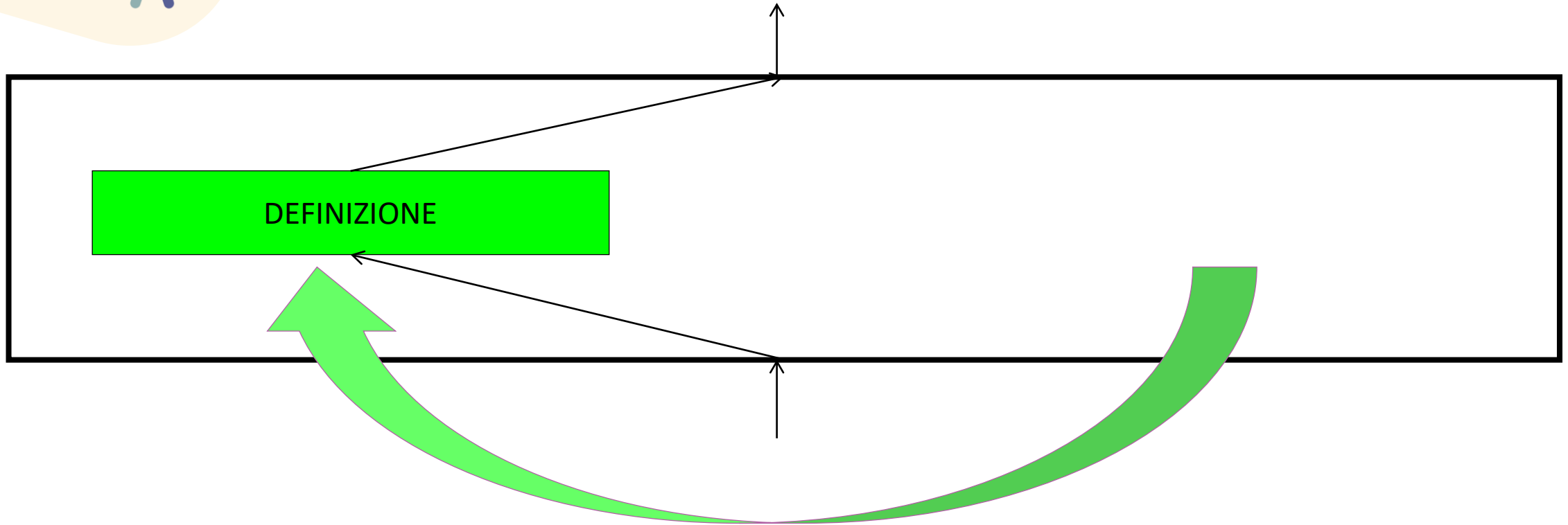
4. Secondo te cos'è una funzione?

DEFINIZIONE

Molti studenti che alla domanda 4 danno una definizione corretta di funzione non la utilizzano per rispondere alle domande 1-3.



PROCESSI DI CONTROLLO



PROCESSI DI CONTROLLO

è importante educare gli studenti
ad attivare *processi di controllo*

2. L'INTERVENTO

Mancata responsabilità
dell'apprendimento



La scheda 'Facciamo il punto'

Il contratto didattico

Approccio inadeguato
alla matematica



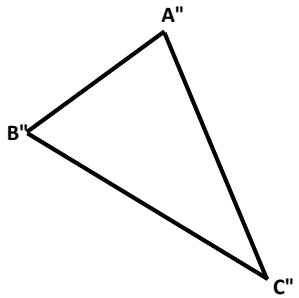
Capire una definizione

- La definizione di altezza

Attività sulla definizione di altezza

Ovvero: dall'immagine mentale alla definizione

1) Nel triangolo ABC disegna l'altezza relativa al vertice A.



In questo contesto il ricorso alla definizione scritta non va considerato un fatto negativo, da censurare, ma un fatto positivo, perché corrisponde a un processo di controllo!

2) Controlla!

Rileggi con attenzione la definizione di altezza.

Altezza di un triangolo è il segmento di perpendicolare condotto da un vertice al lato opposto.

Quello che hai disegnato ha effettivamente tutte le proprietà descritte nella definizione?

- È un segmento? ☐ sì ☐ no
- Uno dei suoi estremi è il vertice A? ☐ sì ☐ no
- L'altro estremo sta sul lato opposto al vertice A? ☐ sì ☐ no
- È perpendicolare al lato opposto al vertice A? ☐ sì ☐ no
(Come puoi fare per controllare?)

3) Se hai risposto NO a qualcuna di queste domande, vuol dire che quella che hai disegnato non è l'altezza richiesta.

Prova a ricominciare da capo.

Si possono proporre attività analoghe a partire da un triangolo ottusangolo o da un triangolo rettangolo.

2. L'INTERVENTO

Mancata responsabilità
dell'apprendimento



La scheda 'Facciamo il punto'

Il contratto didattico

Approccio inadeguato
alla matematica



Capire una definizione

- La definizione di altezza
- La definizione di numero razionale

Leggi con attenzione la seguente DEFINIZIONE:

Definizione: Un numero si dice **razionale** se si può scrivere come rapporto di due numeri interi, cioè se si può scrivere come m/n , con m e n interi.

Ti sembra di aver capito la definizione?

Se non l'hai capita:

Ci sono simboli che non conosci? Quali?

