



la
SCUOLA

15 aprile 2021

e

A stylized lowercase letter 'e' in red, surrounded by several short, colorful lines radiating outwards in various colors (blue, green, yellow, orange, purple, blue).

la
SCUOLA **e**

Maturità scientifica: l'elaborato finale

Leonardo Sasso

Claudio Zanone

la
SCUOLA  La normativa

PROVA D'ESAME – FINALITÀ

Il candidato dimostri, nel corso del colloquio:

- di avere acquisito i **contenuti e i metodi propri delle singole discipline**, di essere capace di utilizzare le conoscenze acquisite e di **metterle in relazione tra loro per argomentare** in maniera critica e personale, utilizzando anche la lingua straniera
- di saper analizzare criticamente e correlare al percorso di studi seguito le **esperienze svolte nell'ambito del PCTO**
- di avere maturato le competenze e le conoscenze previste dalle attività di **educazione civica**

ARTICOLAZIONE E SVOLGIMENTO DEL COLLOQUIO

L'esame è così articolato:

1. discussione di un **elaborato** concernente le discipline caratterizzanti
2. discussione di un breve testo
3. analisi del materiale scelto dalla sottocommissione
4. esposizione dell'esperienza di PCTO

CARATTERISTICHE DELL'ELABORATO

Integrato, in una **prospettiva multidisciplinare**, dagli apporti di **altre discipline** o competenze individuali presenti nel curriculum dello studente e dell'esperienza di PCTO svolta durante il percorso di studi.

TIPOLOGIA APERTA

La tipologia è aperta, coerente con le discipline coinvolte; i consigli di classe possono scegliere se assegnare a ciascun candidato un argomento diverso o assegnare a tutti o a gruppi di candidati uno stesso argomento che si presti a uno svolgimento personalizzato.

DOCENTI DI RIFERIMENTO

Il consiglio di classe provvede all'indicazione, tra tutti i membri designati per fare parte delle sottocommissioni, di docenti di riferimento per l'elaborato, a ciascuno dei quali è assegnato un gruppo di studenti.

VALUTAZIONE

Non è prevista una valutazione specifica dell'elaborato nella griglia di valutazione della prova orale allegata all'ordinanza.

[Griglia valutazione orale](#)

Allegato B Griglia di valutazione della prova orale

La Commissione assegna fino ad un massimo di quaranta punti, tenendo a riferimento indicatori, livelli, descrittori e punteggi di seguito indicati.

Indicatori	Livelli	Descrittori	Punti	Punteggio
Acquisizione dei contenuti e dei metodi delle diverse discipline del curriculum, con particolare riferimento a quelle d'indirizzo	I	Non ha acquisito i contenuti e i metodi delle diverse discipline, o li ha acquisiti in modo estremamente frammentario e lacunoso.	1-2	
	II	Ha acquisito i contenuti e i metodi delle diverse discipline in modo parziale e incompleto, utilizzandoli in modo non sempre appropriato.	3-5	
	III	Ha acquisito i contenuti e utilizza i metodi delle diverse discipline in modo corretto e appropriato.	6-7	
	IV	Ha acquisito i contenuti delle diverse discipline in maniera completa e utilizza in modo consapevole i loro metodi.	8-9	
	V	Ha acquisito i contenuti delle diverse discipline in maniera completa e approfondita e utilizza con piena padronanza i loro metodi.	10	
Capacità di utilizzare le conoscenze acquisite e di collegarle tra loro	I	Non è in grado di utilizzare e collegare le conoscenze acquisite o lo fa in modo del tutto inadeguato	1-2	
	II	È in grado di utilizzare e collegare le conoscenze acquisite con difficoltà e in modo stentato	3-5	
	III	È in grado di utilizzare correttamente le conoscenze acquisite, istituendo adeguati collegamenti tra le discipline	6-7	
	IV	È in grado di utilizzare le conoscenze acquisite collegandole in una trattazione pluridisciplinare articolata	8-9	
	V	È in grado di utilizzare le conoscenze acquisite collegandole in una trattazione pluridisciplinare ampia e approfondita	10	
Capacità di argomentare in maniera critica e personale, rielaborando i contenuti acquisiti	I	Non è in grado di argomentare in maniera critica e personale, o argomenta in modo superficiale e disorganico	1-2	
	II	È in grado di formulare argomentazioni critiche e personali solo a tratti e solo in relazione a specifici argomenti	3-5	
	III	È in grado di formulare semplici argomentazioni critiche e personali, con una corretta rielaborazione dei contenuti acquisiti	6-7	
	IV	È in grado di formulare articolate argomentazioni critiche e personali, rielaborando efficacemente i contenuti acquisiti	8-9	
	V	È in grado di formulare ampie e articolate argomentazioni critiche e personali, rielaborando con originalità i contenuti acquisiti	10	
Ricchezza e padronanza lessicale e semantica, con specifico riferimento al linguaggio tecnico e/o di settore, anche in lingua straniera	I	Si esprime in modo scorretto o stentato, utilizzando un lessico inadeguato	1	
	II	Si esprime in modo non sempre corretto, utilizzando un lessico, anche di settore, parzialmente adeguato	2	
	III	Si esprime in modo corretto utilizzando un lessico adeguato, anche in riferimento al linguaggio tecnico e/o di settore	3	
	IV	Si esprime in modo preciso e accurato utilizzando un lessico, anche tecnico e settoriale, vario e articolato	4	
	V	Si esprime con ricchezza e piena padronanza lessicale e semantica, anche in riferimento al linguaggio tecnico e/o di settore	5	
Capacità di analisi e comprensione della realtà in chiave di cittadinanza attiva a partire dalla riflessione sulle esperienze personali	I	Non è in grado di analizzare e comprendere la realtà a partire dalla riflessione sulle proprie esperienze, o lo fa in modo inadeguato	1	
	II	È in grado di analizzare e comprendere la realtà a partire dalla riflessione sulle proprie esperienze con difficoltà e solo se guidato	2	
	III	È in grado di compiere un'analisi adeguata della realtà sulla base di una corretta riflessione sulle proprie esperienze personali	3	
	IV	È in grado di compiere un'analisi precisa della realtà sulla base di una attenta riflessione sulle proprie esperienze personali	4	
	V	È in grado di compiere un'analisi approfondita della realtà sulla base di una riflessione critica e consapevole sulle proprie esperienze personali	5	
Punteggio totale della prova				

