

INSEGNARE MATEMATICA



INSEGNARE MATEMATICA

WEBINAR

Insegnare con... Matematica allo specchio

Relatori: Pierangela Accomazzo, Claudio Zanone,
Leonardo Sasso, Cristina Giuliano Albo



Quale idea di matematica?

- Una matematica a misura di studente, illustrata con un linguaggio amichevole ma rigoroso
- Una matematica che parta da problemi, volta non solo all'acquisizione delle tecniche di calcolo, ma soprattutto alla formazione di competenze
- Una matematica con una forte valenza sia strumentale sia culturale



Una veste didattica nuova

- Lezioni su doppia pagina
- Attività per esplorare la matematica
- Esercizi suddivisi per competenze crescenti
- Scelte originali nel percorso didattico



Lezione “a specchio”

Lezione 4

IMPARA ►

Presta attenzione al fatto che le variabili sono x e y , mentre k è la lettera con cui identifichiamo un numero che si ritiene costante. In altre parole, al variare di x e y contemporaneamente, il loro rapporto k assume sempre lo stesso valore.

Osserva che questa funzione, scritta così, è definita anche per $x = 0$.

Proporzionalità diretta

1 Funzione di proporzionalità diretta

Introduciamo in questa lezione un concetto importante per affrontare molti problemi che incontriamo nel quotidiano, come ad esempio il costo di un bene al variare della quantità acquistata, l'interesse maturato al variare del capitale investito, l'allungamento di una molla al variare della massa appesa e così via.

DEFINIZIONE Variabili direttamente proporzionali

Due variabili x e y si dicono **direttamente proporzionali** quando il loro rapporto si mantiene costante ed è diverso da zero. In simboli:
 $\frac{y}{x} = k$, con $k \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Il rapporto k viene detto **costante di proporzionalità**.

Un altro modo per esprimere lo stesso concetto è dire che quando raddoppia x raddoppia anche y , quando triplica x triplica anche y , quando si dimezza x si dimezza anche y e così via.

Una relazione di proporzionalità diretta tra due variabili identifica una **funzione di proporzionalità diretta**, come indicato nella seguente definizione.

DEFINIZIONE Funzione di proporzionalità diretta

Un'equazione del tipo $y = kx$, con $k \in \mathbb{R} - \{0\}$, definisce una **funzione di proporzionalità diretta**.

La relazione di proporzionalità diretta, scritta in questo modo, diventa l'equazione di una funzione, che ha come dominio e come insieme immagine tutto l'insieme $\mathbb{R}$.

Esempio 10 - Proporzionalità diretta

La Tab. 5 riporta le misure relative all'allungamento a di una molla disposta verticalmente, corrispondente al valore di una massa M che viene appesa alla molla.

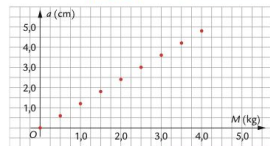
M (kg)	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
a (cm)	0,0	0,6	1,2	1,8	2,4	3,0	3,6	4,2	4,8

► TABELLA 5

Sussiste una relazione di proporzionalità diretta tra le due grandezze a e M ? Calcoliamo i rapporti tra diversi valori di a e i corrispondenti valori di M , che riportiamo in una terza riga, come in Tab. 6.

M (kg)	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
a (cm)	0,0	0,6	1,2	1,8	2,4	3,0	3,6	4,2	4,8
a/M (cm/kg)	–	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2

► TABELLA 6



Osserva che, a parte il caso in cui la molla è a riposo, in cui a non può essere calcolato, negli altri casi il rapporto è sempre uguale a 1,2 cm/kg. Si tratta quindi di una funzione di proporzionalità diretta, di equazione:

$$a = 1,2 M$$

Rappresentando i punti di coordinate $(a; M)$ sul piano cartesiano, otteniamo il grafico in Fig. 11.

◀ FIGURA 11

► TEORIA

► RIFLETTI SULLA TEORIA

UNITÀ 5 | Le funzioni

Riconoscere una relazione di proporzionalità diretta

23 Stabilisci se le tabelle seguenti individuano relazioni di proporzionalità diretta e, in caso affermativo, determina la costante di proporzionalità.

a.	x	1,2	-4,0	2,5	-3,0	-1,7	3,2
	y	-2,4	8,0	-5,0	6,0	3,4	-6,4
b.	a	-0,7	5/4	1,2	3/5	10/9	-2,4
	b	-7/40	5/16	0,3	0,15	0,29	-0,6

c.	p	0	-2	3	-4	5	-6
	q	0	1,5	-2,25	3	-3,75	4,5
d.	α	150	60	72	90	18	54
	β	60	24	28,8	36	7,5	22,4

24 Completa le tabelle seguenti in modo che rappresentino relazioni di proporzionalità diretta.

a.	x	0	3	-1	4	10	7	1,25	-20	30
	y	0	-3,6	1,2	-4,8	-12	-8,4	-1,5	24	-36
b.	x	-1	2	20	3	-10	-5	8	12	40
	y	-2,5	5	50	7,5	-25	-12,5	20	30	100

25 ESERCIZIO SVOLTO Considera la formula per calcolare l'area di un triangolo, date la base b e l'altezza h :
 $A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$. Supponi di fissare una delle tre variabili: riconosci relazioni di proporzionalità diretta tra le altre due?

SOLUZIONE

Consideriamo dapprima A e b variabili, supponendo invece che l'altezza h del triangolo assuma un valore fissato, ad esempio 10 cm; puoi notare che il rapporto tra A e b , in questo caso, è sempre uguale a 5 cm, quindi costante. Fissato h , dunque, A e b sono direttamente proporzionali.

Un ragionamento analogo conduce alla conclusione che, se fissiamo il valore della base b e facciamo variare h , anche A e h risultano direttamente proporzionali.

FISICA

26 La legge di Stevin esprime la pressione p esercitata da un liquido a profondità h , in base alla formula: $p = \rho g h$, dove ρ rappresenta la densità del liquido, g l'accelerazione di gravità (che è una costante e vale circa 9,8 m/s²) e h è appunto la profondità. In questa formula sono presenti relazioni di proporzionalità diretta?

[Sì: la pressione è direttamente proporzionale alla densità ρ del liquido e alla profondità h .]

27 Quando in un circuito elettrico si inseriscono due resistenze elettriche collegate in serie, cioè una di seguito all'altra, la resistenza equivalente è data dalla somma delle resistenze di partenza: $R_e = R_1 + R_2$. Possiamo affermare che R_e è direttamente proporzionale a R_1 ? E a R_2 ? Motiva la tua risposta.

Risolvere problemi di proporzionalità diretta

28 ESERCIZIO SVOLTO ECONOMIA In un negozio di abbigliamento è in corso una promozione per cui su tutti i capi viene praticato uno sconto del 20%. È vero che tra il prezzo pieno e il prezzo scontato sussiste una relazione di proporzionalità diretta? In caso affermativo scrivi l'equazione della corrispondente funzione e calcola il prezzo scontato di tre articoli che costano rispettivamente 48 euro, 75 euro e 129 euro.

SOLUZIONE

Se lo sconto applicato è del 20%, significa che il prezzo scontato è l'80% del prezzo pieno, quindi per trovare il prezzo scontato s occorre moltiplicare per 0,8 il prezzo pieno p . Si tratta di una relazione di proporzionalità diretta, la cui equazione è: $s = 0,8 \cdot p$.

I tre prezzi richiesti sono: 48 euro $\cdot$ 0,8 = 38,40 euro; 75 euro $\cdot$ 0,8 = 60 euro; 129 euro $\cdot$ 0,8 = 103,20 euro.

29 NELLA REALTÀ Per cucinare gli spaghetti alla carbonara per 4 persone, a parte olio, sale e pepe, che di solito non sono quantificati in modo preciso, sono necessari i seguenti ingredienti: 500 g di spaghetti, 200 g di guanciale, 4 uova e 30 g di pecorino grattugiato. Ricava il quantitativo di ogni ingrediente necessario per cucinare lo stesso piatto per 5 o 6 persone.



ESERCIZI PAG. 244

225



Lezione "a specchio"

Lezione 4

TEORIA

Introduzione ai sistemi lineari

Prendiamo di nuovo in considerazione un'equazione lineare scritta nella forma $f(x) = g(x)$, o anche $ax + b = cx + d$. Come abbiamo visto nella **Lezione 2**, la sua soluzione, se esiste, rappresenta l'ascissa del punto di intersezione tra le due rette di equazione $y = ax + b$ e $y = cx + d$. Una volta determinato il valore di quest'ascissa, è possibile trovare il valore della corrispondente ordinata.

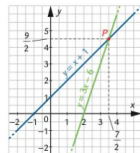


FIGURA 3

Esempio 9 - Punto di intersezione di due rette

Riprendiamo il caso esaminato nella **Lezione 2**.
 $3x - 6 = x + 1 \Leftrightarrow$ intersezione tra le rette $y = 3x - 6$ e $y = x + 1 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$.
 Sostituendo il valore di x in una delle due equazioni, ad esempio nell'equazione $y = 3x - 6$, troviamo: $y = 3 \cdot \frac{7}{2} - 6 = \frac{21 - 12}{2} = \frac{9}{2}$.
 Quindi il punto di intersezione tra le due rette ha coordinate $(\frac{7}{2}, \frac{9}{2})$ (Fig. 3).

Con queste considerazioni abbiamo determinato una coppia di numeri che, da un lato, rappresentano le coordinate di un punto e, dall'altro, rendono verificate contemporaneamente le due equazioni $y = 3x - 6$ e $y = x + 1$.

Con le due equazioni date possiamo costruire un sistema di equazioni lineari.

COLLEGAMENTI
 Un sistema è un enunciato aperto in due variabili, composto dalla congiunzione logica di altri due enunciati aperti in due variabili che sono le sue equazioni. Quindi la scrittura a fianco equivale a:
 $y = ax + b \wedge y = cx + d$.

DEFINIZIONE Sistema di equazioni lineari

Un sistema di equazioni lineari è un insieme di equazioni lineari che devono essere verificate contemporaneamente.

In simboli, nel caso di due equazioni nelle incognite x e y , si scrive:

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = cx + d \end{cases} \quad \text{E2 - E3} \rightarrow$$

L'esempio precedente suggerisce un metodo di risoluzione generale: se i due valori di y devono essere uguali, per la proprietà transitiva dell'uguaglianza, deve anche essere: $ax + b = cx + d$. Dopo aver determinato x da questa equazione, possiamo sostituire il suo valore in una delle due equazioni del sistema e determinare y . Un sistema come questo, con due incognite, ha quindi come soluzioni coppie ordinate (x, y) . Non sempre un sistema lineare ha una sola soluzione. Le rette che rappresentano le sue equazioni potrebbero infatti essere parallele. Riassumiamo in una tabella i casi che si possono presentare. **E7 - E8** $\rightarrow$

Sistema determinato	Sistema indeterminato	Sistema impossibile
Le due rette non sono parallele e hanno un solo punto di intersezione $P(x_1, y_1)$.	Le due rette coincidono: hanno infiniti punti di intersezione.	Le due rette sono parallele e distinte: non hanno punti di intersezione.
Il sistema ha una sola soluzione, che è la coppia (x_1, y_1) . $S = \{(x_1, y_1)\}$	Il sistema ha infinite soluzioni, rappresentate dalle coordinate (x, y) dei punti della retta. $S = \emptyset$	Il sistema non ha soluzioni. $S = \emptyset$

348

RIFLETTI SULLA TEORIA

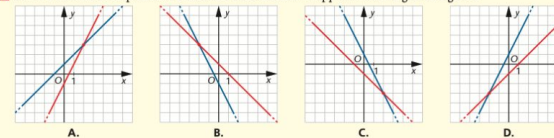
UNITÀ 7 | Le equazioni e i problemi lineari

Interpretare graficamente sistemi di equazioni lineari

Rappresenta graficamente i seguenti sistemi di equazioni lineari.

E2 $\begin{cases} y = 10x - 2 \\ y = -x - 2 \end{cases}$ E3 $\begin{cases} y = -2x + 1 \\ y = 4x + 1 \end{cases}$ E4 $\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$ E5 $\begin{cases} -x + y - 2 = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$

E6 E7 Scrivi le corrispondenti a ciascuna delle situazioni rappresentate nei grafici seguenti.



Riconoscere soluzioni di un sistema lineare

Per ognuno dei seguenti sistemi, stabilisci se la coppia indicata a fianco è soluzione o meno.

E7 $\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases}$ $(-2; -1)$ [No] E8 $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$ $(1; \frac{1}{3})$ [Sì] E9 $\begin{cases} 4x - y + 5 = 0 \\ 2x + y + 1 = 0 \end{cases}$ $(-1; 1)$ [Sì]

Risolvere sistemi lineari

E10 ESERCIZIO SVOLTO Risolvi il seguente sistema: $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + y - 10 = 0 \end{cases}$
SOLUZIONE
 Scriviamo y in funzione di x in entrambe le equazioni: $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -x + 10 \end{cases}$
 Uguagliamo i secondi membri delle equazioni: $2x + 1 = -x + 10 \Leftrightarrow 3x = 9 \Leftrightarrow x = 3$
 Sostituiamo in una delle equazioni del sistema (ad esempio nella seconda) il valore trovato:
 $\begin{cases} x = 3 \\ y = -3 + 10 = 7 \end{cases}$ La soluzione è quindi la coppia: $(3; 7)$ $S = \{(3; 7)\}$

Risolvere i seguenti sistemi lineari.

E11 $\begin{cases} x - 2y = -1 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$ $(\frac{3}{7}; \frac{5}{7})$ E12 $\begin{cases} x - 2y = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$ [Indeterminato] E13 $\begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ 9x - 6y = 5 \end{cases}$ [Impossibile]

Risolvere problemi il cui modello algebrico è un sistema lineare

E14 ESERCIZIO SVOLTO ECONOMIA Marianna confeziona collane con perline di vetro simili a quella in figura. Le perline grandi costano 0,80 euro ciascuna e quelle piccole 0,20 euro ciascuna. Marianna ha comprato in totale 230 perline, spendendo 94 euro. Quante perline di ciascun tipo ha acquistato?

SOLUZIONE
Dati e relazioni
 Costo perline grande = 0,80 euro
 Costo perline piccola = 0,20 euro
 Numero perline comprate = 230
 Spesa totale = 94 euro
Sceita delle incognite: numero perline piccole = p ; numero perline grandi = g
Domio: $\{(p; g) | p, g \in \mathbb{N}, 0 \leq p \leq 230, 0 \leq g \leq 230\}$
Grandezze: costo totale perline piccole = $0,20 \cdot p$; costo totale perline grandi = $0,80 \cdot g$;
 costo totale = $0,20 \cdot p + 0,80 \cdot g$; numero totale perline = $p + g$
Sistema: $\begin{cases} 0,20 p + 0,80 g = 94 \\ p + g = 230 \end{cases}$
Risoluzione del sistema: risolvendo il sistema si trova $p = 150$ e $g = 80$
Accettabilità della soluzione: la soluzione è accettabile
Risposta: Marianna ha acquistato 150 perline piccole e 80 perline grandi.