Ci sono parole che non conosci? Quali?

Ci sono espressioni che non capisci? Quali?

Rileggi la definizione e scrivi qui di seguito tutto quello che vorresti chiedere al professore per capire meglio:

Se pensi di aver capito la definizione data:

Scrivi 4 numeri razionali:

Scrivi 4 numeri non razionali:

Rispondi ora alle domande che seguono, e che riguardano la definizione di numero razionale.

Attenzione! Tutte le volte che hai un dubbio rileggi la DEFINIZIONE!

1.1

Andrea dice: 7 non è un numero razionale perché è un solo numero e non è un rapporto.

Ilaria dice: 7 è razionale perché si può scrivere come rapporto di due interi: 7 e 1.

A chi dai ragione? Perché?

1.2

Silvia dice: 3,14 è razionale perché si può scrivere come $314/100$.

Valerio dice: 3,14 non è razionale perché è un numero con la virgola.

A chi dai ragione?

Perché?

1.3

Barbara dice: $\sqrt{25}$ non è un numero razionale perché c'è la radice quadrata.

Francesco dice: $\sqrt{25}$ è un numero razionale perché è uguale a 5, che è razionale.

A chi dai ragione e perché?

1.4

Alice dice: $\sqrt{3}/2$ è razionale perché è il rapporto di due numeri.

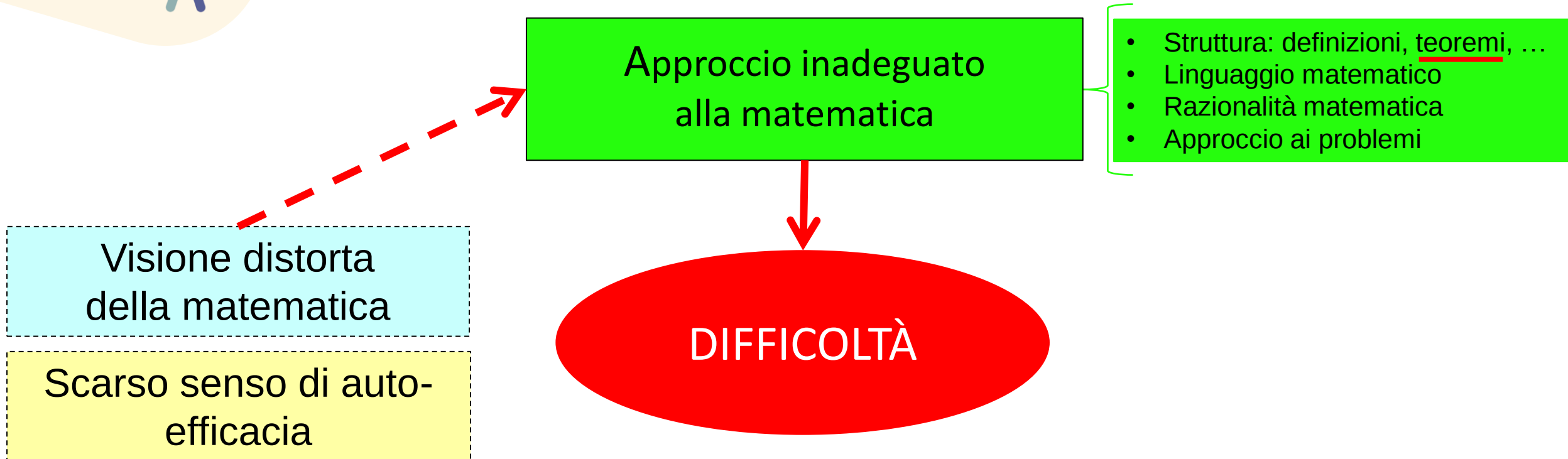
Sei d'accordo con Alice?

Spiega perché.

Adesso prova a scrivere la definizione di *numero razionale*, senza guardare la definizione scritta all'inizio:

PROPOSTA

Predisporre un'attività sulla definizione di funzione del tipo di quella presentata per la definizione di altezza (eventualmente utilizzando la prova sulla definizione di funzione descritta e i suoi risultati).



Le dimostrazioni nella pratica didattica

Anche se si è convinti del ruolo delle dimostrazioni in matematica, sempre più si rinuncia a proporle:

- se si fa una dimostrazione alla lavagna, 5 studenti seguono, 2 capiscono, 1 apprende...
- ...e poi *cosa si chiede* di tale dimostrazione?
- d'altra parte se non si chiede niente passa l'idea che non è importante

Invece bisognerebbe educare all'argomentazione e poi alla dimostrazione fin dalla scuola primaria.

Le dimostrazioni nella pratica didattica

Una strategia è quella di proporre specifiche attività sulla dimostrazione in classe, a gruppi, senza i vincoli della valutazione.