la
SCUOLA The logo consists of a large, red, lowercase letter 'e' followed by a cluster of ten short, colored lines radiating outwards in various colors including light blue, teal, yellow, orange, purple, and dark blue.

La nostra interpretazione

Come vediamo noi l'elaborato

COME INTERPRETIAMO L'ELABORATO?

- Concerne le discipline **caratterizzanti**, in una forma a esse coerente
→ Matematica, Fisica, Scienze
- Deve essere integrato in una prospettiva **multidisciplinare**
→ Partecipa tutto il consiglio di classe, ma...
→ Spunti di ricerca o collegamenti inerenti altre materie
- Competenze presenti nel curriculum dello studente, PCTO → ?
- Viene assegnato dal consiglio di classe → Non è una “tesina”

COME INTERPRETIAMO L'ELABORATO?

- C'è un docente di riferimento, ma...
- Gli studenti hanno un mese di tempo per consegnarlo
 - Possono confrontarsi con i docenti e i compagni
 - Possono svolgere un'attività di ricerca
 - La struttura dell'elaborato può avere una certa complessità?
- Sostituisce in qualche modo la seconda prova scritta?

la
SCUOLA 

The logo for "la SCUOLA" features the word "la" in a small, black, sans-serif font above the word "SCUOLA" in a larger, black, sans-serif font. To the right of "SCUOLA" is a stylized, colorful letter "e" composed of several short, vertical bars in various colors (red, orange, yellow, green, blue, purple) radiating from a central point.

La nostra proposta

Le tracce per l'elaborato

ZONA **Matematica**



Area Esame di Stato
con proposte per
l'elaborato di
Matematica e Fisica



Aree e percorsi ▾

Didattica Digitale Integrata

Scopri Zona Matematica



Torna a "Esame di Stato"

Proposte per l'elaborato



Qui trovi **proposte per l'elaborato** di Matematica e Fisica che il consiglio di classe deve **assegnare** agli studenti entro il **30 aprile**.

Entro il **31 maggio** i tuoi studenti dovranno trasmettere alla commissione i loro **elaborati**, da **discutere** poi nella prima parte del colloquio d'esame.

ALTRE PROPOSTE VERRANNO PUBBLICATE NEI PROSSIMI GIORNI.



Indicazioni didattiche

Ciascuna traccia di elaborato parte da un **problema** di Matematica e Fisica articolato in quattro punti, prosegue con quattro **quesiti teorici** di Matematica e Fisica legati allo svolgimento del problema, un'eventuale **proposta di ricerca**, sempre legata alle tematiche del problema e della seconda parte, e termina con due **spunti di collegamento** ad altre discipline.

In base all'elaborato che verrà trasmesso alla commissione, potrai decidere le domande da porre durante il **colloquio**.



Contenuto

Per ogni proposta di elaborato vengono forniti:

- un **foglio di lavoro per lo studente**, cioè la traccia di elaborato da assegnare, in formato Word, in modo che tu la possa eventualmente modificare e adattare, e PDF;
- una **traccia di risoluzione** del problema per l'insegnante, per avere sott'occhio propedeuticità e argomenti coinvolti in modo da scegliere la proposta più adatta.



Elaborato 1

Traccia

Risoluzione



Elaborato 2

Traccia

Risoluzione



Elaborato 3

Traccia

Risoluzione



Elaborato 4

Traccia

Risoluzione

LA STRUTTURA DELLA NOSTRA PROPOSTA

- **Problema** di Matematica e Fisica, come nella seconda prova scritta, articolato in quattro punti: due di Matematica e due di Fisica
- Quattro **quesiti teorici** di approfondimento, collegati al problema: due quesiti di Matematica e due di Fisica
- Uno **spunto di ricerca** che coinvolge le materie caratterizzanti (una o più), legato a un tema storico o tecnologico
- Due o più **spunti di collegamento** con altre discipline

ESEMPIO 1: PROBLEMA

In fig. 1 sono rappresentati i grafici delle seguenti funzioni:

$$B_1(x) = \frac{\mu_0}{2} INR^2 \left\{ \left[\left(x - \frac{R}{2} \right)^2 + R^2 \right]^{-\frac{3}{2}} + \left[\left(x + \frac{R}{2} \right)^2 + R^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \right\}$$

$$B_2(x) = \frac{\mu_0}{2} INR^2 \left\{ \left[\left(x - \frac{R}{2} \right)^2 + R^2 \right]^{-\frac{3}{2}} - \left[\left(x + \frac{R}{2} \right)^2 + R^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \right\}$$

Le costanti che compaiono nelle due espressioni hanno i valori: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$, $I = 1$, $N = 250$, $R = 0,1$.