ESERCIZI PAG. 367

349



Lezione “a specchio”

Lezione 2

Esplora con GeoGebra l'eccentricità dell'iperbole

Eccentricità e iperbole equilatera

1 L'eccentricità di un'iperbole

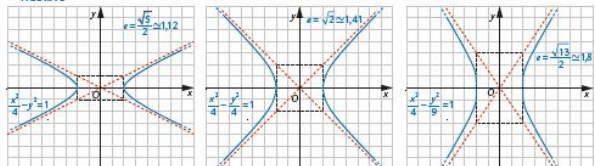
Anche per l'iperbole, come per l'ellisse, possiamo definire l'eccentricità: $e = \frac{\text{semidistanza focale}}{\text{semiasse trasverso}}$.

A seconda che i fuochi stiano sull'asse x o sull'asse y , l'eccentricità di un'iperbole è quindi data da: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$ oppure $e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b}$.

In tal modo si ottiene un numero $e > 1$.

Anche per l'iperbole, come per l'ellisse, l'eccentricità fornisce informazioni su quanto la curva è «schacciata». In Fig. 3 sono mostrati alcuni casi, da cui è evidente che, più l'eccentricità è grande, più l'iperbole è aperta, cioè meno è schiacciata.

FIGURA 3



Esplora con GeoGebra l'iperbole equilatera

2 L'iperbole equilatera

Quando un'iperbole ha i semiasse congruenti, cioè se $a = b$, si dice che è un'iperbole equilatera.

A seconda che essa abbia i fuochi sull'asse x o sull'asse y , la sua equazione prende la forma: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ oppure $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$.

Ne risulta che un'iperbole equilatera ha le seguenti caratteristiche:

- la semidistanza focale è $c = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$;
- gli asintoti sono le bisettrici dei quadranti: $y = \pm \frac{a}{a}x \Leftrightarrow y = \pm x$;
- l'eccentricità è la stessa per tutte le iperbole equilatera: $e = \frac{c}{a} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$.

Nelle Figg. 4 e 5 sono illustrate queste caratteristiche per le iperbole equilatera con i fuochi sull'asse x e sull'asse y .

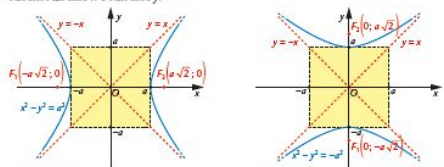


FIGURA 4

FIGURA 5

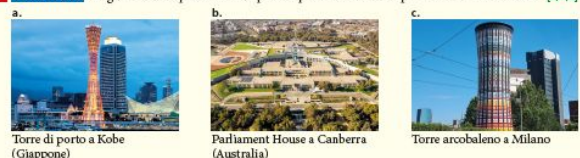
TEORIA

RIFLETTI SULLA TEORIA

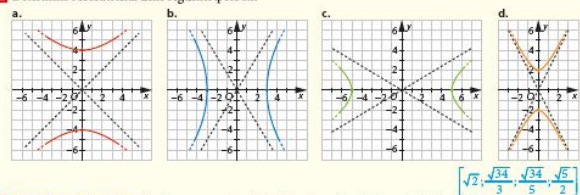
UNITÀ 10 | L'iperbole

Valutare e determinare l'eccentricità di un'iperbole

27 NELLA REALTÀ I seguenti edifici presentano un profilo iperbolico. Ordinali per eccentricità crescente. [b, a, c]



28 Determina l'eccentricità delle seguenti iperboli.



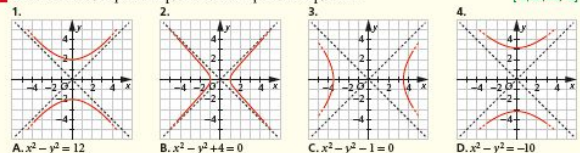
29 ATTIVITÀ CON GEOGEBRA Studia come varia un'iperbole al variare dell'eccentricità.

- Definisci una costante $a = 3$, che rappresenta il semiasse trasverso di un'iperbole.
- Crea uno slider e , che rappresenta l'eccentricità dell'iperbole, variabile da 1 a 10 con incremento 0,1; imposta le sue proprietà di animazione in modo che la ripetizione sia Crescente (una volta).
- Definisci una variabile $c = a \cdot e$, che rappresenta la semidistanza focale dell'iperbole.
- Definisci una variabile $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, che rappresenta il semiasse non trasverso dell'iperbole.
- Rappresenta i fuochi $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$ e disegna l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- Disegna gli asintoti, di equazioni $y = \frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$.
- Porta e a 1, attiva la traccia sull'iperbole e avvia l'animazione di e .

Come variano i fuochi all'aumentare di e ? Si allontanano sempre di più. Che tipo di iperboli ottieni? Sempre più aperte all'aumentare di e .

Riconoscere e rappresentare iperboli equilatera

30 Associa a ciascuna iperbole equilatera la corrispondente equazione.



A. $x^2 - y^2 = 12$ B. $x^2 - y^2 + 4 = 0$ C. $x^2 - y^2 - 1 = 0$ D. $x^2 - y^2 = -10$

Rappresenta graficamente le iperboli che hanno le seguenti equazioni.

- 31 $x^2 - y^2 = 25$ 32 $y^2 - x^2 = \frac{1}{4}$ 33 $x^2 - y^2 = -\frac{16}{9}$ 34 $4x^2 - 4y^2 = 25$

ESERCIZI PAG. 616 597



Lezione “a specchio”

Lezione 4

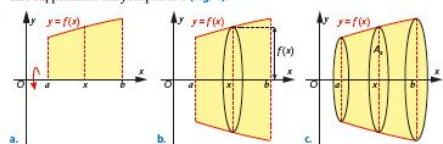
Calcolo di volumi

Esplora con GeoGebra Volume di un solido di rotazione

1 Solidi di rotazione

L'integrale definito può essere utilizzato anche per il calcolo di volumi di alcuni tipi di solidi.
Consideriamo un solido ottenuto dalla rotazione completa attorno all'asse x del trapezoide delimitato dal grafico della funzione $f(x)$, continua su $[a, b]$. Per fissare le idee supponiamo che f sia positiva (Fig. 4).

FIGURA 4



Ogni sezione del solido ottenuta con un piano perpendicolare all'asse x , passante per un punto $(x, 0)$ è un cerchio di raggio $|f(x)|$ e area: $A_x = \pi[f(x)]^2$.

Dividiamo l'intervallo $[a, b]$ in n parti uguali di misura $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, consideriamo un punto α_i che appartiene all' i -esimo intervallo di $[a, b]$ e la corrispondente sezione di area A_i . Il prodotto di A_i per Δx esprime il volume di un cilindro che ha base A_i e altezza Δx (Fig. 5): $\Delta V_i = A_i \cdot \Delta x = \pi[f(\alpha_i)]^2 \cdot \Delta x$.

Il volume del solido può essere approssimato dalla somma degli n volumi ΔV_i . Con un ragionamento analogo a quello che ci ha portato a definire l'integrale definito, otteniamo che il volume del solido di rotazione è uguale a: $V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx$.

FIGURA 5

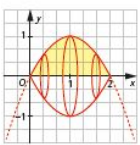


FIGURA 6

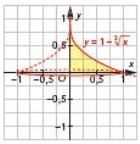


FIGURA 7

Esempio 5 - Solidi di rotazione attorno all'asse x

Rappresentiamo la parabola di equazione $y = 2x - x^2$, ha concavità rivolta verso il basso e interseca gli assi cartesiani nell'origine e nel punto $(2, 0)$. Consideriamo il solido generato dalla rotazione completa attorno all'asse x della regione colorata in giallo (Fig. 6) e calcoliamone il volume. Applicando la formula sull'intervallo $[0, 2]$ otteniamo:

$$V = \int_0^2 \pi(2x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4) dx = \pi \left[\frac{4}{3}x^3 - x^4 + \frac{1}{5}x^5 \right]_0^2 = \frac{16}{15}\pi.$$

Analogamente a quanto appena visto, il volume di un solido generato dalla rotazione completa attorno all'asse y di una regione del piano delimitata dal grafico di una funzione di y e l'asse y (Fig. 7) è uguale a: $V = \int_c^d \pi[f(y)]^2 dy$.

Esempio 6 - Solidi di rotazione attorno all'asse y

Consideriamo il solido generato dalla rotazione completa attorno all'asse y della regione di piano delimitata dal grafico di $y = 1 - \sqrt{x}$ e dagli assi cartesiani.

Rappresentiamo la funzione (Fig. 7) e osserviamo che:

- il suo grafico interseca gli assi nei punti $A(0, 1)$ e $B(1, 0)$;
- è invertibile e la funzione inversa è $x = (1 - y)^2$.

Il volume del solido è pertanto uguale a: $V = \pi \int_0^1 (1 - y)^4 dy = \pi \int_0^1 (1 - 4y + 6y^2 - 4y^3 + y^4) dy = \frac{\pi}{5}$.

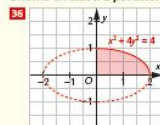
TEORIA

RIFLETTI SULLA TEORIA

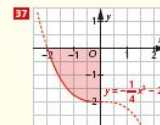
UNITÀ A9 | Il calcolo degli integrali

Calcolare volumi di solidi di rotazione

Calcola i volumi dei solidi ottenuti dalla rotazione completa della regione di piano colorata in figura prima attorno all'asse x e poi attorno all'asse y .



$$\left[\frac{4\pi}{3}, \frac{8\pi}{3} \right]$$



$$\left[\frac{36\pi}{7}, \frac{24\pi}{5} \right]$$

35 ATTIVITÀ CON GEOGEBRA 1. Inserisci nella Barra di inserimento la funzione $f(x) = \sqrt{1-x}$ per $0 \leq x \leq 1$ e lo slider k di tipo angolo, variabile da 0° a 360° , con incremento 1. Porta lo slider al valore 0° e apri la visualizzazione Grafici 3D.

2. Applica la rotazione assiale, con l'apposito comando, alla funzione f rispetto all'asse x di k° , in verso antiorario. Attiva la traccia sulla rotazione. Seleziona lo slider k e, con il tasto destro, attiva l'animazione. Che cosa accade? Si forma una superficie di rotazione.

3. Calcola il volume del solido delimitato dalla superficie di rotazione ottenuta e verifica il risultato con il comando Integrale(<Funzione>, <x iniziale>, <x finale>), per la funzione $\pi f^2(x)$ tra 0 e 1.

37 ATTIVITÀ CON GEOGEBRA Ripeti l'Esercizio precedente applicando alla funzione f una rotazione rispetto all'asse y di k° , in verso orario.

Rappresenta le curve che hanno le seguenti equazioni e calcola i volumi dei solidi ottenuti dalla rotazione completa attorno all'asse x delle regioni finite di piano delimitate da esse.

40 $y = -x^2 + 2x$ $y = 0$ $\left[\frac{16\pi}{15} \right]$ 41 $y = \sqrt{x}e^x$ $x = 0$ $x = 1$ $y = 0$ $\left[\frac{\pi}{4}(e^2 + 1) \right]$

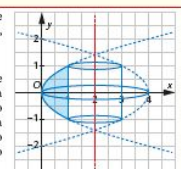
Rappresenta le curve che hanno le seguenti equazioni e calcola i volumi dei solidi ottenuti dalla rotazione completa attorno all'asse y delle regioni finite di piano delimitate da esse.

42 $x = \sqrt{5}y^2$ $y = -1$ $y = 1$ $x = 0$ $[2\pi]$ 43 $x = \arcsin y$ $y = 0$ $y = 1$ $x = 0$ $\left[\frac{\pi}{4}(\pi^2 - 8) \right]$

Risolvi problemi e applica modelli

44 ESERCIZIO SVOLTO Calcola il volume del solido generato dalla rotazione della regione delimitata dal grafico della funzione $x = y^2$ e dalla retta $x = 1$, attorno alla retta $x = 2$.

SOLUZIONE
Applichiamo alla curva di equazione $x = y^2$ una traslazione di vettore $\vec{v}(-2, 0)$, in modo da trasformare l'asse di rotazione nell'asse y . La curva traslata ha equazione: $x = y^2 - 2$. Il volume del solido si ottiene pertanto come differenza dei volumi di due solidi: il primo è quello generato dalla rotazione completa attorno all'asse y della regione delimitata dal grafico della curva $x = y^2 - 2$, l'asse y e le rette $y = 1$ e $y = -1$; il secondo è il cilindro che ha raggio di base 1 e altezza 2. Quindi:
 $V = \pi \int_{-1}^1 (y^2 - 2)^2 dy - \pi \int_{-1}^1 (-1)^2 dy = \frac{56}{15}\pi.$



45 NELLA REALTÀ Devi progettare un vaso in terracotta, simile a quello in figura, che abbia un volume interno di circa 12 L e una massa che non superi i 4 kg. La superficie laterale del vaso è generata dalla rotazione completa, attorno alla retta di equazione $y = 2$, della regione piana delimitata dalle curve di equazione:

$$y = \sqrt{\frac{x}{8}}, \quad y = \frac{1}{4}x^2, \quad x = 1,2, \quad \text{con } x \text{ e } y \text{ misurati in decimetri.}$$

La base del vaso è un disco di terracotta, di spessore 0,05 dm, unito alla superficie laterale in corrispondenza della sua sezione di raggio minimo.
Sapendo che la densità della terracotta è di 1,6 kg/dm³, verifica se il tuo progetto soddisfa la richiesta.

$$[V_{\text{int}} \approx 11,5 \text{ litri; massa} \approx 3,7 \text{ kg}]$$

ESERCIZI PAG. 403 369



Apprendimento attivo e laboratorio

Il laboratorio per

- La costruzione di significati
- Un uso ragionato e flessibile di strumenti
- L'interazione fra pari e con l'insegnante



Le proposte laboratoriali di *Matematica allo specchio*

- Le attività di inizio Unità
- Le attività fra gli esercizi
- Esplorare con GeoGebra
- Con GeoGebra



Attività di inizio Unità:

Numeri razionali

Attività 1 Divisioni inarrestabili

Ragiona in generale

Usa il foglio di calcolo per trovare quozienti e resti in altre divisioni. Procedi come segue:

- prima cambia solo il dividendo a ;
- in seguito cambia solo il divisore b , osservando che non può essere uguale a 0;
- infine cambia sia il dividendo sia il divisore.

Se il quoziente non è intero, osserva quali tipi di numeri decimali si ottengono nei seguenti casi:

- il divisore non contiene fattori primi diversi da 2 e da 5 _____
- il divisore contiene almeno un fattore primo diverso da 2 e da 5 _____

Può accadere che il risultato sia un decimale infinito non periodico? Perché?