Gli obiettivi di tali attività:

- dare un'idea di cos'è una dimostrazione e di come funzionano i processi dimostrativi
- ma anche far emergere dai passaggi proprietà rilevanti degli oggetti matematici in gioco su cui ragionare e discutere
- quindi restituire vitalità a conoscenze che altrimenti rischiano di rimanere inerti
- far comprendere a fondo l'enunciato di teoremi importanti

Le dimostrazioni nella pratica didattica

Una strategia è quella di proporre specifiche attività sulla dimostrazione in classe, a gruppi, senza i vincoli della valutazione

Metodologia:

- L'insegnante non 'fa' la dimostrazione alla lavagna
- Consegna agli studenti (a gruppi) il foglio con l'enunciato, la dimostrazione e le attività descritte
- Conclude tirando le fila attraverso un confronto fra le varie risposte

2. L'INTERVENTO

Mancata responsabilità
dell'apprendimento



La scheda 'Facciamo il punto'

Il contratto didattico

Approccio inadeguato
alla matematica



Capire una definizione

- La definizione di altezza
- La definizione di numero razionale



Capire un teorema / una dimostrazione

2. L'INTERVENTO

Mancata responsabilità
dell'apprendimento



La scheda 'Facciamo il punto'

Il contratto didattico

Approccio inadeguato
alla matematica



Capire una definizione

- La definizione di altezza
- La definizione di numero razionale



Capire un teorema / una dimostrazione

- L'irrazionalità di $\sqrt{2}$

Qui di seguito sono riportati l'ENUNCIATO e la DIMOSTRAZIONE di un teorema.
Leggi entrambi molto attentamente.

TEOREMA: $\sqrt{2}$ è un numero irrazionale, cioè non si può scrivere come rapporto fra due numeri interi.

Qual è l'**enunciato** del teorema?

Ti sembra di averlo capito?

Se non l'hai capito:

Ci sono simboli che non conosci? Quali?

Ci sono parole che non conosci? Quali?

Ci sono espressioni che non capisci? Quali?

Rileggi l'enunciato e scrivi qui di seguito tutto quello che vorresti chiedere al professore per capire meglio:

DIMOSTRAZIONE

1. Dimostriamo per assurdo.

2. Se $\sqrt{2}$ fosse razionale allora esisterebbero due numeri interi m e n tali che:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \text{ !!!!!}$$

3. Osserviamo che si può sempre supporre che m e n siano primi tra loro, cioè che la frazione $\frac{m}{n}$ sia ridotta ai minimi termini.

4. Dall'uguaglianza $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$! segue che $m^2 = 2n^2$.

5. Poiché m^2 è pari, anche m è pari.

6. Quindi n deve essere dispari.

DIMOSTRAZIONE

7. D'altra parte se poniamo $m = 2k$ segue che $m^2 = 4k^2$.!
8. Quindi: $2n^2 = 4k^2$,!cioè $n^2 = 2k^2$.
9. Da cui segue che n^2 !è!pari.
10. Quindi anche n è pari.
11. Ma avevamo visto che n doveva essere dispari.
12. Quindi siamo arrivati ad un assurdo.
13. Quindi il teorema è dimostrato.

1. Dimostriamo per assurdo.



- a) Cosa vuol dire dimostrare per assurdo?
- b) Hai visto altre dimostrazioni per assurdo?

tali che: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$!!!!!

3. Osserviamo che si può sempre supporre che m e n siano primi tra loro, cioè

che la frazione $\frac{m}{n}$ sia ridotta ai minimi termini.

4. Dall'uguaglianza $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$! segue che $m^2 = 2n^2$.

5. Poiché m^2 è pari, anche m è pari.

6. Quindi n deve essere dispari.

Con le domande non vogliamo ottenere risposte 'giuste', o controllare se lo studente sa rispondere...
...vogliamo attivare processi di pensiero, consapevolezza, anche dubbi

1. Dimostriamo per assurdo.

2. Se $\sqrt{2}$ fosse razionale allora esisterebbero due numeri interi m e n

tali che: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$!!!!!



c) Perché al punto 2 della dimostrazione si scrive $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$!! , cioè

che la frazione $\frac{m}{n}$ sia ridotta ai minimi termini.

4. Dall'uguaglianza $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$! segue che $m^2 = 2n^2$.

5. Poiché m^2 è pari, anche m è pari.

6. Quindi n deve essere dispari.

1. Dimostriamo per assurdo.

2. Se $\sqrt{2}$ fosse razionale allora esisterebbero due numeri interi m e n

tali che: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$!!!!!

3. Osserviamo che si può sempre supporre che m e n siano primi tra loro, cioè

che la frazione $\frac{m}{n}$ sia ridotta ai minimi termini.



d) Perché al punto 3 della dimostrazione si dice che si può sempre supporre che m e n siano primi tra loro?

5. Poiché m^2 è pari, anche m è pari.

6. Quindi n deve essere dispari.

1. Dimostriamo per assurdo.

2. Se $\sqrt{2}$ fosse razionale allora esisterebbero due numeri interi m e n

tali che: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$!!!!!

3. Osserviamo che si può sempre supporre che m e n siano primi tra loro, cioè

che la frazione $\frac{m}{n}$ sia ridotta ai minimi termini.

4. Dall'uguaglianza $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$! segue che $m^2 = 2n^2$.



e) Perché al punto 4 della dimostrazione si scrive che $m^2=2n^2$?

6. Quindi n deve essere dispari.

1. Dimostriamo per assurdo.

2. Se $\sqrt{2}$ fosse razionale allora esisterebbero due numeri interi m e n

tali che: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$!!!!!

3. Osserviamo che si può sempre supporre che m e n siano primi tra loro, cioè

che la frazione $\frac{m}{n}$ sia ridotta ai minimi termini.