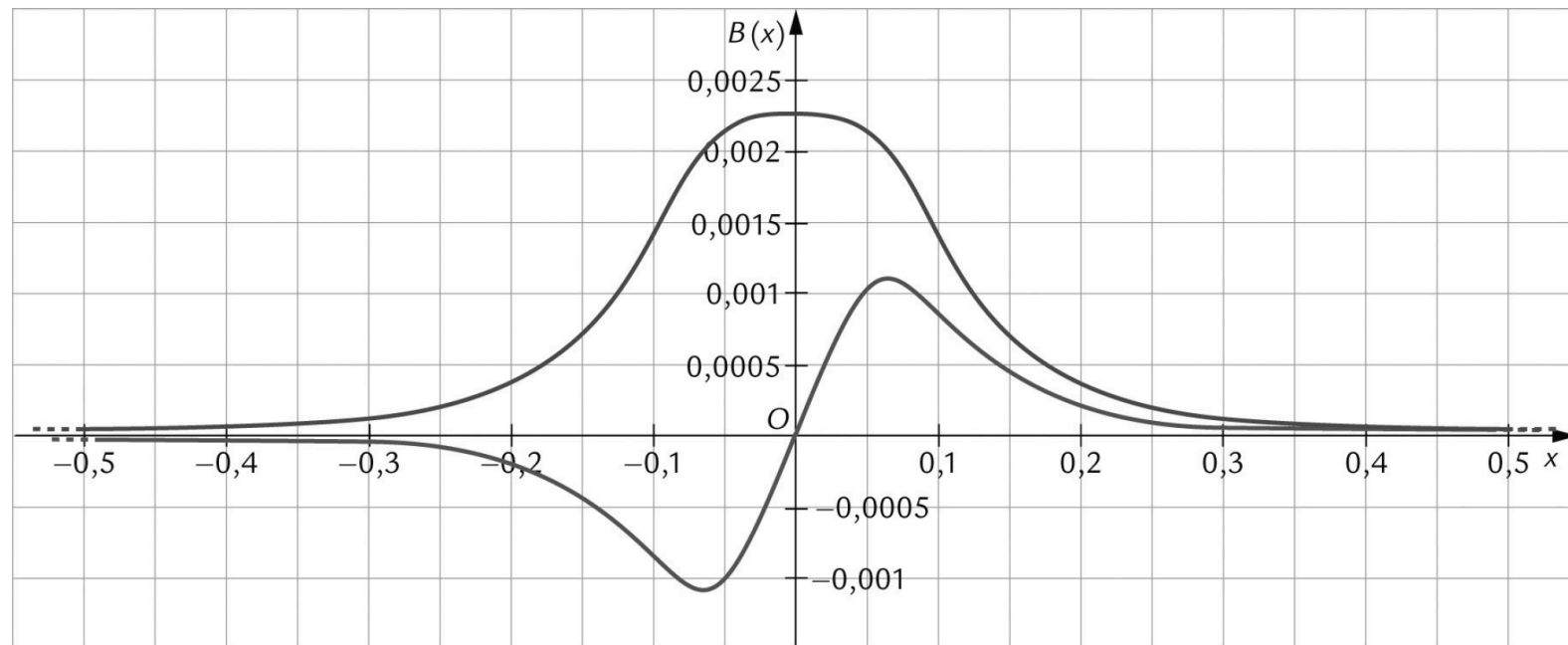


Figura 1

- 1 Associa a ciascuna funzione il grafico corrispondente e analizza le simmetrie delle due curve sia con considerazioni grafiche sia con considerazioni analitiche.
È corretto affermare che entrambe le funzioni sono infinitesime per $x \rightarrow \pm\infty$? Motiva la tua risposta con il calcolo.

ESEMPIO 1: PROBLEMA

2 Dai grafici in **fig. 1** si evidenzia, per una delle due funzioni, un solo punto stazionario di massimo assoluto. Giustifichiane la presenza con il calcolo e determina la sua ordinata, confrontandola con il valore che si può visualizzare sul grafico.

In **fig. 2** sono rappresentati i grafici delle derivate prima e seconda di una delle due funzioni precedenti: individua tale funzione e associa a ciascuna derivata il corrispondente grafico, motivando le tue scelte.