Come si può quindi stabilire, osservando dividendo e divisore, se la divisione ha un risultato decimale finito o decimale illimitato? _____



Attività di inizio Unità:

Disequazioni di secondo grado

Attività

1

Positivo o negativo?

Studia il segno della funzione mediante il grafico

Ribaltiamo il problema: anziché partire dal valore della variabile indipendente x per ricavare il segno di y , partiamo dall'analisi del segno di y per trovare informazioni sui valori di x .

Disegna con GeoGebra il grafico di $f(x)$: se un punto ha *ordinata* negativa, quale può essere il valore di x corrispondente? Formula una congettura sui valori di x che corrispondono a punti di ordinata negativa:

Prendi un punto P sul grafico della funzione (Fig. 2) e visualizzane le coordinate; muovi P sulla parabola e osserva i punti del grafico che hanno ordinata negativa: quanti sono?

Come sono disposti?

Proietta P sull'asse x nel punto $H = (x(P), 0)$, come in Fig. 2.

Puoi fare in modo che H cambi colore a seconda del segno di y_P :

- rosso se $y_P > 0$;
- verde se $y_P < 0$.

Apri le Proprietà di $H \rightarrow$ Avanzate/Colori dinamici:

- nella casella Rosso scrivi $y(P) > 0$;
- nella casella Verde scrivi $y(P) < 0$;
- nella casella Blu scrivi il numero 0;
- chiudi la finestra di dialogo.

Muovi P sulla parabola e attiva la traccia di H e descrivi come si dispone H al variare di P sul grafico di $f(x)$.

Sulla base di queste osservazioni, per quali valori di x si ha $f(x) < 0$?

Per quali valori di x invece si ha $f(x) > 0$?

Senza eseguire calcoli né esplorare il grafico indica quale segno assume $f(x)$ per $x = 0,7$; $x = -1000$; $x = 20$:

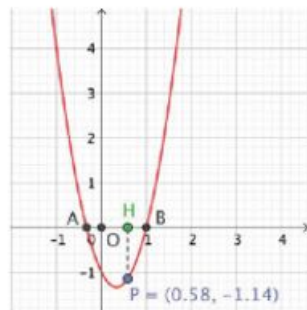


FIGURA 2



Attività con
GeoGebra
Positivo o
negativo?



Attività di inizio Unità :

L'ellisse

Attività A Il metodo del giardiniere

Costruisci l'ellisse con GeoGebra

Simuliamo con GeoGebra l'esperienza appena fatta.

1. Disegna due punti F_1 e F_2 e un segmento AB di lunghezza maggiore di F_1F_2 .
2. Prendi un punto P su AB , disegna il segmento AP e indica con a la sua misura; poi disegna il segmento PB e indica con b la sua misura.
3. Disegna la circonferenza di centro F_1 e raggio a e la circonferenza di centro F_2 e raggio b . Se le circonferenze non si intersecano, muovi P in modo che ciò avvenga, indica con C e D i loro punti di intersezione e attiva la traccia su di essi (puoi anche attivare l'animazione di P per mettere in movimento C e D).

Che tipo di curve descrivono C e D ?

4. Con lo strumento *Luogo*, disegna i luoghi geometrici descritti da C e D al variare di P . Lascia fissi i fuochi e fai variare la lunghezza del segmento AB . Che cosa cambia?

Ora lascia fisso AB e muovi i fuochi in modo da aumentare o diminuire la loro distanza. Che cosa osservi?

La quantità che misura quanto un'ellisse è «schiacciata» si chiama **eccentricità**.

Confronta le costruzioni

Quali analogie esistono tra la costruzione fatta con GeoGebra e quella precedente con la matita e lo spago?



Attività di inizio Unità:

Gli integrali definiti

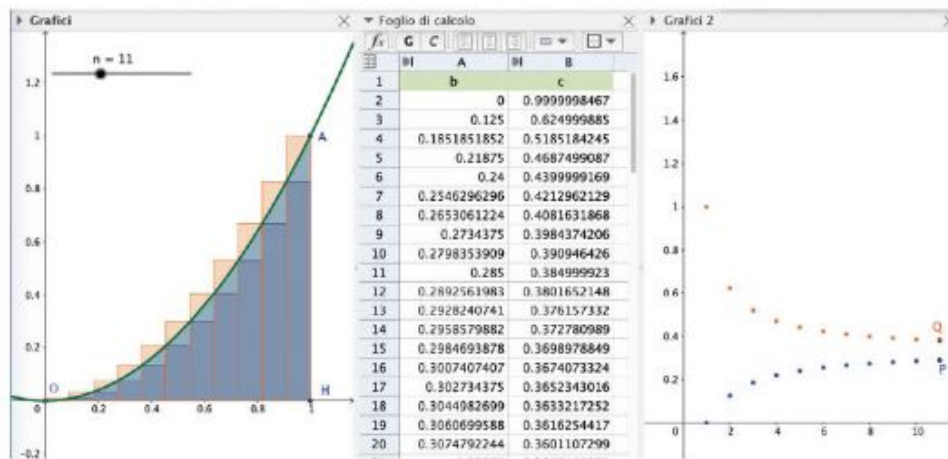


FIGURA 3

Rappresenta algebricamente le approssimazioni dell'area

Ricava il termine generale delle successioni b_n e c_n e analizza attraverso di esso le loro proprietà.

- Se si suddivide l'intervallo $[0; 1]$ in n parti uguali si individuano i punti di ascisse:
 $0; \frac{1}{n}; \dots; \frac{n-1}{n}; 1$.
- Le altezze dei rettangoli inscritti corrispondenti sono rispettivamente:
 $0; \frac{1}{n^2}; \dots; \frac{(n-1)^2}{n^2}$.
- Le altezze dei rettangoli circoscritti corrispondenti sono rispettivamente:
 $\frac{1}{n^2}; \dots; 1$.

La prima altezza
corrisponde al
rettangolo costruito
sull'intervallo $[0; \frac{1}{n}]$
e così via.

Sulla base di queste osservazioni ricava la somma b_n delle aree dei rettangoli inscritti:

$$b_n = \frac{1}{n} \cdot 0 + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \cdot \frac{4}{n^2} + \frac{1}{n} \cdot \frac{9}{n^2} + \dots + \frac{1}{n} \cdot \frac{(n-1)^2}{n^2} = \frac{1}{n^3} [0 + 1 + 4 + \dots + (n-1)^2]$$

FIGURA 2b



Le attività fra gli esercizi

26 ATTIVITÀ Con la carta Probabilmente ti è capitato di disegnare due rette parallele avendo a disposizione una squadra, il righello e la matita. Rivediamo il procedimento. Su un foglio di carta, con il righello, disegna un segmento b .

Non sollevare il righello dal foglio. Facendo scorrere la squadra appoggiata al righello puoi disegnare una coppia di semirette incidenti a b e parallele fra di loro; poi con il righello puoi prolungare le semirette dall'altra parte di b , in modo da ottenere due rette.



Spiega perché le due rette disegnate sono parallele.

169 ATTIVITÀ Con carta, forbici e goniometro

Ritaglia un triangolo da un foglio di carta.

Piegalo in modo che due vertici si tocchino, restando sullo stesso lato a cui essi appartengono: ottieni in questo modo un pentagono, scomposto in due triangoli e un quadrilatero.

Verifica con il goniometro che questo quadrilatero ha due angoli opposti congruenti: di quale coppia si tratta?

Saresti spiegare, con una dimostrazione rigorosa, il motivo di ciò che hai osservato?



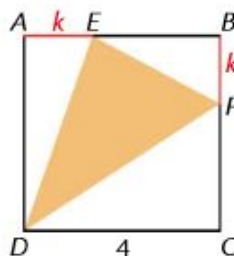
Le attività fra gli esercizi

207 ATTIVITÀ Con GeoGebra Costruisci un quadrato



$ABCD$ di lato 4 e crea uno slider k che possa variare da 0 a 4 con passo 0,1.

Sui lati AB e BC del quadrato considera i punti E e F a distanza k rispettivamente da A e da B e costruisci il triangolo DEF con lo strumento *Poligono*. GeoGebra visualizza l'area del triangolo nella finestra Algebra.



Porta k a 0, visualizza il foglio di calcolo e registra su di esso i valori di k e dell'area di DEF , su due colonne diverse. Attiva l'animazione di k : sul foglio di calcolo vengono create due colonne di dati.

a. Visualizza la vista Grafici 2 e crea una lista di punti a partire dai dati che hai sul foglio di calcolo.

Su quale tipo di curva ti sembrano allineati i punti che hai trovato?

b. Costruisci algebricamente la funzione che rappresenta l'area del triangolo DEF al variare di k , rappresentala in Grafici 2 e verifica che passa per i punti trovati. Per quale valore di k l'area del triangolo DEF è minima?

Foglio di calcolo		
	A	B
1	k	t1
2	0	8
3	0.1	7.8
4	0.2	7.62
5	0.3	7.44
6	0.4	7.28
7	0.5	7.13
8	0.6	6.98
9	0.7	6.85
10	0.8	6.72
11	0.9	6.61
12	1	6.5
13	1.1	6.41
14	1.2	6.32
15	1.3	6.25

$$\left[\text{a. } a(k) = \frac{1}{2}k^2 - 2k + 8; \text{ b. } k = 2 \right]$$



Le attività fra gli esercizi

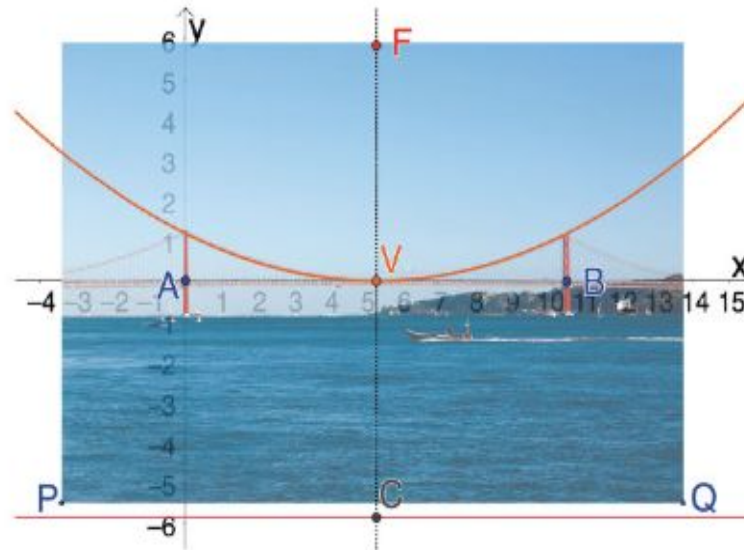


187

ATTIVITÀ CON GEOGEBRA

La struttura di sostegno dei ponti sospesi descrive una parabola. Cerca sul web l'immagine di un ponte sospeso: potrai trovare esempi noti, come il famoso Golden Gate Bridge di San Francisco o il lunghissimo ponte dello stretto di Akashi, in Giappone. Nell'immagine a fianco è riportato il ponte detto del 25 aprile, sul fiume Tago, a Lisbona. Inaugurato nel 1966 il ponte ha i due pilastri principali alti circa 190 m; la distanza fra di essi è di circa 1200 m. Il piano del ponte si trova a circa 70 m dal livello dell'acqua.

1. Apri il file GeoGebra e assicurati che la figura sia posizionata in modo che il pilastro di sinistra coincida con l'asse y e il piano del ponte giaccia sull'asse x .
2. Traccia sopra alla figura i punti A e B base dei due pilastri principali; definisci il punto medio V del segmento AB .
3. Traccia la retta $x = x(V)$ e prendi su di essa, nel semipiano delle y positive, un punto F . Costruisci il punto C simmetrico di F rispetto a V e traccia la retta $y = y(C)$.
4. Con il comando *Parabola*  traccia la parabola di fuoco F e direttrice $y = y(C)$. Muovi il punto F fino a che la curva disegnata si sovrappone al cavo parabolico che regge il ponte. Ricava attraverso il calcolo, l'apertura del cavo parabolico che regge il ponte e confrontalo con il risultato che GeoGebra restituisce automaticamente.



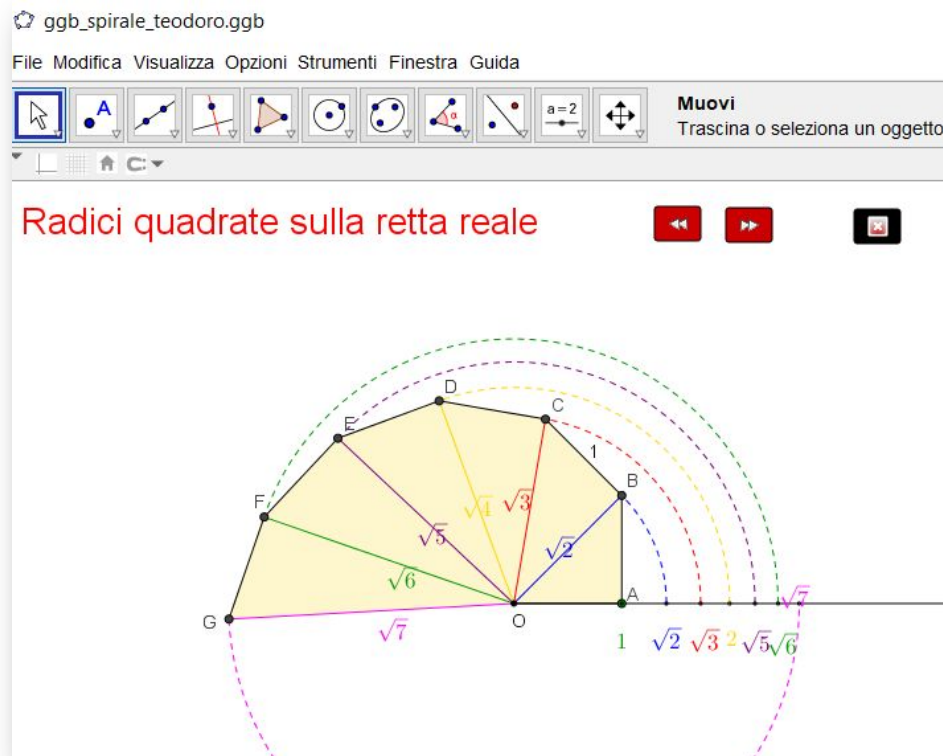
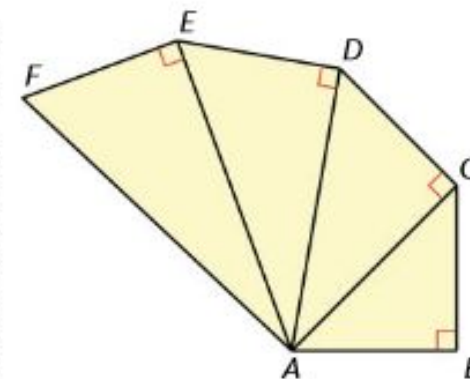
Esplora con GeoGebra

37 ESPLORA CON GEOGEBRA

STORIA



Con l'utilizzo del teorema di Pitagora è possibile rappresentare dei segmenti la cui misura è la radice quadrata di un qualsivoglia numero intero. È sufficiente partire da un segmento AB di lunghezza 1 e costruire un segmento BC , perpendicolare ad AB e anch'esso di lunghezza 1. L'ipotenusa AC del triangolo rettangolo così costruito ha lunghezza $\sqrt{2}$; si costruisce il segmento CD , perpendicolare ad AC e sempre di lunghezza 1, per ottenere un nuovo triangolo rettangolo ACD la cui ipotenusa AD ha lunghezza $\sqrt{3}$. Proseguendo in questo modo si ottengono segmenti di misura $\sqrt{n}$. La spezzata che si ottiene è la **spirale di Teodoro di Cirene**. Costruisci con riga e compasso la spirale fino all'ottavo triangolo verificando che l'ultimo misuri 3.