4. Dall'uguaglianza $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$! segue che $m^2 = 2n^2$.

5. Poiché m^2 è pari, anche m è pari.



f) Perché se m^2 è pari, anche m è pari?

1. Dimostriamo per assurdo.

2. Se $\sqrt{2}$ fosse razionale allora esisterebbero due numeri interi m e n

tali che: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$!!!!!

3. Osserviamo che si può sempre supporre che m e n siano primi tra loro, cioè

che la frazione $\frac{m}{n}$ sia ridotta ai minimi termini.

4. Dall'uguaglianza $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$! segue che $m^2 = 2n^2$.

5. Poiché m^2 è pari, anche m è pari.

6. Quindi n deve essere dispari.



g) Perché n deve essere dispari?

7. D'altra parte se poniamo $m = 2k$ segue che $m^2 = 4k^2$.! 

h) Perché si può scrivere $m=2k$?

i) Perché si deduce che $m^2=4k^2$?

10. Quindi anche n è pari.

11. Ma avevamo visto che n doveva essere dispari.

12. Quindi siamo arrivati ad un assurdo.

13. Quindi il teorema è dimostrato.

7. D'altra parte se poniamo $m = 2k$ segue che $m^2 = 4k^2$.!

8. Quindi: $2n^2 = 4k^2$,!cioè $n^2 = 2k^2$.



l) Perché si scrive che $2n^2=4k^2$?

10. Quindi anche n è pari.

11. Ma avevamo visto che n doveva essere dispari.

12. Quindi siamo arrivati ad un assurdo.

13. Quindi il teorema è dimostrato.

7. D'altra parte se poniamo $m = 2k$ segue che $m^2 = 4k^2$.!

8. Quindi: $2n^2 = 4k^2$,!cioè $n^2 = 2k^2$.

9. Da cui segue che n^2 !è!pari.



m) Perché si afferma che n^2 è pari?

11. Ma avevamo visto che n doveva essere dispari.

12. Quindi siamo arrivati ad un assurdo.

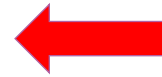
13. Quindi il teorema è dimostrato.

7. D'altra parte se poniamo $m = 2k$ segue che $m^2 = 4k^2$.!

8. Quindi: $2n^2 = 4k^2$,!cioè $n^2 = 2k^2$.

9. Da cui segue che n^2 !è!pari.

10. Quindi anche n è pari.



n) Perché si deduce che anche n è pari ?

12. Quindi siamo arrivati ad un assurdo.

13. Quindi il teorema è dimostrato.

7. D'altra parte se poniamo $m = 2k$ segue che $m^2 = 4k^2$.!

8. Quindi: $2n^2 = 4k^2$,!cioè $n^2 = 2k^2$.

9. Da cui segue che n^2 !è!pari.

10. Quindi anche n è pari.

11. Ma avevamo visto che n doveva essere dispari.



o) Perché si afferma che n doveva essere dispari?

13. Quindi il teorema è dimostrato.

7. D'altra parte se poniamo $m = 2k$ segue che $m^2 = 4k^2$.!

8. Quindi: $2n^2 = 4k^2$,!cioè $n^2 = 2k^2$.

9. Da cui segue che n^2 !è!pari.

10. Quindi anche n è pari.

11. Ma avevamo visto che n doveva essere dispari.

12. Quindi siamo arrivati ad un assurdo.



p) Perché si afferma che si è arrivati a un assurdo?

7. D'altra parte se poniamo $m = 2k$ segue che $m^2 = 4k^2$.!

8. Quindi: $2n^2 = 4k^2$,!cioè $n^2 = 2k^2$.

9. Da cui segue che n^2 !è!pari.

10. Quindi anche n è pari.

11. Ma avevamo visto che n doveva essere dispari.

12. Quindi siamo arrivati ad un assurdo.

13. Quindi il teorema è dimostrato.



q) Perché si afferma che il teorema è dimostrato?

Ecco alcuni commenti al teorema dato sopra, leggili attentamente e rispondi alla domanda finale:

Ludovico dice : “Secondo me il teorema non è dimostrato, non vedo infatti cosa c’entri che n sia contemporaneamente pari e dispari con il fatto che $\sqrt{2}$ sia irrazionale”

Mirko dice : “Il teorema è falso, perché $\sqrt{2}$ si può scrivere come $\frac{m}{n}$!!

Infatti con la calcolatrice ho trovato che $\sqrt{2}$ è uguale a 1,4142135623, quindi è uguale alla frazione $\frac{14142135623}{10000000000}$.

Nadia dice : “Il teorema è falso, perché $\sqrt{2}$ si può scrivere come $\frac{m}{n}$!!

Basta prendere $n = \sqrt{2}$ $m = 2$!!

e così! $\frac{m}{n} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Cosa pensi di tali commenti?

2. L'INTERVENTO

Mancata responsabilità
dell'apprendimento



La scheda 'Facciamo il punto'

Il contratto didattico

Approccio inadeguato
alla matematica



Capire una definizione

- La definizione di altezza
- La definizione di numero razionale



Capire un teorema / una dimostrazione

- L'irrazionalità di $\sqrt{2}$
- Una proprietà aritmetica

Una proprietà aritmetica

Qui di seguito sono riportati l'ENUNCIATO e la DIMOSTRAZIONE di un teorema.
Leggi entrambi molto attentamente.