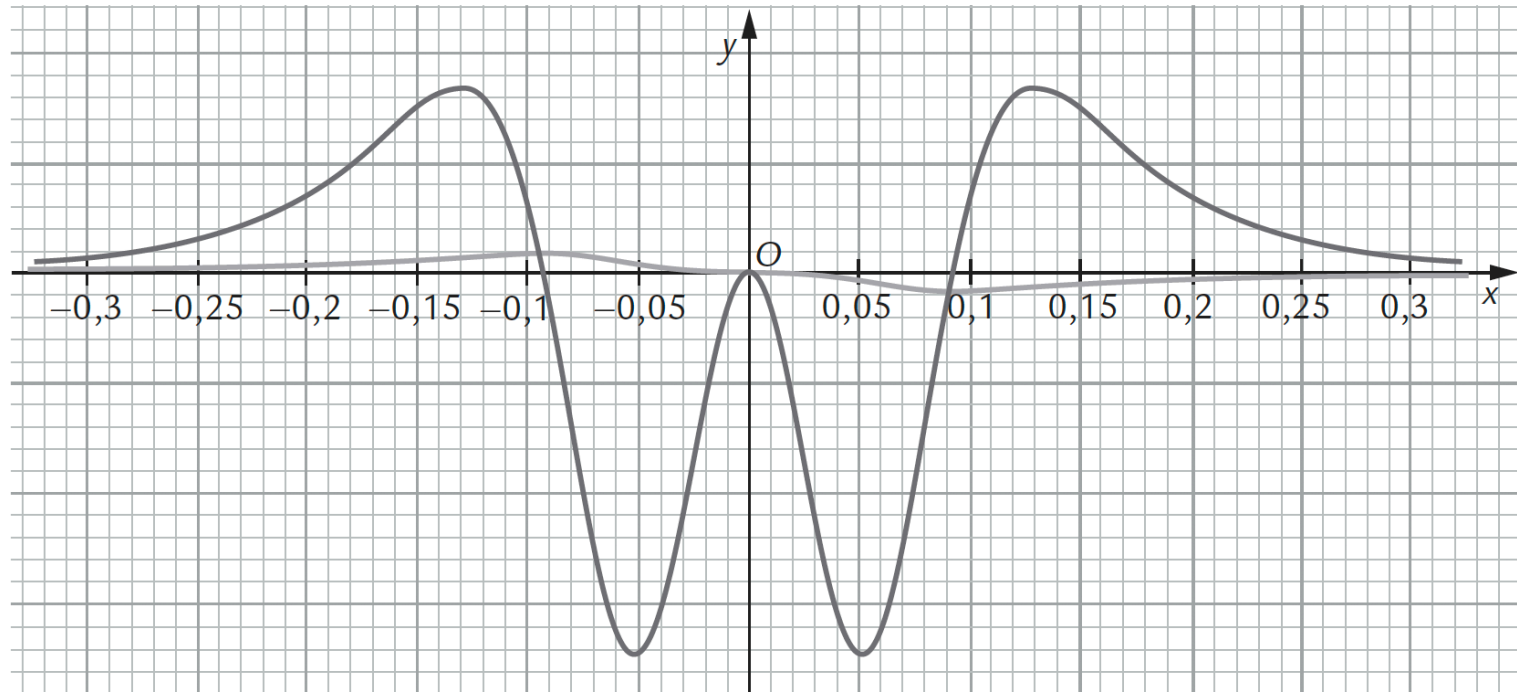


Figura 2

Sappiamo che il campo magnetico generato da una spira circolare di raggio R , percorsa da una corrente di intensità I , lungo l'asse della spira stessa, assunto come asse x , con l'origine nel centro della spira, è dato dalla relazione:

$$B(x) = \frac{\mu_0}{2} I \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Nel caso in cui, anziché una sola spira, si abbia un avvolgimento di N spire, ognuna di esse fornisce lo stesso contributo al campo magnetico, che diventa quindi: $B(x) = \frac{\mu_0}{2} IN \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Questa relazione è valida se la lunghezza dell'avvolgimento è molto minore del raggio.

Le **bobine di Helmholtz (fig. 3)** sono un dispositivo utilizzato in applicazioni in cui è necessario avere un campo magnetico uniforme in una regione di spazio relativamente estesa.

Si tratta di due avvolgimenti uguali, con lo stesso numero N di spire e lo stesso raggio R , disposti parallelamente uno all'altro, in modo tale che i loro centri si trovino a una distanza uguale al raggio R e collegati elettricamente in serie, in modo che la corrente che li percorre abbia la stessa intensità I e lo stesso verso.

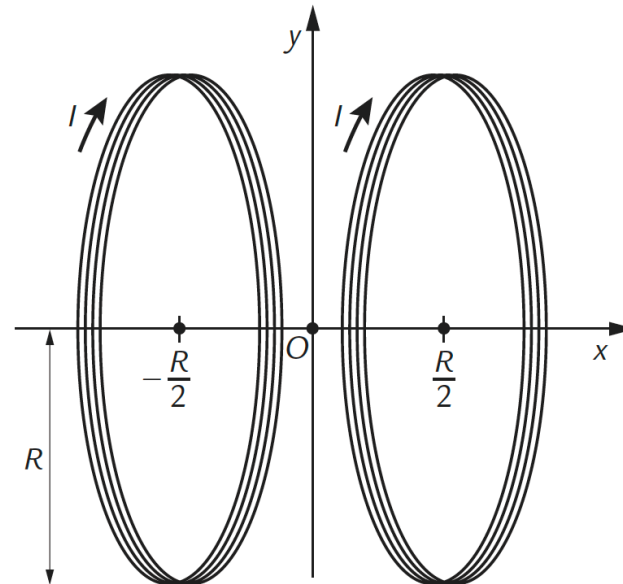


Figura 3

ESEMPIO 1: PROBLEMA

In altre situazioni viene usato un dispositivo che prende il nome di **bobine anti-Helmholtz**: si tratta dello stesso apparato, in cui però le correnti che circolano nei due avvolgimenti hanno verso opposto (fig. 4).