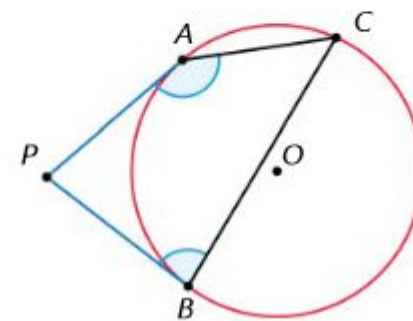
Con GeoGebra

Esegui le seguenti costruzioni con GeoGebra

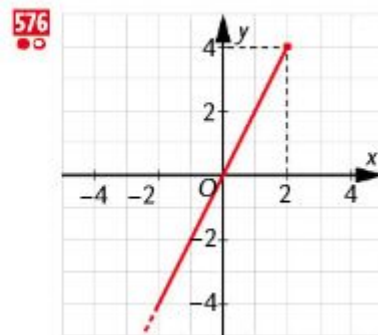
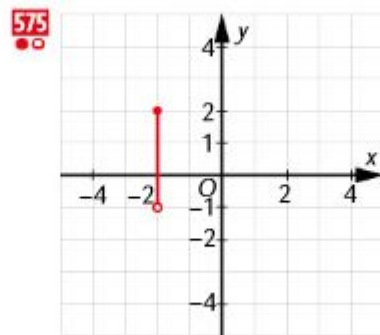
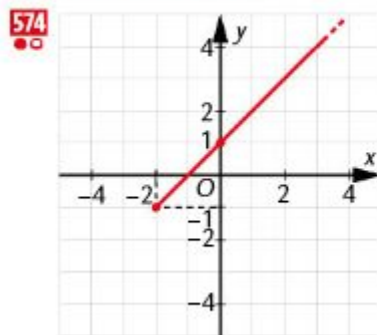
158 Disegna una circonferenza di centro O e un punto P su di essa. Con il comando *Tangenti* disegna la retta tangente alla circonferenza nel punto P e verifica che tale retta è perpendicolare a PO , disegnando l'angolo tra le due rette.

159 Disegna una circonferenza di centro O e un punto P esterno a essa. Con il comando *Retta perpendicolare* disegna la retta passante per P e perpendicolare a OP e verifica che tale retta è tangente alla circonferenza, determinando le intersezioni tra essa e la circonferenza.

219 Con GeoGebra Disegna una circonferenza e da un punto P esterno a essa traccia i due segmenti di tangente PA e PB . Considera un punto C sul maggiore degli archi delimitati da A e da B . Misura le ampiezze degli angoli $\widehat{PAC}$ e $\widehat{PBC}$; come varia la somma delle ampiezze di tali angoli al variare di C sull'arco AB ? Formula una congettura e dimostrarla.



INTERPRETA I GRAFICI Scrivi un sistema misto che rappresenti i segmenti e le semirette rappresentati nelle figure.

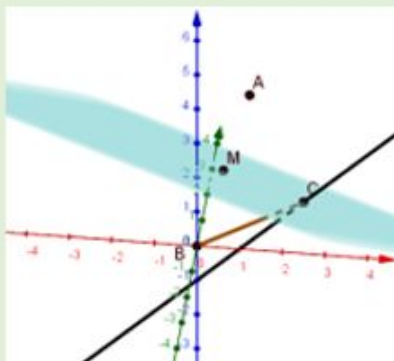


581 Con GeoGebra Verifica le tue rappresentazioni degli **Esercizi 574-579** usando opportunamente la funzione Se di GeoGebra e i connettivi logici.

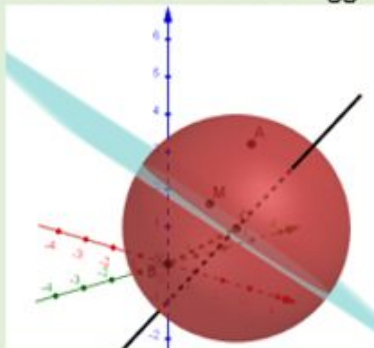


Con GeoGebra

2. disegna il piano per M perpendicolare a AB e segna il punto di intersezione del piano con la retta r. Traccia il segmento CB, raggio della sfera.



3. Disegna la sfera di centro C e raggio CB.



2. il piano per M perpendicolare a $\overrightarrow{BA}$ ha equazioni $1\left(x - \frac{1}{2}\right) + 2(y - 1) + 3\left(z - \frac{3}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 3z - 7 = 0$.

Il centro C della sfera sta nei punti di intersezione fra il piano assiale di AB e la retta r:

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 0 \\ z = -t \end{cases} \Leftrightarrow C\left(\frac{5}{2}; 0; \frac{3}{2}\right)$$
$$x + 2y + 3z - 7 = 0$$

Il raggio della sfera è $\overline{CB} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{17}{2}}$.

3. Trova l'equazione della superficie sferica :

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{17}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 5x - 3z = 0.$$

Confronta l'equazione che hai ottenuto con l'equazione della superficie sferica che GeoGebra indica in Vista Algebra.



Esercizi per competenze diverse e crescenti

1. ESERCIZI DI LEZIONE
2. ACCRESCI LE TUE COMPETENZE
3. METTITI ALLA PROVA
4. PROVA FINALE



Esercizi di lezione suddivisi in quattro categorie

1. CAPIRE I CONCETTI
2. APPLICARE I PROCEDIMENTI
3. RISOLVERE PROBLEMI
4. SCRIVERE E DISCUTERE DI MATEMATICA



- Esercizi per riflettere sulle proprietà fondamentali, anche attraverso rappresentazioni grafiche e test a scelta multipla.
- Esercizi per l'autovalutazione nella prima fase dell'apprendimento
- Esercizi introduttivi, ma anche per il ripasso e il recupero

Lezione 2 Simmetria

TEORIA PAG. 322

CAPIRE I CONCETTI

132 Vero o falso?

- In una simmetria centrale, il centro C coincide con il punto medio del segmento che unisce P e il trasformato di P .
- I punti di una retta passante per il centro di una simmetria centrale vengono trasformati in se stessi.
- Una retta che non passa per il centro C di una simmetria centrale viene trasformata in una retta che non passa per il centro C .
- La trasformazione di equazioni $\begin{cases} x' = -x + 8 \\ y' = -y \end{cases}$ è una simmetria centrale di centro $(4; 0)$.

(V) (F)

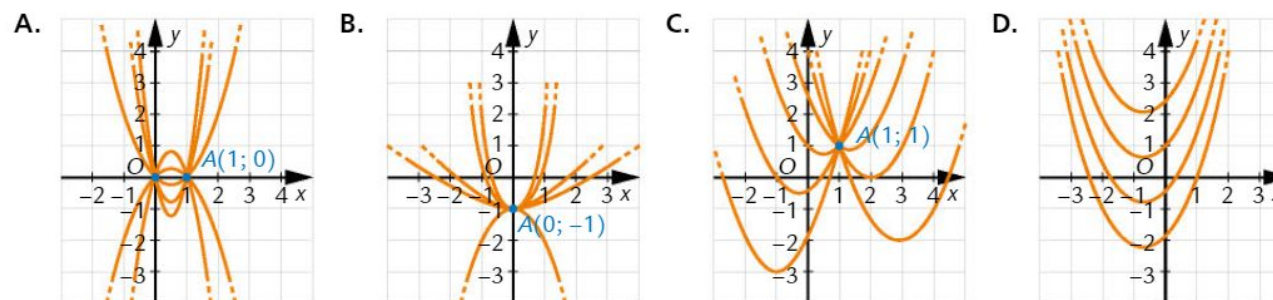
(V) (F)

(V) (F)

(V) (F)

354 Associa a ciascuna delle seguenti equazioni il grafico corrispondente.

- $y = x^2 + x + k$
- $y = \frac{k-3}{k+1}x^2 - 1$
- $y = kx^2 - kx$
- $y = x^2 - kx + k$



- Acquisire tecniche di calcolo e procedure
- Esplorare grafici, anche con Geogebra o la calcolatrice grafica
- Confrontare metodi diversi

► APPLICARE PROCEDIMENTI

Circonferenza e funzioni

Rappresenta i grafici delle seguenti funzioni.

393 ESERCIZIO SVOLTO $y = 3 + \sqrt{4x - x^2}$

SOLUZIONE

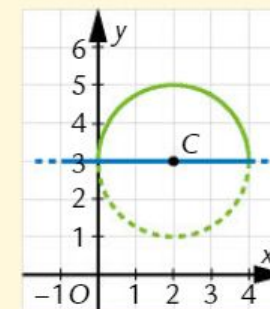
Il dominio della funzione è $D = [0; 4]$.

Isolando il radicale otteniamo $y - 3 = \sqrt{4x - x^2}$; la condizione di concordanza di segno è: $y - 3 \geq 0$. L'equazione di partenza equivale quindi al sistema misto:

$$\begin{cases} y \geq 3 \\ (y - 3)^2 = 4x - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 3 \\ x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0 \end{cases}$$

L'equazione nel secondo sistema rappresenta la circonferenza di centro $C(2; 3)$ e raggio 2.

Rappresentiamo nel piano cartesiano la circonferenza e la retta $y = 3$. Il grafico della funzione data è l'insieme dei punti che stanno sulla circonferenza e nel semipiano chiuso al di sopra della retta $y = 3$.



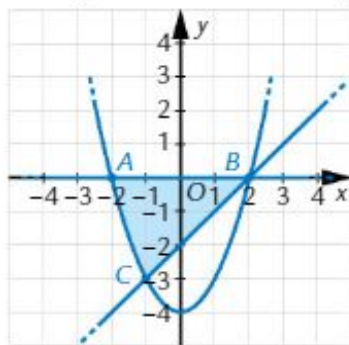
- Analizzare situazioni nuove
- Individuare strategie adeguate
- Integrare conoscenze matematiche e strumentali

► RISOLVERE PROBLEMI

Lezione 7 | Funzioni e figure piane riconducibili alla parabola

Area di regioni piane limitate da archi di parabola

511 Determina l'area della parte di piano indicata in figura, sapendo che è limitata dalla parabola di equazione $y = x^2 - 4$, dalla retta $y = x - 2$ e dalla retta $y = 0$.



$$\left[x = \frac{37}{6} \right]$$

512 Dati i punti: $A(0; 3)$, $B(1; 2)$, $C(3; 4)$, determina le equazioni:

a. della parabola di vertice B che passa per A ;

514 Considera la parabola di equazione: $y = ax^2 + 2x + 1$, con $a \neq 0$.

Determina per quali valori di a la parabola individua con la retta di equazione $y = x + 1$ un segmento parabolico di area 6.

$$\left[a = \pm \frac{1}{6} \right]$$

515 Considera le funzioni

$$f(x) = \sqrt{2x} \text{ e } g(x) = 2 + \sqrt{4 - x^2}.$$

a. Traccia i loro grafici.

b. Risolvi graficamente la disequazione $\sqrt{2x} \geq 2 + \sqrt{4 - x^2}$.

c. Determina l'area della regione finita di piano limitata dai grafici delle due funzioni.

$$\left[\text{b. } x = \pm 2; \text{ c. } 2\pi + \frac{8}{3} \right]$$



- Dimostrare per sviluppare il pensiero matematico
- Argomentare per costruire il pensiero critico

► SCRIVERE E DISCUTERE DI MATEMATICA

106 Dimostra che due ellissi sono congruenti se e solo se hanno semiassi di pari lunghezza.



107 ATTIVITÀ CON LA CALCOLATRICE GRAFICA Disegna una circonferenza c di centro C e un punto F interno alla circonferenza. Traccia un punto M sulla circonferenza e disegna il segmento FM . Costruisci l'asse del segmento FM e la retta CM . Chiama P il punto d'intersezione tra l'asse s e la retta CM .

STEM

Trova il luogo dei punti P al variare di M .

- Verifica che P descrive un'ellisse di fuochi C e F .
- Se il centro della circonferenza è $C(-4; 0)$, F ha coordinate $(4; 0)$ e il raggio della circonferenza è 10, determina l'equazione dell'ellisse.

432 TROVA L'ERRORE Valerio afferma che il limite $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2} - x)$ è una forma indeterminata e lo risolve così:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2} - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2} - x)(\sqrt{x^2 + 2} + x)}{\sqrt{x^2 + 2} + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2 + 2} + x} = 0$$

Quale errore ha commesso Valerio?

523 INVENTA TU Fornisci l'esempio di una funzione periodica f tale che $|f|$ abbia lo stesso periodo di f , e l'esempio di una funzione periodica f tale che $|f|$ abbia periodo inferiore a quello di f . Motiva le tue scelte.



Accresci le tue competenze

1. Utilizzare tecniche di calcolo e rappresentare graficamente
2. Interpretare grafici e dati
3. Risolvere problemi e costruire modelli
4. Ragionare, giustificare, argomentare



Accresci le tue competenze

- Consolidare l'utilizzo di tecniche del calcolo
- Potenziare la capacità di rappresentazione e interpretazione dei grafici

► UTILIZZARE LE TECNICHE DEL CALCOLO E RAPPRESENTARE GRAFICAMENTE

Calcola i seguenti limiti.

$$\text{924} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$$

$$\text{925} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \ln x^2}{1 + \ln x}$$

$$\text{926} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{2x - \pi}$$

$$\left[\frac{1}{4}\right]$$

$$\text{944} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{10 + x\sqrt{x}}$$

$$[+\infty]$$

$$[-2]$$

$$\text{945} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3}{\sin x \ln^2 x}$$

$$[0]$$

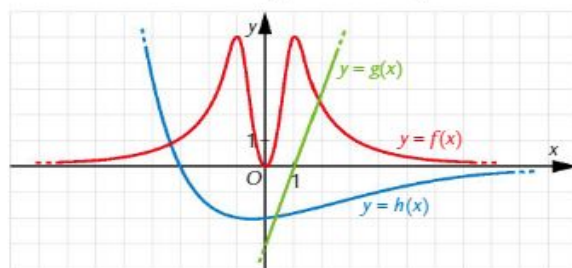
$$[0]$$

$$\text{946} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{2x} - 1) \ln^2(1+x)}{x^3}$$

$$[2]$$

► INTERPRETARE GRAFICI E DATI

1007 A partire dalle informazioni che si possono dedurre dai grafici, determina, se possibile, il valore dei seguenti limiti (alcuni limiti si presentano sotto forma indeterminata, quindi non è possibile calcolarli senza ulteriori informazioni).