TEOREMA: La somma di due numeri dispari consecutivi è un multiplo di 4.

Qual è l'**enunciato** del teorema?

Ti sembra di averlo capito?

Se non l'hai capito:

Ci sono simboli che non conosci? Quali?

Ci sono parole che non conosci? Quali?

Ci sono espressioni che non capisci? Quali?

Rileggi l'enunciato e scrivi qui di seguito tutto quello che vorresti chiedere al professore per capire meglio:

Dimostrazione:

1. Siano n e m due numeri dispari consecutivi
2. Possiamo supporre $n < m$
3. e quindi $m = n + 2$
4. Possiamo inoltre scrivere $n = 2k + 1$
5. quindi $m = 2k + 3$
6. Allora $m + n = (2k + 1) + (2k + 3) = 4(k + 1)$
7. Quindi $m + n$ è divisibile per 4, e il teorema è dimostrato.

Pensi di aver capito la **dimostrazione**?

Ci sono passi che non sono chiari? Quali? Cos'è che non ti è chiaro?

Scrivi di seguito tutto quello che vorresti chiedere al professore per capire meglio la dimostrazione:

Dimostrazione:

1. Siano n e m due numeri dispari consecutivi



Cosa vuol dire che due numeri dispari sono consecutivi
(vedi punto 1)?

5. quindi $m = 2k+3$

6. Allora $m+n = (2k+1) + (2k+3) = 4(k+1)$

7. Quindi $m+n$ è divisibile per 4, e il teorema è dimostrato.

Dimostrazione:

1. Siano n e m due numeri dispari consecutivi
2. Possiamo supporre $n < m$



Perché si dice che si può supporre $n < m$ (vedi punto 2)?

5. quindi $m = 2k + 3$
6. Allora $m + n = (2k + 1) + (2k + 3) = 4(k + 1)$
7. Quindi $m + n$ è divisibile per 4, e il teorema è dimostrato.

Dimostrazione:

1. Siano n e m due numeri dispari consecutivi
2. Possiamo supporre $n < m$
3. e quindi $m = n + 2$



Perché $m = n + 2$? (vedi punto 3)

6. Allora $m + n = (2k + 1) + (2k + 3) = 4(k + 1)$
7. Quindi $m + n$ è divisibile per 4, e il teorema è dimostrato.

Dimostrazione:

1. Siano n e m due numeri dispari consecutivi
2. Possiamo supporre $n < m$
3. e quindi $m = n + 2$
4. Possiamo inoltre scrivere $n = 2k + 1$



Perché si può scrivere $n = 2k + 1$ (vedi punto 4)?

7. Quindi $m + n$ è divisibile per 4, e il teorema è dimostrato.

Dimostrazione:

1. Siano n e m due numeri dispari consecutivi
2. Possiamo supporre $n < m$
3. e quindi $m = n + 2$
4. Possiamo inoltre scrivere $n = 2k + 1$
5. quindi $m = 2k + 3$



Perché si scrive $m = 2k + 3$ (vedi punto 5)?

Dimostrazione:

1. Siano n e m due numeri dispari consecutivi
2. Possiamo supporre $n < m$
3. e quindi $m = n + 2$
4. Possiamo inoltre scrivere $n = 2k + 1$
5. quindi $m = 2k + 3$
6. Allora $m + n = (2k + 1) + (2k + 3) = 4(k + 1)$



Perché $m + n = (2k + 1) + (2k + 3) = 4(k + 1)$ (vedi punto 6)?

Dimostrazione:

1. Siano n e m due numeri dispari consecutivi
2. Possiamo supporre $n < m$
3. e quindi $m = n + 2$
4. Possiamo inoltre scrivere $n = 2k + 1$
5. quindi $m = 2k + 3$
6. Allora $m + n = (2k + 1) + (2k + 3) = 4(k + 1)$
7. Quindi $m + n$ è divisibile per 4, e il teorema è dimostrato.



Perché si dice che $m + n$ è divisibile per 4 (vedi punto 7)?

Perché il teorema è dimostrato (vedi punto 7)?

Ecco due commenti al teorema dato sopra, leggili attentamente e rispondi alla domanda finale:

TEOREMA: La somma di due numeri dispari consecutivi è un multiplo di 4.

Federico dice: “Secondo me il teorema è falso, infatti due numeri non possono essere dispari e consecutivi nello stesso tempo: se sono consecutivi uno è pari e l’altro è dispari.”

Anna dice: “Secondo me il teorema è falso. Infatti 27 e 29 sono due dispari consecutivi ma la loro somma è 56 che è divisibile per 8.”

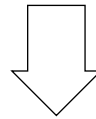
Cosa pensi di tali commenti?