ESEMPIO 1: PROBLEMA

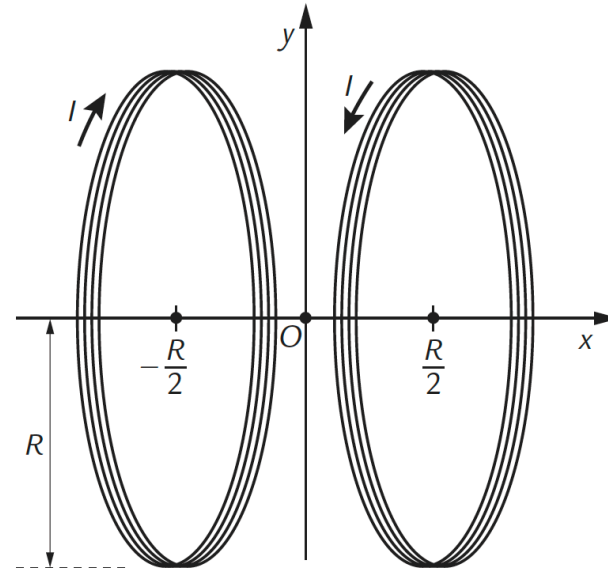


Figura 4

- 3 Scrivi l'equazione del campo magnetico $B(x)$ generato da un avvolgimento di N spire con centro nel punto di ascissa $x = -\frac{R}{2}$ e con centro nel punto di ascissa $x = \frac{R}{2}$ e mostra che un sistema di bobine di Helmholtz genera lungo l'asse x un campo la cui intensità è descritta dalla funzione $B_1(x)$, mentre un sistema di bobine anti-Helmholtz genera un campo la cui intensità è descritta dalla funzione $B_2(x)$.
- 4 Giustifica il fatto che le bobine di Helmholtz vengano usate per generare un campo magnetico approssimativamente costante nella regione di spazio compresa fra esse: per il calcolo utilizza per le grandezze fisiche i valori numerici assegnati in precedenza, con le corrette unità di misura del SI.
Giustifica infine il fatto che le bobine anti-Helmholtz vengano usate per generare un campo magnetico con andamento approssimativamente lineare con l'ascissa x , sempre nella regione di spazio compresa fra esse. Da che cosa è data la pendenza della retta che è grafico di tale andamento lineare?

ESEMPIO 1: SOLUZIONE DEL PROBLEMA

Risoluzione Problema - Bobine di Helmholtz

- 1** Il grafico interamente nel semipiano $y > 0$ è quello della funzione $B_1(x)$, mentre l'altro è quello della funzione $B_2(x)$. Dai grafici e dal calcolo si evidenzia che $B_1(x)$ è pari e $B_2(x)$ è dispari.

$$\text{Si ha: } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} B_1(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} B_2(x) = 0.$$

- 2** La derivata prima di $B_1(x)$ ha la seguente espressione:

$$B'_1(x) = \frac{-3\mu_0}{2} INR^2 \left\{ \left(x - \frac{R}{2} \right) \left[\left(x - \frac{R}{2} \right)^2 + R^2 \right]^{-\frac{5}{2}} + \left(x + \frac{R}{2} \right) \left[\left(x + \frac{R}{2} \right)^2 + R^2 \right]^{-\frac{5}{2}} \right\}$$

Si annulla per $x = 0$ e lo studio del segno assicura che si tratti di un punto di massimo.

$$\text{La sua ordinata è: } B_1(0) = \frac{8\mu_0 IN}{5\sqrt{5}R} = 2,2 \cdot 10^{-3}.$$

Le funzioni rappresentate sono le derivate di $B_1(x)$: il grafico più «piatto» è quello di $B'_1(x)$, mentre l'altro è quello di $B''_1(x)$.

- 3** Se l'avvolgimento è in posizione $x = \frac{R}{2}$, la funzione $B(x)$ prende la forma:

$$B_+(x) = B\left(x - \frac{R}{2}\right) = \frac{\mu_0}{2} INR^2 \left[\left(x - \frac{R}{2} \right)^2 + R^2 \right]^{-\frac{3}{2}}$$

Se invece è in posizione $x = -\frac{R}{2}$, la funzione $B(x)$ diventa:

$$B_-(x) = B\left(x + \frac{R}{2}\right) = \frac{\mu_0}{2} INR^2 \left[\left(x + \frac{R}{2} \right)^2 + R^2 \right]^{-\frac{3}{2}}$$

Per quanto riguarda il sistema di bobine di Helmholtz, il campo totale si trova come segue:

$$B_1(x) = B_+(x) + B_-(x)$$

Per quanto riguarda invece il sistema di bobine anti-Helmholtz, il campo totale si trova come segue:

$$B_2(x) = B_+(x) - B_-(x)$$

- 4** Dal grafico si vede che il campo $B_1(x)$ è pressoché costante nella regione $-0,05 \text{ m} < x < 0,05 \text{ m}$. Il suo valore coincide all'incirca con il suo massimo: $B_1(0) = \frac{8\mu_0 IN}{5\sqrt{5}R} = 2,2 \cdot 10^{-3} \text{ T}$.

Dal grafico di $B_2(x)$ si vede che, nella stessa regione, il campo ha un andamento pressoché lineare. La pendenza della retta grafico di tale andamento lineare è il valore della derivata $B'_2(0)$:

$$B'_2(0) = \frac{3\mu_0}{2} INR^2 \left\{ \frac{R}{2} \left[\left(-\frac{R}{2} \right)^2 + R^2 \right]^{-\frac{5}{2}} + \frac{R}{2} \left[\left(\frac{R}{2} \right)^2 + R^2 \right]^{-\frac{5}{2}} \right\} = \frac{48\mu_0 IN}{25\sqrt{5}R^2} = 2,7 \cdot 10^{-2} \text{ T/m}$$