- Science
- Technology
- Engineering
- Mathematics
- Fisica Educazione finanziaria
- Problemi dalla realtà
- Educazione civica

► RISOLVERE PROBLEMI E COSTRUIRE MODELLI

1030 SALUTE Uno dei più semplici modelli (il cosiddetto modello SIS) per descrivere la propagazione di una malattia né mortale né immunizzante (come il raffreddore) in una popolazione di N individui è costituito dalla funzione:

$$I(t) = \frac{(rN - \gamma)I_0}{rI_0 + [(rN - \gamma) - rI_0]e^{(\gamma - rN)t}}$$

dove $I(t)$ rappresenta il numero di individui infetti al tempo t , I_0 è il numero di individui infetti nell'istante iniziale di osservazione $t = 0$, r è una costante che rappresenta il tasso di infezione (dipendente dal meccanismo di contagio e dal modo in cui gli individui sono a contatto) e γ è una costante che esprime il tasso di guarigione (dipendente dall'evoluzione della malattia in un individuo).

Discuti, al variare dei parametri, l'evoluzione nel lungo periodo di una malattia secondo questo modello.

[La malattia tende a estinguersi o a diventare endemica, a seconda che ...]



- Riflettere e approfondire
- Stimolare e sviluppare la creatività

► RAGIONARE, GIUSTIFICARE, ARGOMENTARE

1040 Fornisci l'esempio di una funzione (devi scrivere l'espressione analitica e disegnare la parte di grafico interessata):

- che non soddisfa l'ipotesi di continuità del teorema di Weierstrass ma ammette comunque un massimo e un minimo assoluti in un intervallo chiuso e limitato;
- che non soddisfa l'ipotesi di continuità del teorema di Weierstrass e per questo non ammette massimo o minimo assoluti in un intervallo chiuso e limitato;
- che non soddisfa l'ipotesi di continuità del teorema di esistenza degli zeri ma ammette comunque uno zero all'interno di un intervallo chiuso e limitato;
- che non soddisfa l'ipotesi di continuità del teorema di esistenza degli zeri e per questo non ammette zeri all'interno di un intervallo chiuso e limitato.

697 SAPERNE DI PIÙ I criteri del confronto presentati nella **Lezione 6** valgono solo se le funzioni prese in considerazione sono positive nell'intervallo di integrazione. Esistono altri criteri validi anche per funzioni con segno variabile. Ad esempio, vale il seguente criterio, detto **criterio della convergenza assoluta per integrali impropri**: sia $f(x)$ definita

in $[a; +\infty[$; se l'integrale improprio $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ è convergente, allora lo è anche $\int_a^{+\infty} f(x) dx$.

Utilizza questo criterio per dimostrare che $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ è convergente.

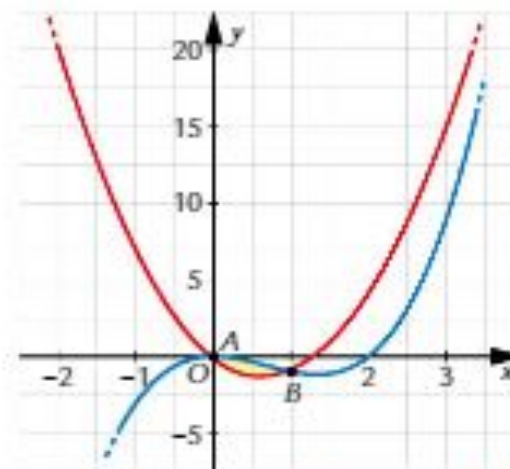


Mettiti alla prova

► PROBLEMI E MODELLI - MATEMATICA

703 In figura sono rappresentati i grafici di una funzione $f(x)$ e di una sua primitiva $F(x)$.

- Stabilisci quale grafico corrisponde a $f(x)$ e quale a $F(x)$.
- Sapendo che $f(x) = ax^2 + bx + c$, in base alle informazioni che puoi ricavare dalla figura, determina le espressioni analitiche delle due funzioni.
- Dopo aver determinato tutti i punti di intersezione fra le due curve, determina l'area della parte di piano colorata in figura.
- Determina il volume del solido che si ottiene facendo ruotare intorno all'asse x la parte di piano colorata in figura.



$$\left[\text{b. } f(x) = 3x^2 - 4x, F(x) = x^3 - 2x^2; \text{ c. } A(0;0), B(1;-1), C(4;32), A = \frac{7}{12}; \text{ d. } V = \frac{6}{7}\pi \right]$$

► PROBLEMI E MODELLI - MATEMATICA E FISICA



Prova finale | matematica

► PROBLEMA

- 1 In una regione protetta vivono 200 fenicotteri. La popolazione di fenicotteri evolve nel tempo nei successivi dodici anni secondo una velocità di variazione che è ben modellizzata dalla funzione $v_1(t) = 40 - 5t$, con $0 \leq t \leq 12$, dove t è il tempo (in anni) misurato a partire dall'istante $t = 0$ in cui la popolazione è costituita da 200 esemplari e $v_1(t)$ è la velocità di variazione della popolazione misurata in «numero di esemplari/anno».

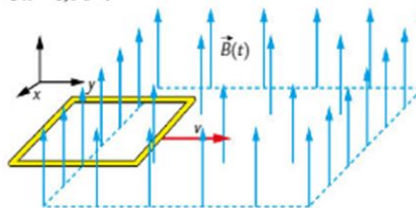


- a. Determina l'espressione analitica della funzione $N_1(t)$, che rappresenta il numero di tempo t , con $0 \leq t \leq 12$, specificando dopo quanto tempo (da $t = 0$) la popolazione massimo numero di esemplari.

Prova finale | matematica e fisica

► PROBLEMA

- 1 La figura mostra una spira metallica quadrata, di lato 10 cm, che si muove nel piano xy , con velocità costante di modulo $v = 10$ mm/s, nella direzione positiva dell'asse y . All'istante $t = 0$ s, la spira entra in una regione interessata da un campo magnetico parallelo all'asse z , di modulo: $B(t) = B_0 \sin(\omega t) e^{-kt}$, misurato in mT, con $\omega = 2\pi$ rad/s e $k = 1,0$ s⁻¹.



- a. Calcola l'espressione della funzione $S(t)$ che esprime la superficie della spira attraversata dalle linee del campo magnetico all'istante t , per $t \geq 0$ (esprimila in unità del Sistema Internazionale).
- b. Calcola l'espressione del flusso del campo magnetico $\Phi(t)$ attraverso la superficie S in funzione del tempo e studiane la continuità e la derivabilità per $t \geq 0$ (esprimila in μWb) e mostra che $\Phi(t)$ per $t > 0$ ammette un numero infinito di massimi e minimi relativi.
- c. Detti t_1 e t_2 rispettivamente il primo e il secondo punto di massimo relativo, diversi da 0, calcolane un'approssimazione a meno di 10^{-3} , usando il metodo di bisezione, e dimostra che $\Phi(t_2)$ è il massimo assoluto del flusso.
- d. Traccia il grafico di $\Phi(\vec{B})$ (tralascia lo studio della derivata seconda) e da esso ricava quello della f.e.m. indotta nella spira.



Ruolo centrale del concetto di funzione

- Approccio «a spirale» dal primo al quinto anno
- Interpretazione e risoluzione grafica
- Nel biennio si antepone il concetto di funzione al calcolo letterale e alla risoluzione di equazioni e disequazioni
 - Funzioni lineari → Equazioni e disequazioni lineari
 - Funzioni razionali → Equazioni e disequazioni frazionarie
 - Funzioni quadratiche → Equazioni e disequazioni non lineari
 - Funzioni irrazionali e con valori assoluti → Equazioni e disequazioni irrazionali e con valori assoluti
- Si riprende il concetto in esercizi e attività in vari ambiti



Lezione 3

IMPARA ▶

Esplora con GeoGebra
Ricavare il dominio e l'immagine di una funzione dal diagramma cartesiano

Un tondino pieno sul grafico indica che quel punto appartiene al grafico.
Un tondino vuoto indica che il punto non appartiene al grafico.

Interpretazione di grafici

1 Ricavare il dominio di una funzione dal diagramma cartesiano

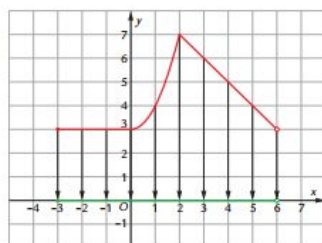
Dal diagramma di una funzione è possibile ricavare il dominio, proiettando il grafico sull'asse x .
Immagina di proiettare tutti i punti del grafico sull'asse x e di considerare quale parte dell'asse x hai ricoperto: questo è il dominio della funzione.

Esempio 8 - Dominio di una funzione dal diagramma

Osserva il grafico in Fig. 9.

Proiettando tutti i suoi punti sull'asse x , si trova il dominio della funzione, che in questo caso è:

$$\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 6\}$$



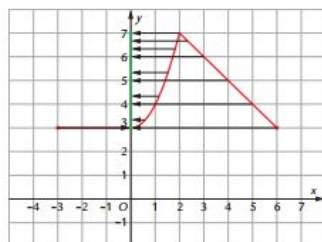
► FIGURA 9

2 Insieme immagine di una funzione dal diagramma cartesiano

In maniera analoga, dal grafico di una funzione è possibile ricavare l'insieme immagine, proiettando il grafico sull'asse y .
Immagina questa volta di proiettare tutti i punti del grafico sull'asse y e di considerare quale parte dell'asse y stesso hai ricoperto: questo è l'insieme immagine della funzione.

Esempio 9 - Immagine di una funzione dal diagramma

Considera lo stesso grafico dell'esempio precedente (Fig. 10).



► FIGURA 10

Proiettando tutti i punti sull'asse y , si trova l'insieme immagine della funzione, che in questo caso è: $\text{imm}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 3 \leq y \leq 7\}$

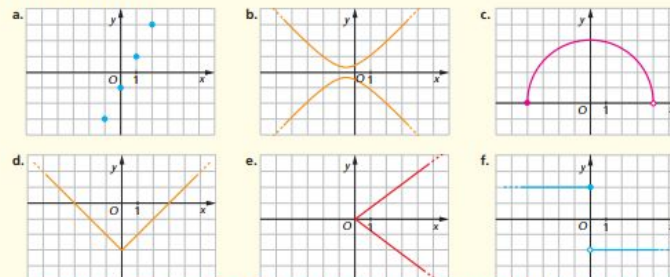
► TEORIA

► RIFLETTI SULLA TEORIA

UNITÀ 5 | Le funzioni

► Determinare dominio e insieme immagine dal diagramma cartesiano

20 Osserva ognuno dei grafici, stabilisci se rappresenta una funzione e, in caso affermativo, determina il dominio e l'insieme immagine.



[a. $\text{dom}(f) = \{-1; 0; 1; 2\}$, $\text{imm}(f) = \{-3; -1; 1; 3\}$; b. non è una funzione; c. $\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x < 4\}$, $\text{imm}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 4\}$; d. $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$, $\text{imm}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -3\}$; e. non è una funzione; f. $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$, $\text{imm}(f) = \{-1; 1\}$]

► Interpretare un grafico

21 **ESERCIZIO SVOLTO** **FISICA** Il grafico in figura rappresenta la posizione di Luca, in funzione del tempo, durante un'escursione in bicicletta.

Rispondi alle domande.

- Quante ore è durata l'escursione?
- Quanti chilometri ha percorso Luca in totale?
- Per quanto tempo Luca è rimasto fermo?

SOLUZIONE

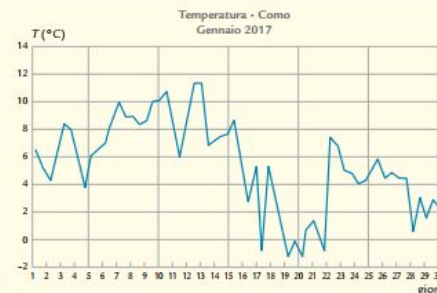
- Il tempo è rappresentato sull'asse delle ascisse, quindi l'intervallo in cui si è svolta l'escursione corrisponde al dominio della funzione: $0 \leq t \leq 5$. La durata è 5 ore.
- La posizione è rappresentata sull'asse delle ordinate, quindi la distanza percorsa corrisponde all'insieme immagine della funzione: $0 \leq d \leq 40$. Luca ha percorso 40 km.
- Dal grafico puoi notare che per $1 \leq t \leq 2$ e per $3 \leq t \leq 4$ la posizione resta invariata: prima al chilometro 20 e dopo al chilometro 35. Luca è quindi rimasto fermo due ore in totale.



22 **NELLA REALTÀ** La figura rappresenta l'andamento della temperatura registrata alle ore 12 di ogni giorno del mese di gennaio 2017 nella città di Como.

- Tra quali valori, minimo e massimo, circa, è variata la temperatura durante l'intero mese?
- Come cambia questo insieme di valori se restringi il dominio soltanto ai primi quindici giorni del mese?
- E se lo restringi ai successivi quindici giorni del mese?

[a. minimo -1°C , massimo tra 11°C e 12°C ;
b. minimo circa 4°C , massimo non cambia;
c. minimo non cambia, massimo circa 9°C]



Lezione 5

TEORIA

Funzioni lineari

1 Definizione e grafico delle funzioni lineari

Le rette non passanti per l'origine rappresentano il grafico di funzioni più generali di quelle di proporzionalità diretta: le funzioni lineari.

DEFINIZIONE Funzione lineare

Un'equazione del tipo: $y = mx + q$, con $m, q \in \mathbb{R}$, definisce una **funzione lineare**.

Esempio 12 - Confronto tra il grafico di una funzione di proporzionalità diretta e il grafico di una funzione lineare

Considera le funzioni di equazioni: $y = 2x$ e $y = 2x + 3$; nella Tab. 7 sono riportati i valori di y corrispondenti ad alcuni valori di x .

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2x$	-6	-4	-2	0	2	4	6
$y = 2x + 3$	-3	-1	1	3	5	7	9

Come puoi osservare, a parità di valori di x , i valori della seconda funzione sono tutti aumentati di 3 unità rispetto a quelli della prima funzione. Ciò significa che, a parità di ascissa, le ordinate dei punti del grafico della seconda funzione sono tutte aumentate di 3 unità rispetto a quelle del grafico della prima funzione. Rappresentiamo in Fig. 13 i due grafici.