Le attività proposte

- Queste attività (definizioni e teoremi) vogliono far capire come si affronta la matematica...
- ...ponendo le domande che si fa l'esperto quando studia
- Con il tempo lo studente dovrebbe imparare a porsi da solo le domande 'giuste'
- ...cioè dovrebbe imparare cosa significa 'comprendere' in matematica

Le attività proposte

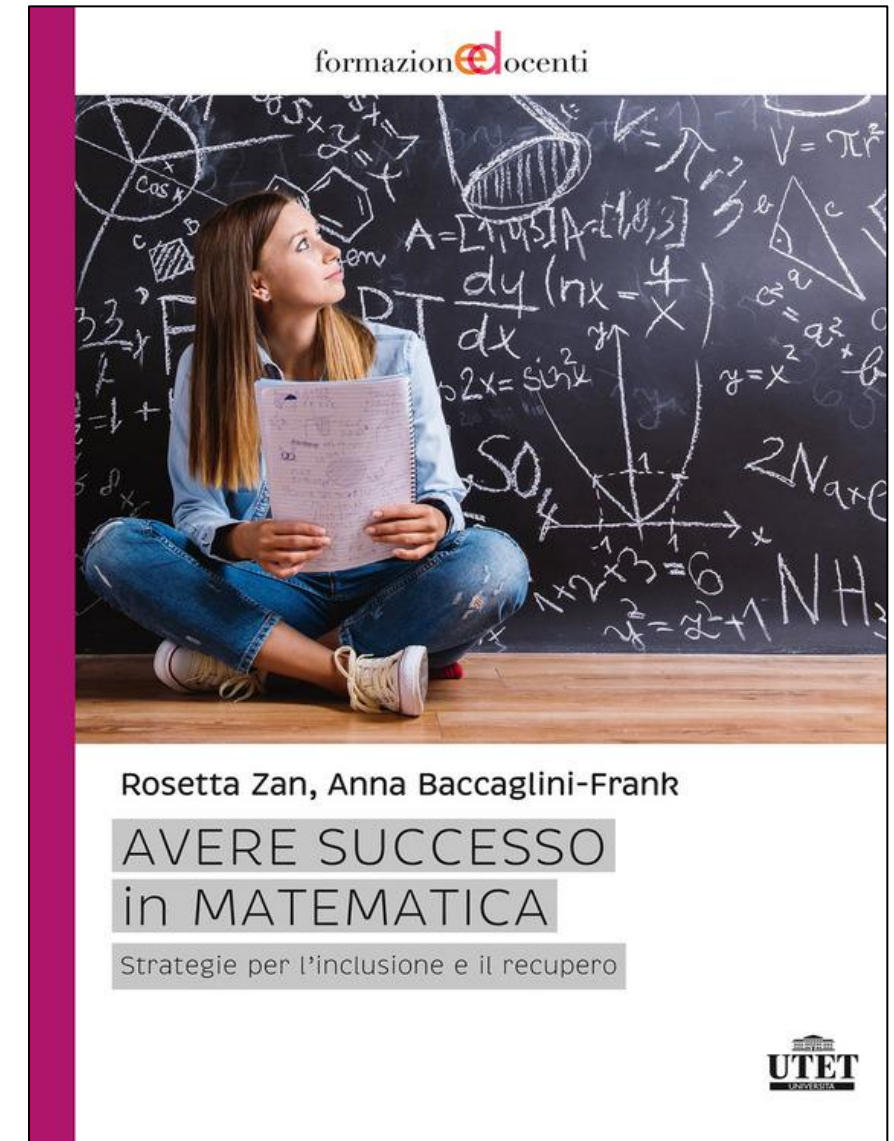
- Inoltre ogni attività di fatto propone al suo interno una serie di ‘problemi’ che mettono in gioco le conoscenze che lo studente dovrebbe possedere, ma che spesso:
 - non possiede, oppure
 - non riconosce come importanti
 - ...in ogni caso non utilizza



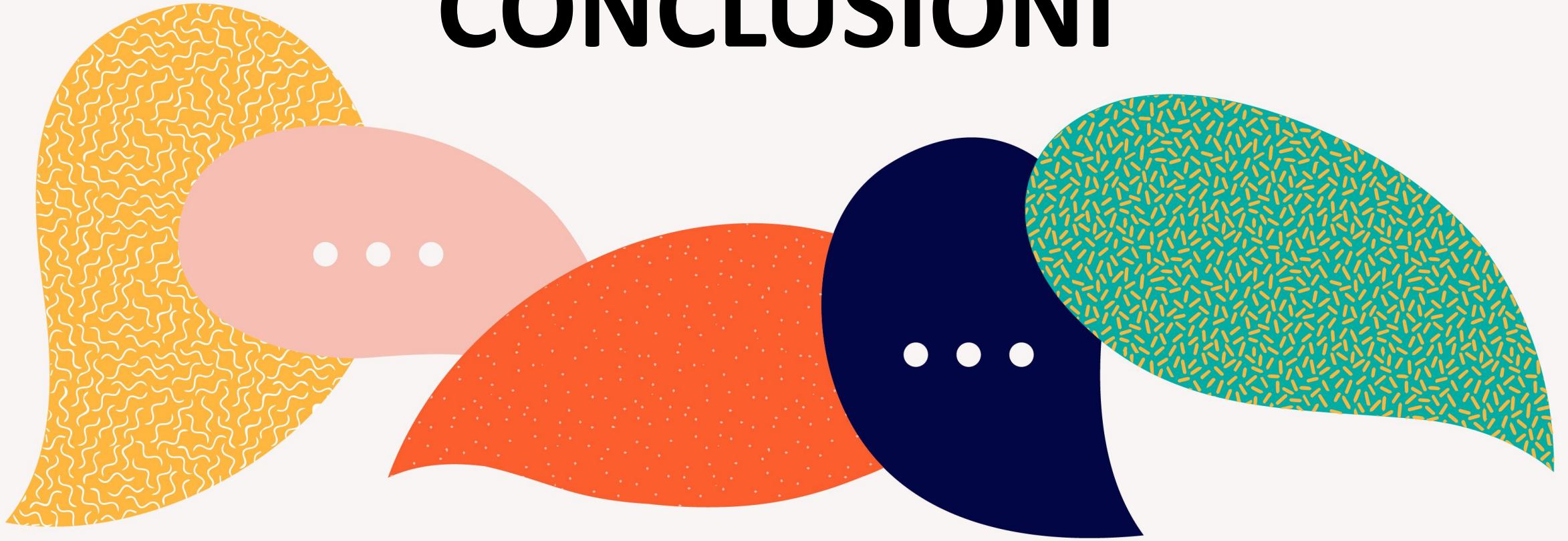
- Ogni attività quindi è utile anche per sviluppare:
 - una diversa consapevolezza dell’importanza delle conoscenze possedute
 - le capacità di **auto-valutazione** dello studente