ESEMPIO 1: QUESITI TEORICI

■ Dal problema alla teoria

- 1** Fornisci la definizione di funzione $f(x)$ infinitesima per $x \rightarrow +\infty$ e spiega il concetto di ordine di infinitesimo. Supposto che due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ siano entrambe infinitesime per $x \rightarrow +\infty$, sotto quali ipotesi è possibile calcolare il limite per $x \rightarrow +\infty$ del rapporto $\frac{f(x)}{g(x)}$ mediante il teorema di de l'Hôpital?
- 2** Fornisci la definizione di massimo assoluto di una funzione f , definita su un intervallo I . Se l'intervallo I è chiuso e limitato e la funzione f è continua, quale teorema garantisce l'esistenza del massimo assoluto di f sull'intervallo I ? Mostra con esempi che l'esistenza del massimo assoluto non è garantita se l'intervallo I non è chiuso o non è limitato oppure se f non è continua. Considera poi una funzione $f(x)$, continua sull'intervallo $[0, +\infty)$ e infinitesima per $x \rightarrow +\infty$: è vero che una funzione che gode di queste proprietà ammette certamente massimo assoluto? Giustifica opportunamente la risposta oppure esibisci un controesempio.
- 3** Due bobine opportunamente accoppiate possono essere utilizzate per costruire un trasformatore: descrivi e spiega il funzionamento di questo oggetto.
- 4** Una bobina che ruota in un campo magnetico può essere usata per produrre una corrente alternata: tratta la questione.

ESEMPIO 1: SPUNTI DI RICERCA E COLLEGAMENTO

■ Dal problema alla ricerca

La produzione e il trasporto della corrente elettrica, dalle centrali fino alle utenze domestiche e industriali.

■ Dal problema alle altre discipline

- 1** (Storia) L'utilizzo della corrente elettrica nell'industria, nei trasporti e nelle abitazioni come causa di cambiamenti a livello sociale ed economico.
- 2** (Scienze) La produzione di corrente elettrica come causa di inquinamento atmosferico e mutamenti ambientali.

■ Problema - Accelerazione di un elettrone

Alcune misure di laboratorio indicano che un elettrone esce da un acceleratore lineare con una velocità finale $v_F = 0,40c$, dove c indica la velocità della luce nel vuoto, e percorre una distanza $\Delta s = 12$ cm, prima di impattare su uno schermo.

1 Calcola:

- in quanto tempo l'elettrone percorre la distanza Δs nel sistema di riferimento del laboratorio;
- la distanza $\Delta s'$ che percorre lo schermo, nel sistema di riferimento dell'elettrone, tra l'istante in cui l'elettrone non si trova più all'interno dell'acceleratore e la collisione dell'elettrone con lo schermo stesso.

Considera la seconda legge della dinamica di Newton scritta in forma relativistica:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Con $\vec{p} = m\gamma\vec{v}$, dove m rappresenta la massa a riposo dell'elettrone, cioè $m = 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg.

Quando la velocità è parallela alla forza, si dimostra che l'equazione precedente assume la forma:

$$F = m \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \frac{dv}{dt} \quad [1]$$

L'elettrone, inizialmente in quiete, è stato accelerato dall'azione di un campo elettrico uniforme \vec{E} , di intensità E , lungo la direzione dell'asse x .

2 Dimostra che il modulo a dell'accelerazione dell'elettrone è espresso dalla formula:

$$a = \frac{eE}{m} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} \quad [2]$$

essendo $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$ C.

Determina una formula semplificata per l'accelerazione nei seguenti due casi:

- se v è molto minore di c ,
- se v tende a c .

In entrambi i casi interpreta i risultati ottenuti dal punto di vista fisico.

ESEMPIO 2: PROBLEMA

ESEMPIO 2: PROBLEMA

- 3** Una possibile espressione per la velocità in funzione del tempo è la seguente:

$$v(t) = \frac{At}{\sqrt{1 + \left(\frac{At}{c}\right)^2}} \quad [3]$$

dove $A = \frac{eE}{m}$. Tenendo conto che la [2] si può scrivere nella forma equivalente:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{eE}{m} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} \quad [4]$$

verifica, derivando e sostituendo, che la funzione $v(t)$ definita dalla [3] soddisfa la relazione [4] e calcola il limite della funzione $v(t)$ quando $t \rightarrow +\infty$, commentando il risultato ottenuto.

Calcola il valore della costante A quando $E = 5 \cdot 10^5$ N/C, approssimandolo a una sola cifra significativa; in corrispondenza del valore di A così ottenuto, scrivi l'equazione della legge oraria $x(t)$ dell'elettrone soggetto all'azione del campo elettrico, sapendo che nell'istante $t = 0$ esso si trova nell'origine. Per quali valori di t è definita la legge oraria trovata, in relazione alla situazione fisica descritta?

- 4** Supponi ora che A e c siano due generiche costanti reali positive e, indipendentemente da ogni riferimento fisico, studia in modo completo la funzione $y = v(t)$, con $t \in \mathbf{R}$, tracciandone un grafico qualitativo. Scrivi in particolare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di flesso.

ESEMPIO 2: QUESITI TEORICI

■ Dal problema alla teoria

- 1** Dato un corpo in moto rettilineo che si muove secondo la legge oraria $s(t)$, giustifica, in base alla definizione di derivata di una funzione in un punto, per quale motivo la velocità e l'accelerazione del corpo nell'istante t sono uguali rispettivamente a $s'(t)$ ed $s''(t)$.
- 2** Definisci il concetto di limite finito di una funzione $f(x)$ (reale di variabile reale) per $x \rightarrow +\infty$. Fornisci inoltre l'esempio di una funzione $f(x)$ per cui non esiste il limite per $x \rightarrow +\infty$.
- 3** Spiega perché, in generale, nella relatività ristretta, forza e accelerazione non sono necessariamente parallele e soffermati in particolare sul caso in cui lo sono.
- 4** Illustra un modo per accelerare un elettrone.