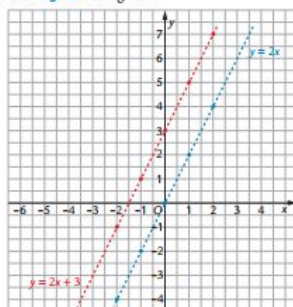


FIGURA 13

Come vedi, anche il grafico della funzione $y = 2x + 3$ è una retta, non passante per l'origine, che risulta **parallela** alla retta di equazione $y = 2x$.

I due numeri m e q che compaiono nell'equazione di una funzione lineare sono, rispettivamente, la **pendenza**, o **coefficiente angolare**, e il **termine noto**: il primo ha lo stesso significato già visto, il secondo rappresenta l'ordinata del punto della retta che ha ascissa 0 (cioè l'ordinata del punto in cui la retta interseca l'asse y). L'esempio precedente suggerisce il **Teorema 1** di cui è riportato solo l'enunciato.

TEOREMA 1 Rette parallele nel piano cartesiano

Due rette rappresentate nel piano cartesiano sono parallele se e solo se hanno la stessa pendenza.



Esplora con GeoGebra
Funzione lineare

TABELLA 7

Observa che un punto $P(x_P, y_P)$ appartiene a una retta se e solo se le sue coordinate soddisfano l'equazione della retta. Questo significa che sostituendo nell'equazione $y = mx + q$ l'ascissa x_P del punto al posto di x e l'ordinata y_P del punto al posto di y , l'uguaglianza che si ottiene deve essere vera. In caso contrario il punto P non appartiene alla retta.

Attività 1

Equazioni in laboratorio

Per le lezioni:

- 1 Introduzione alle equazioni
- 2 Equazioni di primo grado numeriche intere
- 3 Problemi il cui modello algebrico è un'equazione lineare

TABELLA 1

Volume (cm ³)	Massa caraffa con acqua (g)
0	209
100	315
200	416
300	524
400	625
500	726
600	835
700	937
800	1035

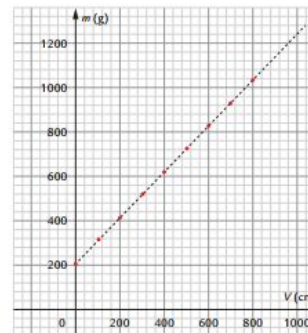


FIGURA 1

Risolvi un problema

Con la funzione così costruita, possiamo ricavare i valori che non abbiamo: ad esempio trovare quale sarebbe il volume corrispondente a una massa di 620 g.

Questo equivale a determinare la controimmagine del valore $m = 620$ g rispetto alla funzione definita, cioè uguagliare la funzione stessa a 620 g.

Scrivi l'equazione che si ottiene: $(1,04 \text{ g/cm}^3) \cdot V + 209 \text{ g} = 620 \text{ g}$

Completa i passaggi da svolgere fino a ottenere il valore di V richiesto:

* sottrai a sinistra e a destra del simbolo = il termine noto 209 g:

$(1,04 \text{ g/cm}^3) \cdot V + 209 \text{ g} - 209 \text{ g} = 620 \text{ g} - 209 \text{ g}$

* esegui le addizioni: $(1,04 \text{ g/cm}^3) \cdot V = 411 \text{ g}$



Attività con GeoGebra
Equazioni in laboratorio



IMPARA

Lezione 1 | Introduzione alle frazioni algebriche

TEORIA

2 Frazioni algebriche e funzioni

Consideriamo in particolare le funzioni numeriche definite da frazioni algebriche che contengono una sola variabile. Dando un valore numerico alla variabile, che riveste il ruolo di variabile indipendente, la frazione assume a sua volta un valore numerico, che è l'immagine del valore assegnato alla variabile indipendente. In tal caso, le condizioni di esistenza della frazione individuano il **dominio** della funzione.

Esempio 3 - Funzione definita tramite una frazione algebrica

- La frazione algebrica $\frac{1}{x}$ definisce la funzione $y = f(x) = \frac{1}{x}$ che a un numero reale associa il suo reciproco, se esiste. Per $x = 0$ la frazione non è definita: la condizione di esistenza della frazione è $x \neq 0$.
Il dominio della funzione è pertanto: $\text{dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
- La frazione algebrica $\frac{1-2x}{x^2-4}$ definisce la funzione $y = g(x) = \frac{1-2x}{x^2-4}$, che non è definita per i valori di x che annullano il denominatore.
Scomponiamo il denominatore e determiniamo le condizioni di esistenza della frazione:
 $x^2 - 4 = (x-2)(x+2) \rightarrow \text{C.E.: } x \neq -2 \wedge x \neq 2$
Il dominio della funzione è pertanto: $\text{dom}(g) = \mathbb{R} - \{-2; 2\}$.

Facciamo riferimento alla funzione dell'ultimo esempio e calcoliamo il valore che essa assume per $x = \frac{1}{2}$:

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1-2 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{4}-4} = \frac{0}{-\frac{15}{4}} = 0$$

Il valore $x = \frac{1}{2}$ è quindi uno **zero** della funzione $g(x)$.

Per determinare gli zeri di una funzione frazionaria occorre individuare i valori di x che annullano il numeratore, ma non il denominatore (infatti questi ultimi non appartengono al dominio).

Esempio 4 - Zeri di una funzione frazionaria

Determiniamo gli zeri delle seguenti funzioni:

a. $f(x) = \frac{5}{x^2+1}$

b. $g(x) = -\frac{3x+2}{(3x-2)^3}$

- Il denominatore della frazione non si annulla mai, perché è la somma della quantità x^2 , non negativa, e del numero positivo 1. Si ha quindi: $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$.
Il numeratore non dipende dal valore di x ed è costantemente uguale a 5, per cui la funzione non ammette zeri.
- Il denominatore della frazione si annulla per $x = \frac{2}{3}$. Si ha quindi:
 $\text{dom}(g) = \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$.
Annulliamo il numeratore: $3x+2=0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$.
Il valore $x = -\frac{2}{3}$ è uno zero della funzione, perché annulla il numeratore e appartiene al dominio.

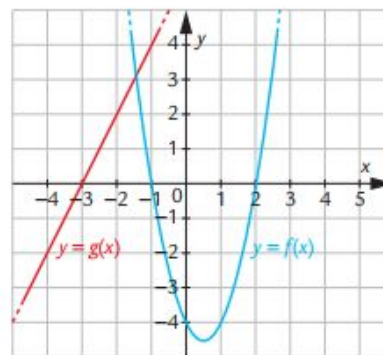
581 In figura sono riportati i grafici di due funzioni polinomiali $f(x)$ e $g(x)$.

a. Determina il dominio delle funzioni:

$$a(x) = \frac{f(x)}{g(x)}; b(x) = \frac{g(x)}{f(x)}; c(x) = [f(x) \cdot g(x)]^{-1}.$$

b. Determina gli zeri delle funzioni $a(x)$ e $b(x)$.

c. La funzione $c(x)$ possiede zeri? Perché?



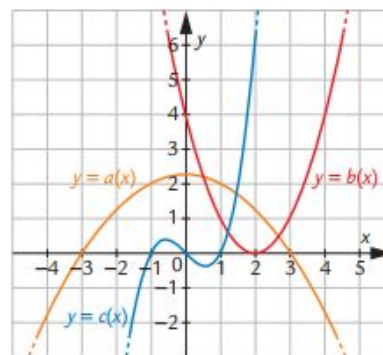
[a. $\mathbb{R} - \{-3\}$; $\mathbb{R} - \{-1; 2\}$; $\mathbb{R} - \{-3; -1; 2\}$; b. -1, 2; -3; c. no]

582 In figura sono riportati i grafici di tre funzioni polinomiali: $a(x)$, $b(x)$ e $c(x)$.

a. Determina il dominio delle funzioni:

$$f(x) = \frac{a(x) \cdot b(x)}{c(x)}; g(x) = \frac{a(x)}{b(x) \cdot c(x)}; h(x) = \frac{c(x)}{a(x) \cdot b(x)}.$$

b. Determina gli zeri delle tre funzioni.



[a. $\mathbb{R} - \{-1; 0; 1\}$; $\mathbb{R} - \{-1; 0; 1; 2\}$; $\mathbb{R} - \{-3; 2; 3\}$; b. -3, 2, 3; -3, 3; -1, 0, 1]



Lezione 1

Proporzionalità quadrata

Alcune coppie di grandezze, come ad esempio il perimetro di una sua area, sono in proporzionalità quadrata.

DEFINIZIONE Variabili in proporzionalità quadratica

Due variabili x e y si dicono in proporzionalità quadratica quando costante il rapporto, che supponiamo diverso da 0, fra y e il quadrato di x .
In simboli: $\frac{y}{x^2} = k$, $k \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Il rapporto k si dice costante di proporzionalità quadratica.

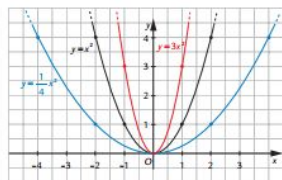
DEFINIZIONE Funzione di proporzionalità quadratica

Un'equazione del tipo $y = kx^2$, con $k \in \mathbb{R} - \{0\}$, definisce una funzione di proporzionalità quadratica, nel dominio $\mathbb{R}$.

Il grafico di una funzione di proporzionalità quadratica è una parabola nell'origine degli assi. Costruiamo per punti il grafico di qualche funzione di proporzionalità quadratica.

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$y = kx^2$	9k	4k	k	$\frac{k}{4}$	0	$\frac{k}{4}$	k	4k	9k

$k > 0$

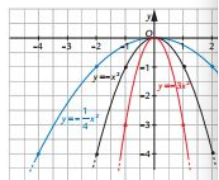


L'immagine della funzione è $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.
La parabola è contenuta nel semipiano delle y non negative e si dice che ha concavità rivolta verso l'alto.

La funzione ha un punto di ordinata minima (o minimo) nel vertice della parabola.

La funzione è decrescente per $x < 0$; crescente per $x > 0$.

$k < 0$



L'immagine della funzione è $\mathbb{R}^- \cup \{0\}$.
La parabola è contenuta nel semipiano delle y non positive e si dice che ha concavità rivolta verso il basso.

La funzione ha un punto di ordinata massima (o massimo) nel vertice della parabola.

La funzione è crescente per $x < 0$; decrescente per $x > 0$.

In entrambi i casi il grafico è simmetrico rispetto all'asse y , perché punti di ascissa opposta hanno la stessa ordinata.

Il coefficiente k ha quindi un duplice significato geometrico:

- il suo segno determina la concavità della parabola;
- il suo valore assoluto determina l'apertura della parabola (ampiezza): la parabola è tanto più ampia quanto minore è $|k|$.

Lezione 2

Funzione quadratica e parabola

1 La parabola di equazione $y = kx^2 + q$

Se applichiamo al grafico della funzione $y = kx^2$ (con $k \neq 0$) una traslazione verticale di vettore $\vec{u} = (0; q)$ ogni punto della parabola subisce un incremento di q nel valore dell'ordinata. La curva che si ottiene è ancora una parabola e ha equazione $y = kx^2 + q$ (Fig. 1).

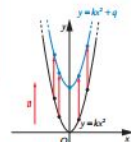


FIGURA 1

PROPRIETÀ 1 Caratteristiche del grafico di $y = kx^2 + q$

La parabola di equazione $y = kx^2 + q$:

- ha il vertice nel punto $(0; q)$, che è di ordinata minima se $k > 0$ e massima se $k < 0$;
- è simmetrica rispetto all'asse y ;
- per $k > 0$ e $q < 0$ (oppure per $k < 0$ e $q > 0$) ha due intersezioni con l'asse x .

Esempio 1 - Caratteristiche del grafico di $y = f(x) = 2x^2 - 3$

La parabola di equazione $y = 2x^2 - 3$:

- si ottiene dalla parabola $y = 2x^2$ con una traslazione verticale di vettore $\vec{v} = (0; -3)$;
- ha il vertice in $V(0; -3)$; essendo la sua concavità rivolta verso l'alto, V è punto di ordinata minima;
- è simmetrica rispetto all'asse y ; alla parabola appartengono sia il punto $(a; f(a))$, con $a \in \mathbb{R}$, sia $(-a; f(a))$ e $f(a) = 2a^2 - 3 = f(-a) = 2(-a)^2 - 3 = 2a^2 - 3$;
- interseca l'asse x in due punti.

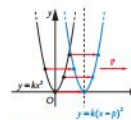


FIGURA 2

2 La parabola di equazione $y = k(x - p)^2$

Se applichiamo al grafico della funzione $y = kx^2$ una traslazione orizzontale di vettore $\vec{v} = (p; 0)$ otteniamo ancora una parabola che ha equazione $y = k(x - p)^2$.

PROPRIETÀ 2 Caratteristiche del grafico di $y = k(x - p)^2$

La parabola di equazione $y = k(x - p)^2$:

- ha il vertice nel punto $(p; 0)$; che è di ordinata minima se $k > 0$ e massima se $k < 0$;
- è simmetrica rispetto alla retta di equazione $x = p$;
- ha due intersezioni con l'asse x coincidenti fra loro, per cui si dice tangente all'asse x nel punto $(p; 0)$.

Esempio 2 - Caratteristiche del grafico di $y = f(x) = -3(x - 2)^2$

La parabola di equazione $y = -3(x - 2)^2$:

- si ottiene dalla parabola $y = -3x^2$ con una traslazione orizzontale di vettore $\vec{v} = (2; 0)$;
- ha il vertice in $V(2; 0)$; essendo la sua concavità rivolta verso il basso, V è punto di ordinata massima;
- è simmetrica rispetto alla retta di equazione $x = 2$;
- è tangente all'asse x nel suo vertice; la funzione $y = -3(x - 2)^2$ si annulla in $x = 2$.



FIGURA 3

Esplora con GeoGebra il grafico della funzione quadratica

Lezione 2 | Funzione quadratica e parabola

TEORIA

3 La parabola di equazione $y = k(x - p)^2 + q$

Applichiamo alla funzione quadratica $y = kx^2$, con $k \neq 0$, una traslazione generale di vettore $\vec{v} = (p; q)$, componendo una traslazione verticale con una traslazione orizzontale. Otteniamo una parabola che ha equazione $y = k(x - p)^2 + q$, le cui caratteristiche discendono dalle osservazioni fatte nei precedenti paragrafi. Le riassumiamo di seguito (Fig. 4).

PROPRIETÀ 3 Caratteristiche del grafico di $y = k(x - p)^2 + q$

La parabola di equazione $y = k(x - p)^2 + q$:

- ha concavità rivolta verso l'alto per $k > 0$, verso il basso per $k < 0$;
- ha il vertice nel punto $(p; q)$, tale punto è di ordinata minima se $k > 0$, di ordinata massima se $k < 0$;
- è simmetrica rispetto alla retta di equazione $x = p$;
- a seconda dei valori di k , p e q , può avere due intersezioni distinte con l'asse x , oppure due intersezioni coincidenti, oppure nessuna intersezione.