Altre proposte

- Sulla diagnosi:
 - Scheda diagnostica preliminare
 - Questionario sull'atteggiamento verso la matematica
- Sull'assunzione della responsabilità dell'apprendimento:
 - I questionari PRIMA / DOPO
- Sulle definizioni:
 - Definizione di numeri primi tra loro
 - Definizione di valore assoluto di un numero
- Sui teoremi:
 - Teorema del resto
 - Teorema di Rolle

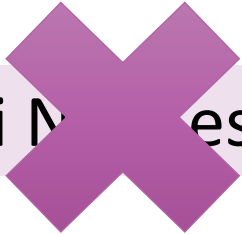


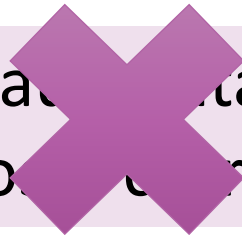
CONCLUSIONI



Difficoltà in matematica: un approccio inclusivo

Come si interviene per essere inclusivi?

1. Si sceglie di  essere inclusivi.

2. Si banalizzano le richieste per aumentare la probabilità di ottenere una risposta corretta. 

3. ...una terza via

Un insegnante di matematica INCLUSIVO

- si rende conto delle difficoltà che ha un allievo

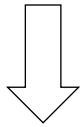
OSSERVAZIONE

- cerca di capirne le cause

INTERPRETAZIONE

- attiva comportamenti di conseguenza

INTERVENTO



un intervento che non si preoccupa di osservare gli allievi, di ipotizzare un'interpretazione – cioè una *diagnosi* - è poco inclusivo, e soprattutto è poco efficace...

...ma l'intervento dovrebbe essere coerente con la diagnosi fatta

OSSERVAZIONE



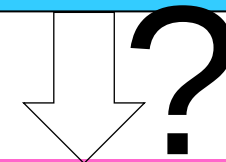
- errori, e più in generale...
- assenza di risposte corrette

INTERPRETAZIONE



- Non si impegna abbastanza
- Ha lacune di base
- Ha un atteggiamento negativo
- Non ragiona
- Non sa studiare
- ...