ESEMPIO 2: SPUNTI DI RICERCA E COLLEGAMENTO

■ Dal problema alla ricerca

Gli acceleratori e gli esperimenti al CERN di Ginevra.

■ Dal problema alle altre discipline

- 1** (Storia) Il CERN e le altre convenzioni internazionali dopo la Seconda Guerra Mondiale come albori dell'UE.
- 2** (Filosofia/Storia) Il ruolo della scienza nell'unificazione dei popoli.

ESEMPIO 3: PROBLEMA

■ Problema - Distribuzione di Maxwell-Boltzmann

La distribuzione delle velocità delle molecole in un gas a temperatura T è descritta dalla funzione di Maxwell:

$$N(v) = \frac{4N_t}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2K_B T} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2K_B T}}$$

dove N_t indica il numero totale di molecole, m è massa di una singola molecola del gas, K_B è la costante di Boltzmann e T è la temperatura espressa in scala Kelvin.

Il significato della funzione $N(v)$ è il seguente: il numero di molecole con velocità di modulo compreso tra v e $v + dv$ è $N(v)dv$.

- 1** Studia la funzione $N(v)$ in tutto il suo dominio, indipendentemente dalla situazione fisica, illustrandone le caratteristiche, e tracciane un grafico qualitativo. Specifica qual è il tratto della funzione di interesse per il problema. Determina in particolare il valore della velocità più probabile, cioè quello a cui corrisponde il maggior numero di molecole; illustra come varia quest'ultimo valore della velocità al variare della temperatura del gas e della massa delle molecole.
- 2** Spiega, in relazione al contesto, il significato dell'integrale:

$$\int_0^{+\infty} N(v)dv \quad [*]$$

Illustra, senza eseguire il calcolo, il procedimento necessario per calcolare la percentuale di molecole con velocità compresa tra due dati valori v_1 e v_2 della velocità.

Mostra che, con il cambiamento di variabile $x = \sqrt{\frac{mv^2}{2K_B T}}$, l'integrale [*] equivale a:

$$\int_0^{+\infty} ax^2 e^{-x^2} dx, \text{ con } a = \frac{4N_t}{\sqrt{\pi}}$$

Calcola infine il valore di quest'ultimo integrale, mediante un'opportuna integrazione per parti, tenendo presente che:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

ESEMPIO 3: PROBLEMA

3 Il valore medio della velocità v è dato da:

$$v_m = \frac{\int_0^{+\infty} vN(v)dv}{N_t}$$

Effettuando la stessa sostituzione del punto 2, verifica con il calcolo che:

$$v_m = \sqrt{\frac{8K_B T}{\pi m}}$$

[**]

e confronta tale valore medio con il valore più probabile individuato al punto 1.

4 Considera i protoni del nucleo solare ($T = 1,5 \cdot 10^7$ K). Confronta il valore medio delle loro velocità, ricavato tramite la formula [**], con la velocità necessaria a due protoni per avvicinarsi l'un l'altro a distanza $r = 2$ fm. Commenta opportunamente i risultati trovati.

Costanti

Costante di Boltzmann $K_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K

Massa del protone $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg

Costante elettrostatica $k = 8,998 \cdot 10^9$ Nm²/C²

Carica del protone $q_p = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C

ESEMPIO 3: QUESITI TEORICI

■ Dal problema alla teoria

1 Fornisci la definizione di derivata in un punto di una funzione $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ e spiega perché il calcolo della velocità istantanea è collegato al concetto di derivata.

2 Nel problema precedente è stata utilizzato il seguente risultato:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Al primo membro compare un integrale improprio: illustra i vari tipi di integrali impropri che conosci ed enuncia qualche criterio che ne garantisce la convergenza. Giustifica in particolare, in base a uno di tali criteri, il fatto che l'integrale $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ è convergente.

3 Illustra i concetti di variabile aleatoria e di densità di probabilità. Quali proprietà deve avere una funzione $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ per potere essere una densità di probabilità? La funzione $N(v)$ del problema precedente è una densità di probabilità? E la funzione normalizzata $\frac{1}{N_t} N(v)$?

ESEMPIO 3: SPUNTI DI RICERCA E COLLEGAMENTO

■ Dal problema alla ricerca

La distribuzione di Maxwell-Boltzmann, che abbiamo illustrato nel problema precedente, si può ricavare a partire dalla distribuzione delle velocità in una sola direzione che si verifica essere *gaussiana*. La distribuzione di Gauss è il modello adatto a interpretare una vasta gamma di fenomeni: illustrane alcuni. Ricerca l'enunciato e il significato del «teorema limite centrale» e spiega perché tale teorema giustifica l'utilizzo del modello gaussiano in svariati ambiti.