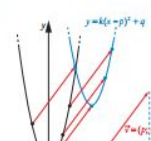
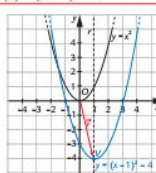


FIGURA 4

Esempio 3 - Caratteristiche del grafico di $y = f(x) = (x - 1)^2 - 4$

La parabola di equazione $y = (x - 1)^2 - 4$:

- si ottiene dalla parabola $y = x^2$ con una traslazione di vettore $\vec{v} = (1; -4)$;
- ha il vertice in $V(1; -4)$; essendo la sua concavità rivolta verso l'alto, V è punto di ordinata minima;
- è simmetrica rispetto alla retta $x = 1$;
- ha due intersezioni distinte con l'asse x .



4 L'equazione polinomiale di una parabola traslata

Sviluppando i calcoli, dall'espressione $y = k(x - p)^2 + q$ si ottiene:

$$y = kx^2 - 2kpx + kp^2 + q$$

L'equazione della parabola assume la forma di una generica equazione polinomiale di secondo grado del tipo $y = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$.

Viceversa, dalla forma $y = ax^2 + bx + c$ si può ritornare alla forma $y = k(x - p)^2 + q$:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

raccolgo a per ottenere il quadrato di un binomio, aggiungiamo e sottraiamo il quadrato della metà del coefficiente di x

Ne deriva che una funzione quadratica di equazione $y = ax^2 + bx + c$ ha sempre come grafico una parabola; essa ha concavità verso l'alto se $a > 0$, verso il basso se $a < 0$.

Il vertice della parabola ha coordinate $\left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$, ovvero $(p; q)$.

Normalmente si usa porre $\Delta = b^2 - 4ac$, per cui le coordinate del vertice si scrivono:

$$\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$$



Ruolo centrale del concetto di funzione

- Esponenziali e logaritmi trattati prima come funzioni
- Viene ripreso il concetto di funzione inversa
- Le equazioni e disequazioni vengono successivamente



Lezione 2

TEORIA

La funzione esponenziale

Esplora con GeoGebra
Grafico di una funzione esponenziale elementare al variare della base

IL NUMERO DI NEPERO
Esiste un valore molto importante della base della funzione esponenziale: il numero di Nepero. Esso è affrontato nell'Esercizio 22.

1 Funzione esponenziale

Definite le potenze con esponente reale, possiamo costruire una nuova funzione.

DEFINIZIONE Funzione esponenziale

Si chiama **funzione esponenziale** di base a la funzione di equazione $f(x) = a^x$, con $a > 0$ e $a \neq 1$.

Per definizione di potenza a esponente reale, x può essere un numero reale qualsiasi: il **dominio** della funzione è $\mathbb{R}$.

La funzione a^x , con $a > 0$, assume soltanto valori positivi al variare di x . L'**insieme immagine** della funzione è $\mathbb{R} - \{0\}$.

Si esclude il valore $a = 1$ perché $f(x) = 1^x = 1$ risulta essere la funzione costante uguale a 1. Disegniamo per punti il grafico di due funzioni esponenziali, una con base $a > 1$ e l'altra con $0 < a < 1$. Per semplicità, calcoliamo i valori delle funzioni per ascisse intere; sappiamo tuttavia che le due funzioni sono calcolabili per qualunque valore reale di x , quindi sono definite anche negli intervalli fra ascisse intere.

Funzione con base $a > 1$: $y = 2^x$		Funzione con base $0 < a < 1$: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	
x	2^x	x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$
-4	$2^{-4} = \frac{1}{16}$	-4	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16$
-3	$2^{-3} = \frac{1}{8}$	-3	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$
-2	$2^{-2} = \frac{1}{4}$	-2	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$
-1	$2^{-1} = \frac{1}{2}$	-1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$
0	$2^0 = 1$	0	$\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$
1	$2^1 = 2$	1	$\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$
2	$2^2 = 4$	2	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
3	$2^3 = 8$	3	$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

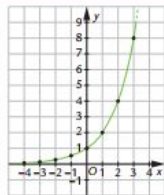


FIGURA 3

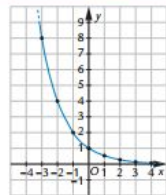


FIGURA 4

Ripetendo i due grafici su uno stesso piano cartesiano si può notare che l'uno è simmetrico dell'altro rispetto all'asse y ; la **simmetria** si rileva anche dalle due equazioni:

$$\text{infatti } y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x} \text{ si ottiene da } y = 2^x \text{ con la trasformazione } \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

Per verificare questa proprietà quando n ha valori elevati, occorre considerare valori di x molto grandi. Per esempio, se $n = 20$ deve essere $x \approx 143$ e la corrispondente ordinata è nell'ordine di 10^{43} .

Se nella tabella proseguissimo nella ricerca dei valori della funzione $y = 2^x$, potremmo notare che i valori di y crescono molto rapidamente al crescere dei valori di x . Confrontando gli andamenti della funzione esponenziale e di una funzione di equazione $y = x^n$, con $x \neq 1$ e $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, possiamo notare una **velocità di crescita** più rapida da parte di $y = 2^x$ rispetto a $y = x^n$, comunque grande sia n (vedi Esercizio 23).

22 - 24

22 - 24

LIBRO

Lezione 3

TEORIA

La funzione logaritmica

1 Logaritmo e funzione logaritmica

Analizziamo la funzione esponenziale $y = 2^x$ e chiediamoci quali operazioni consentano di ricavare la controimmagine di un certo valore di y .

Con riferimento al grafico di Fig. 8 facciamo qualche esempio:

- la controimmagine di $y = 8$ è il valore di x tale che $2^x = 8$, cioè $x = 3$;
- la controimmagine di $y = \frac{1}{2}$ è il valore di x tale che $2^x = \frac{1}{2}$, cioè $x = -1$.

Si tratta in entrambi i casi di individuare quale esponente attribuire alla base 2 per ottenere il risultato prefissato.

In generale, la controimmagine di un certo valore $y = b$ relativo a una funzione esponenziale $y = a^x$, è l'**esponente** che dobbiamo attribuire alla base a per ottenere il valore b . Possiamo ricavare questo esponente attraverso un nuovo operatore matematico: il logaritmo.

DEFINIZIONE Logaritmo in base a di b

Dati due numeri reali positivi a e b , con $a \neq 1$, si chiama **logaritmo in base a del numero b** , e si indica con $\log_a b$, l'esponente al quale si deve elevare la base a per ottenere b . Il numero b si dice **argomento** del logaritmo.

Esempio 1 - Logaritmo di un numero b in una base data a

- $\log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}$, in quanto $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$
- $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$ in quanto $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$

32 - 39

Sappiamo che la funzione $y = a^x$, per $a > 0$ e $a \neq 1$, è biettiva e quindi invertibile. Ora che abbiamo un modo di scrivere le controimmagini di tutti i valori da essa assunti, definiamo la sua funzione inversa e rappresentiamola analiticamente:

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$$

L'inversa di una funzione esponenziale è detta **funzione logaritmica**.

DEFINIZIONE Funzione logaritmica

Si dice **funzione logaritmica** (elementare) ogni funzione, avente come dominio $\mathbb{R}^+$, definita da un'equazione del tipo $y = \log_a x$, con $a > 0$ e $a \neq 1$.

Per visualizzare il grafico di una funzione logaritmica a partire dal grafico della funzione esponenziale, operiamo una simmetria rispetto alla bisettrice $y = x$ del grafico di quest'ultima (Fig. 9 e Fig. 10).

Ricorda che la funzione $y = a^x$ con base $a = 1$ è la funzione costante $y = 1^x = 1$ che non è biettiva e quindi non è invertibile. Ne segue che non è definita la funzione logaritmica di base $a = 1$.

LOGARITMO IN BASE 10 E LOGARITMO IN BASE e
Il logaritmo in base 10 è detto anche logaritmo decimale e si indica con il simbolo $\log$, ossia: $\log x = \log_{10} x$.
Il logaritmo in base e è detto anche logaritmo naturale e si indica con il simbolo $\ln$, ossia: $\ln x = \log_e x$.

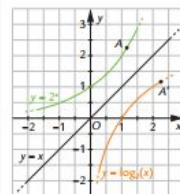


FIGURA 9 $a > 1$

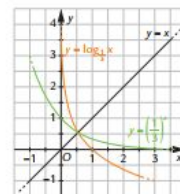


FIGURA 10 $0 < a < 1$

40 - 42

LIBRO



Trattazione trasversale delle trasformazioni

- In analogia con le funzioni, visto che si tratta di particolari funzioni
- Approccio «a spirale» dal primo al quarto anno
- Primo anno: isometrie, con accenno al piano cartesiano
- Secondo anno: trasformazioni non isometriche, con particolare riferimento alla similitudine
- Terzo anno: approfondimento della trattazione nel piano cartesiano, con riferimento alla rappresentazione matriciale
- Quarto anno: rotazione, trattazione generale delle trasformazioni, approfondimento dell'aspetto matriciale, con riferimento a numeri complessi e algebra astratta



Lezione 5

Simmetrie

FIGURA 36



Esplora con GeoGebra
Simmetria centrale

FIGURA 37

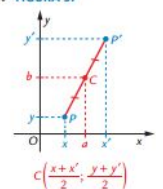
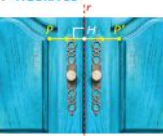


FIGURA 38



Esplora con GeoGebra
Simmetria assiale

TABELLA 4

Simmetria rispetto all'asse x	Simmetria rispetto all'asse y	Simmetria rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante
$\sigma_x: \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$	$\sigma_y: \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$	$\sigma_{y=x}: \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$

TEORIA

1 Simmetria centrale

DEFINIZIONE Simmetria centrale

Dato un punto C , la **simmetria di centro C** è la trasformazione che, a ogni punto P del piano, associa il punto P' in modo che C sia il punto medio del segmento PP' (Fig. 36). Se $P \equiv C$, anche $P' \equiv C$. La simmetria centrale di centro C si indica con il simbolo: σ_C .

La simmetria centrale di centro C coincide con una rotazione di centro C e angolo $+180^\circ$ o -180° . Da questo segue che anche la simmetria centrale è un'isometria.

TEOREMA 5 Simmetria centrale come isometria

La simmetria centrale è un'isometria.

Nel piano cartesiano supponiamo che siano $P(x; y)$ e $C(a; b)$. Facendo riferimento alla Fig. 37, poiché C è il punto medio del segmento PP' , possiamo ricavare le equazioni della simmetria centrale: $\sigma_C: \begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}$

Esempio 9 - Simmetria centrale nel piano cartesiano

Data la simmetria di centro $C(-2; 3)$, qual è il simmetrico di $A(2; -3)$?

Si ha: $\sigma_C: \begin{cases} x' = -4 - x \\ y' = 6 - y \end{cases}$, da cui: $A(2; -3) \rightarrow A'(-4 - 2; 6 + 3) \rightarrow A'(-6; 9)$

2 Simmetria assiale

DEFINIZIONE Simmetria assiale

Data una retta r , la **simmetria di asse r** è la trasformazione che, a ogni punto P del piano, associa il punto P' in modo che r sia l'asse del segmento PP' (Fig. 38). Se $P \in r$, allora $P' \equiv P$. La simmetria assiale di asse r si indica con il simbolo: σ_r .

TEOREMA 6 Simmetria assiale come isometria

La simmetria assiale è un'isometria.

Il teorema si dimostra in modo diverso (Figg. 43-46 nella pagina a fianco) a seconda di come A e B sono disposti rispetto a r : ne proponiamo la dimostrazione come esercizio. Per quanto riguarda le equazioni, ci limitiamo ad alcuni casi particolari (Tab. 4).

RIFLETTI SULLA TEORIA

UNITÀ 17 Il piano cartesiano e le trasformazioni isometriche

Applicare e riconoscere simmetrie

59 Per ciascuna delle seguenti figure, disegna la sua simmetrica rispetto al punto O o alla retta r .

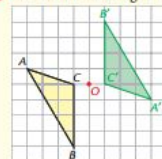


FIGURA 39

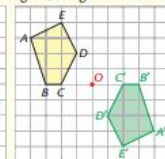


FIGURA 40

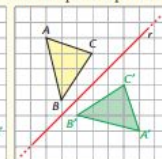


FIGURA 41

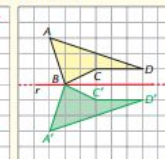


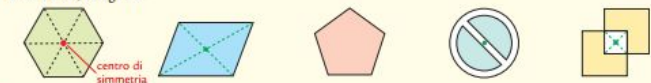
FIGURA 42

60 Facendo riferimento alle Figg. 39 e 40, supponi che O sia l'origine di un sistema di riferimento cartesiano, traccia gli assi cartesiani e scrivi le coordinate dei vertici dei poligoni dati e dei loro trasformati rispetto alla simmetria di centro O .

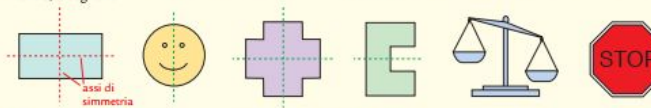
Fig. 39: $A(-4; 1)$, $B(-1; -4)$, $C(-1; 0)$; $A'(4; -1)$, $B'(1; 4)$, $C'(1; 0)$.
Fig. 40: $A(-4; 3)$, $B(-2; 0)$, $C(-2; 0)$, $D(-1; 2)$; $A'(4; -3)$, $B'(2; 0)$, $C'(2; 0)$, $D'(1; -2)$.

61 Facendo riferimento alla Fig. 42, fai coincidere la retta r con uno degli assi cartesiani, traccia l'altro asse a tua scelta e scrivi le coordinate dei vertici del poligono dato e del suo trasformato rispetto alla simmetria di asse r .
[Se r coincide con l'asse x e l'origine è in B : $A(-1; 3)$, $B(0; 0)$, $C(2; 1)$; $A'(1; -3)$, $B'(0; 0)$, $C'(2; -1)$.]
[Se r coincide con l'asse y e l'origine è in B : $A(-1; 3)$, $B(0; 0)$, $C(2; 1)$; $A'(-1; -3)$, $B'(0; 0)$, $C'(-2; -1)$.]

62 Quando una figura è invariante rispetto a una simmetria di centro C , si dice che C è un suo **centro di simmetria**. Sulla traccia del primo esempio svolto, stabilisci se le seguenti figure hanno un centro di simmetria e, in caso affermativo, disegnalo.



63 Quando una figura è invariante rispetto a una simmetria di asse r , si dice che r è un suo **asse di simmetria**. Sulla traccia del primo esempio svolto, stabilisci se le seguenti figure hanno assi di simmetria e, in caso affermativo, disegnali.