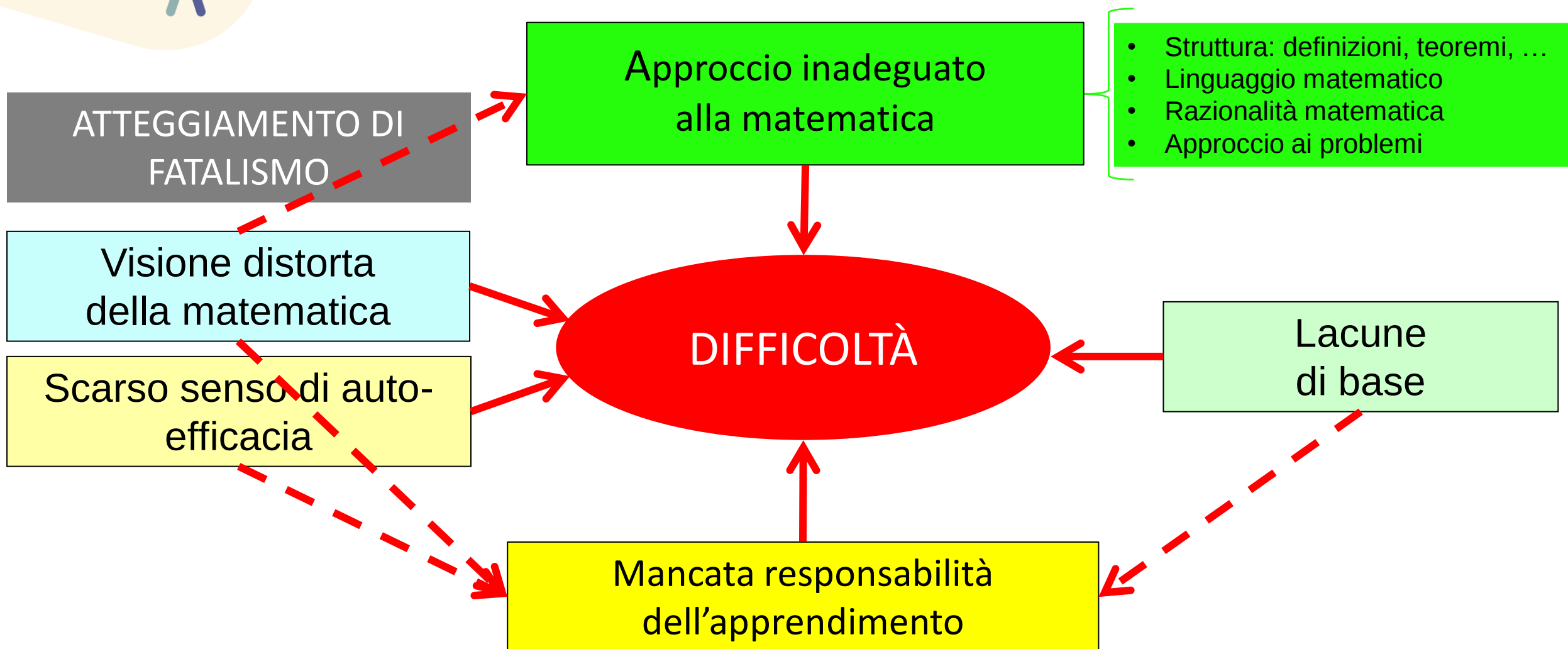
incoerente



INTERVENTO



- Ripetizione degli argomenti in gioco

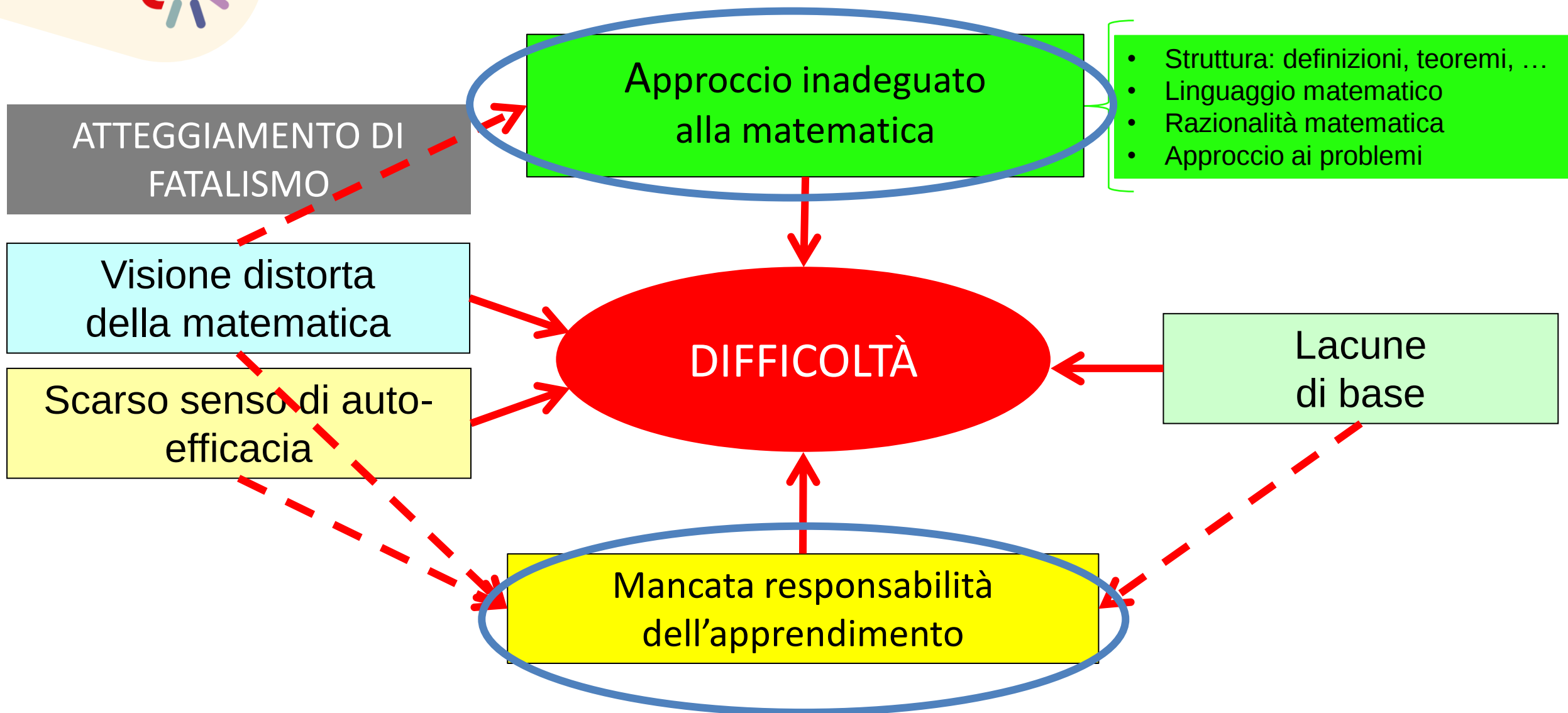


Strategie, attività, materiali

1. LA DIAGNOSI

2. L'INTERVENTO

- prevenzione
- recupero



Proposte da sperimentare

1. DIAGNOSI

Batteria di problemi.

2. INTERVENTO

Sull'autovalutazione:
Scheda *Facciamo il punto*

Sulle definizioni:
La definizione di *altezza*

Sulle dimostrazioni:
Una proprietà aritmetica

la
SCUOLA 
Grazie