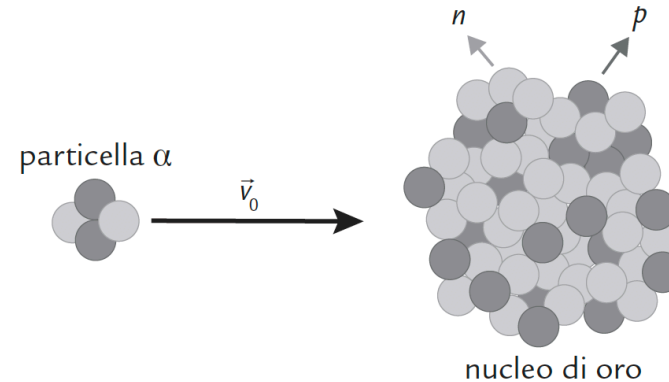
■ Dal problema alle altre discipline

- 1 (Italiano/Storia dell'arte) Il tema della velocità nel futurismo.
- 2 (Storia dell'arte) Velocità intesa come velocità di pennellata. I macchiaioli.
- 3 (Italiano) Il tema della velocità (la velocità dei tempi di produzione dettata dalle macchine) in *Una visita in fabbrica* di Vittorio Sereni. Il quarto numero della rivista *Il Menabò*, in cui è affrontato il rapporto tra società industriale e letteratura.
- 4 (Fisica/Filosofia) La teoria della relatività e le opere di Bergson. Collegamento con la filosofia antica: i paradossi di Zenone.
- 5 (Storia) La strategia della guerra lampo nella prima e nella seconda guerra mondiale. Analisi storica della velocità dei mutamenti industriali, tecnologici e socioculturali nel secondo dopoguerra.

■ Problema - Esperimento di Rutherford

Nell'esperimento di Rutherford una particella α (nucleo di elio, numero atomico 2), emessa da una sorgente radioattiva, viene lanciata (frontalmente) contro un nucleo di oro (numero atomico 79).

ESEMPIO 4: PROBLEMA



- 1 Detta \vec{v}_0 la velocità iniziale della particella, descrivi qualitativamente il suo moto nel campo elettrico del nucleo di oro (trascurando la forza di gravità). Indicata con r la distanza della particella dal nucleo, ricava, motivando opportunamente le formule utilizzate, l'espressione analitica del modulo v della sua velocità in funzione di r (utilizza le formule non relativistiche, senza specificare il valore delle costanti).
- 2 Giustifica il fatto che esiste una posizione della particella di massimo avvicinamento al nucleo, cioè di minima distanza r_{\min} da quest'ultimo.

Calcola tale distanza r_{\min} , utilizzando i seguenti valori:

$$v_0 = 1,53 \cdot 10^7 \text{ m/s} \quad k = 8,998 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2 \quad e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad m_\alpha = 6,645 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

Fornisci la definizione di lavoro per una forza qualsiasi. Applica tale definizione per calcolare il lavoro compiuto dal campo elettrico nel moto della particella dalla posizione iniziale r_0 alla posizione finale r_{\min} . Verifica che tale lavoro coincide con l'opposto della variazione di energia potenziale elettrica, commentando i risultati ottenuti in relazione alla situazione in esame.

ESEMPIO 4: PROBLEMA

- 3** Studia la funzione $v(r)$ che esprime v al variare di r indipendentemente dal problema fisico, commentandone opportunamente tutte le caratteristiche e tracciane un grafico qualitativo (senza esplicitare il valore delle costanti fondamentali). Evidenzia, motivando la risposta, il tratto della funzione rilevante per il problema fisico.
- 4** Posto $x = \frac{r}{r_{\min}}$, supponi di approssimare l'andamento della funzione $v(x)$ con quello della funzione così definita:

$$f(x) = \begin{cases} v_0 \sqrt{1 - \frac{(x-7)^2}{36}} & 1 \leq x < 7 \\ v_0 & x \geq 7 \end{cases}$$

Verifica che la funzione $f(x)$ è continua nel suo dominio e che ha comportamento analogo a quello di $v(x)$ per $x \rightarrow 1$ e per $x \rightarrow +\infty$. Spiega se e come è possibile tracciare il grafico di $f(x)$ senza ricorrere allo studio completo di funzione.

Calcola l'area sottesa dal grafico di $f(x)$ nell'intervallo $[2, 7]$.

ESEMPIO 4: QUESITI TEORICI

■ Dal problema alla teoria

- 1** Nella trattazione dell'esperimento di Rutherford, in cui la particella ha energia di circa 7 MeV, sono contenute due approssimazioni:
 - a. si trascura la forza di gravità;
 - b. si svolge una trattazione non-relativistica.Discuti la validità di tali approssimazioni.
- 2** Discuti la conservazione dell'energia meccanica in riferimento al problema trattato e fornisci altri esempi di fenomeni in cui tale principio è applicabile.
- 3** Dopo aver riportato la definizione di derivata prima di una funzione in un punto, definisci il significato fisico della derivata seconda di $v(r)$ e dei suoi zeri.
- 4** Spiega quando una funzione $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ si dice derivabile in un punto x_0 . In riferimento alla funzione f al punto 4 del problema precedente, stabilisci, motivando opportunamente la risposta, se essa è derivabile nel suo dominio e classifica gli eventuali punti di non derivabilità.

ESEMPIO 4: SPUNTI DI RICERCA E COLLEGAMENTO

■ Dal problema alla ricerca

L'emissione di particelle α dal radon e il problema della radioattività ambientale.

■ Dal problema alle altre discipline

- 1** (Scienze) Gli effetti delle radiazioni ionizzanti sulla materia vivente e le mutazioni genetiche.
- 2** (Storia/ Filosofia/Letteratura Italiana) Gli effetti della bomba atomica, il dibattito sul ruolo della scienza e le posizioni di scienziati e intellettuali: il manifesto di Einstein-Russel, le dichiarazioni di Robert Oppenheimer, il pamphlet «*Pro e contro la bomba atomica*» di Elsa Morante, «*La scomparsa di Majorana*» di Sciascia.
- 3** (Storia/Scienze) Hiroshima e Nagasaki, con riferimento soprattutto all'epilogo della seconda guerra mondiale, il Progetto Manhattan, il disastro di Chernobyl.
- 4** (Storia dell'arte) *Guernica* di Picasso.

la
SCUOLA 

Grazie