Riconoscere e dimostrare proprietà delle simmetrie

64 Facendo riferimento alle figure che hai disegnato nell'Esercizio 59, stabilisci se le simmetrie centrali e assiali conservano l'orientamento dei punti e motiva le tue risposte.
[Le centrali sì, le assiali no.]

65 Possiamo affermare che una simmetria assiale conserva le direzioni, cioè trasforma una retta in un'altra a essa parallela? E una simmetria centrale? Spiega perché sì o perché no, anche con l'aiuto di GeoGebra.
[No; sì]

66 Per dimostrare che la simmetria assiale è un'isometria, è necessario prendere in esame i quattro casi illustrati nelle Figg. 43, 44, 45 e 46. Svolgi le quattro dimostrazioni.

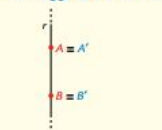


FIGURA 43 A e B appartengono a r.



FIGURA 44 A appartiene a r; B non vi appartiene.



FIGURA 45 A e B non appartengono a r e giacciono nello stesso semipiano di origine r.

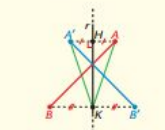


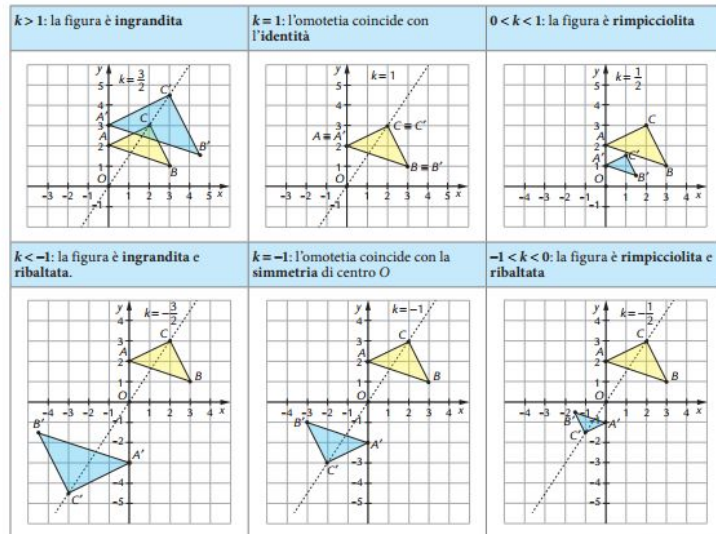
FIGURA 46 A e B non appartengono a r e giacciono in semipiani opposti di origine r.



Lezione 3 | Omotetie e similitudini

2 Il rapporto di proporzionalità

Analizziamo le diverse situazioni che possono presentarsi nel trasformare una figura, ad esempio un triangolo ABC , con un'omotetia $\omega_{O,k}$ al variare del valore di k .



29 - 30 ►



Esplora con GeoGebra Omotetie nel piano cartesiano

3 Le omotetie nel piano cartesiano

Ci limitiamo a esaminare omotetie con centro nell'origine degli assi. Nel piano cartesiano, note le coordinate di un punto $P(x; y)$ si ricavano le coordinate del suo trasformato $P'(x'; y')$ nell'omotetia ω_O di centro $O(0; 0)$ e rapporto k , con $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ attraverso le seguenti equazioni:

$$\omega_{O,k} = \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$$

Dimostriamo che le equazioni soddisfano alla definizione di omotetia. Attraverso di esse il punto $P(a; b)$ viene trasformato nel punto $P'(ka; kb)$.

Osserviamo quanto segue:

- O , P e P' sono allineati, in quanto sono appartenenti alla retta $y = \frac{b}{a}x$ se $a \neq 0$ oppure all'asse x se $a = 0$.
- Se $k > 0$, P e P' appartengono allo stesso quadrante; se $k < 0$, P e P' appartengono a quadranti opposti;
- $\overline{OP'} = \sqrt{k^2 a^2 + k^2 b^2} = |k| \sqrt{a^2 + b^2} = |k| \overline{OP}$.

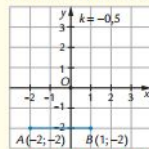
31 - 39 ►

► RIFLETTI SULLA TEORIA

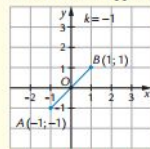
UNITÀ 32 | Il teorema di Talete e le trasformazioni non isometriche

► Riconoscere e costruire figure omotetiche

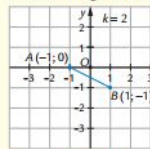
29 Dato il segmento AB rappresentato in ciascuna delle seguenti figure, trova le coordinate degli estremi del trasformato $A'B'$ nell'omotetia di centro O e rapporto k indicato. Disegna $A'B'$.



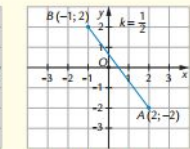
a. $A'(-1; 1)$ e $B'(-0.5; -1)$



b. $A'(1; 1)$ e $B'(-1; -1)$



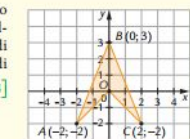
c. $A'(-4; 0)$ e $B'(4; -2)$



d. $A'(1; -1)$ e $B'(-0.5; 1)$

30 Dato il quadrilatero $ABCO$ in figura, ricava le coordinate del quadrilatero $A'B'C'O'$ a esso corrispondente nell'omotetia di centro O e rapporto $k = -2$. Calcola perimetro e area di $ABCO$ e $A'B'C'O'$. Che relazione c'è fra il rapporto di omotetia e il rapporto fra i perimetri dei due quadrilateri? E tra il rapporto di omotetia e le aree?

$$[p = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{29}; p' = 2(4\sqrt{2} + 2\sqrt{29}); A = 8; A' = 24]$$



► Applicare le equazioni di un'omotetia

31 **ESERCIZIO SVOLTO** Determina le coordinate del punto $P(x; y)$, il cui corrispondente nell'omotetia di equazioni

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{4}x \\ y' = -\frac{1}{4}y \end{cases} \text{ è il punto } P'(-2; \frac{1}{2}).$$

SOLUZIONE

Sostituiamo le coordinate di P' nelle equazioni dell'omotetia: $\begin{cases} -2 = -\frac{1}{4}x \\ \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}y \end{cases}$; risolvendo le equazioni rispetto a x e y si ricavano le coordinate di P : $P(8; -2)$.

Completa ricavando le coordinate di P' , P e k , se P' è il trasformato di P in un'omotetia di centro O e rapporto k .

32 $k = \frac{1}{5}$; $P(\frac{1}{2}; -4)$; $P'(\frac{1}{10}; -\frac{4}{5})$

34 $k = -\frac{3}{2}$; $P(-1; \frac{4}{3})$; $P'(\frac{3}{2}; -2)$

33 $k = -1$; $P(\frac{3}{2}; \frac{5}{2})$; $P'(-\frac{3}{2}; -\frac{5}{2})$

35 $k = \frac{1}{2}$; $P(0; \frac{1}{3})$; $P'(0; \frac{1}{6})$

36 Scrivi le equazioni dell'omotetia con centro nell'origine che trasforma:

a. $A(-3; 6)$ in $A'(-1; 2)$ b. $A(-4; 8)$ in $A'(-2; 4)$ c. $A(\frac{3}{4}; -\frac{1}{2})$ in $A'(-\frac{1}{4}; \frac{1}{6})$ $[a. k = \frac{1}{3}; b. k = \frac{1}{2}; c. k = -\frac{1}{3}]$

37 Considera la retta r di equazione $y = -2x + 3$. Scrivi l'equazione in forma esplicita della retta r' corrispondente di r nell'omotetia di centro O e rapporto $\frac{5}{3}$.

(Suggerimento: per le proprietà delle omotetie, si ha $r' \parallel r$, quindi basta ricavare la pendenza della retta r' dall'equazione di r e individuare il trasformato del punto di intersezione di r con l'asse y .) $[y = -\frac{2}{5}x + \frac{5}{3}]$

38 Considera un segmento AB di estremi $A(x_1; y_1)$ e $B(x_2; y_2)$. Quali sono le coordinate del punto medio M' di $A'B'$ trasformato di AB nell'omotetia $\omega_{O,k}$?

39 Ricordando che una figura geometrica è **unita** in una trasformazione se viene trasformata in se stessa, dimostra che qualunque retta che passa per l'origine degli assi è unita in un'omotetia di centro O e rapporto k . Si può dire che anche ogni punto della retta è unito? $[No, i punti non sono uniti]$

ESERCIZI PAG. 737

725



Lezione 5

TEORIA

Trasformazione di grafici

1 Grafici e traslazioni

Traslazioni orizzontali

Consideriamo le equazioni di una traslazione orizzontale e della sua inversa:

$$\begin{cases} x' = x + k \\ y' = y \end{cases} \quad \tau^{-1}: \begin{cases} x = x' - k \\ y = y' \end{cases}$$

Se $k > 0$, la traslazione è verso destra, mentre se $k < 0$ è verso sinistra.

A partire dall'espressione analitica di una funzione, $y = f(x)$, possiamo trovare quella della sua trasformata, ricordando di effettuare la sostituzione che deriva dalle equazioni di τ^{-1} . Si ottiene: $y = f(x - k)$.

Esempio 10 - Traslazione orizzontale del grafico di una funzione

Data la funzione $y = f(x) = x^2$, troviamo, a partire dal suo grafico, i grafici delle funzioni $y = f(x - 1) = (x - 1)^2$ e $y = f(x + 2) = (x + 2)^2$.

- Per la prima funzione si ha $k = 1$, quindi il grafico è traslato verso destra di un'unità (Fig. 18);
- per la seconda funzione si ha $k = -2$, quindi il grafico è traslato verso sinistra di due unità (Fig. 19).

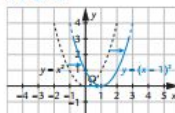


FIGURA 18

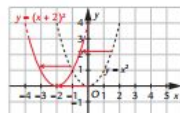


FIGURA 19

Traslazioni verticali

Consideriamo le equazioni di una traslazione verticale e della sua inversa:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y + k \end{cases} \quad \tau^{-1}: \begin{cases} x = x' \\ y = y' - k \end{cases}$$

Se $k > 0$, la traslazione è verso l'alto, mentre se $k < 0$ è verso il basso.

A partire dall'espressione analitica di una funzione, $y = f(x)$, possiamo trovare quella della sua trasformata, ricordando di effettuare la sostituzione che deriva dalle equazioni di τ^{-1} . Si ottiene così: $y - k = f(x) \Leftrightarrow y = f(x) + k$.

Esempio 11 - Traslazione verticale del grafico di una funzione

Data la funzione $y = f(x) = x^2$, troviamo a partire dal suo grafico, i grafici delle funzioni $y = f(x) - 1 = x^2 - 1$ e $y = f(x) + 2 = x^2 + 2$.

- Per la prima funzione si ha $k = -1$, quindi il grafico è traslato verso il basso di un'unità (Fig. 20);
- per la seconda funzione si ha $k = 2$, quindi il grafico è traslato verso l'alto di due unità (Fig. 21).

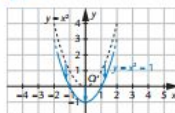


FIGURA 20

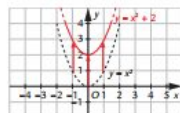


FIGURA 21

RIFLETTI SULLA TEORIA

UNITÀ 6 | Le trasformazioni nel piano cartesiano

Trasformare grafici mediante traslazioni

69 Data la funzione $y = f(x) = x^2 + 2x$, completa la seguente tabella, indicando l'espressione analitica della funzione che corrisponde a ciascuna trasformazione.

Descrizione della traslazione	Vettore	Espressione analitica
Orizzontale destra di 3 unità	$(3; 0)$	$y = f(x - 3) = (x - 3)^2 + 2(x - 3) = x^2 - 4x + 3$
Verticale verso l'alto di 0,3 unità	$(0; 0,3)$	$y = f(x) + 0,3 = x^2 + 2x + 0,3$
Verticale verso il basso di 10 unità	$(0; -10)$	$y = f(x) - 10 = x^2 + 2x - 10$
Orizzontale sinistra di $\frac{3}{5}$ di unità	$(-\frac{3}{5}; 0)$	$y = f(x + \frac{3}{5}) = (x + \frac{3}{5})^2 + 2(x + \frac{3}{5}) = x^2 + \frac{16}{5}x + \frac{39}{25}$

70 A partire dal grafico della funzione $f(x) = \frac{1}{x}$, disegna i grafici delle seguenti funzioni e spiega quali traslazioni hai effettuato:

- $f_1(x) = \frac{1}{x+1} = f(x+1)$ [Traslazione orizzontale verso sinistra di un'unità]
- $f_2(x) = \frac{1}{x-1} = f(x-1)$ [Traslazione orizzontale verso destra di un'unità]
- $f_3(x) = \frac{1}{x} + 1 = f(x) + 1$ [Traslazione verticale verso l'alto di un'unità]
- $f_4(x) = \frac{1}{x} - 1 = f(x) - 1$ [Traslazione verticale verso il basso di un'unità]

71 Il grafico tratteggiato in Fig. 22 rappresenta la funzione $y = \sqrt{x}$, mentre gli altri grafici sono stati ricavati da esso mediante traslazioni orizzontali o verticali. Scrivi le espressioni analitiche delle funzioni rappresentate da questi grafici.

$$[y = a(x) = \sqrt{x} + 3, y = b(x) = \sqrt{x - 2}, y = c(x) = \sqrt{x - 1}, y = d(x) = \sqrt{x} - 2]$$

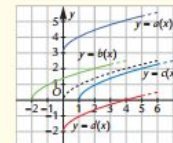


FIGURA 22

72 Con GeoGebra Disegna con GeoGebra il grafico della funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$: puoi scriverla come potenza a esponente frazionario o digitando $\text{cbrt}(x)$, che sta per cubic root.

In seguito, scrivi nella Barra di inserimento le seguenti formule: $a(x) = f(x - 2)$, $b(x) = f(x + 3)$, $c(x) = f(x) + 5$. Quali grafici disegna il software? Quali espressioni analitiche puoi leggere in visualizzazione Algebra?

$$[y = \sqrt[3]{x - 2}, y = \sqrt[3]{x + 3}, y = \sqrt[3]{x} + 5]$$

73 ESERCIZIO SVOLTO A partire dal grafico della funzione $f(x) = x^2$, disegna il grafico della funzione $g(x) = x^2 + 2x - 1$.

SOLUZIONE

Si può scrivere: $g(x) = x^2 + 2x - 1 = x^2 + 2x + 1 - 2 = (x + 1)^2 - 2$.

È allora possibile ricavare il grafico cercato, mediante due traslazioni successive:

- $f(x) = x^2 \rightarrow f_1(x) = f(x + 1) = (x + 1)^2$
traslazione orizzontale sinistra di un'unità
- $f_1(x) = (x + 1)^2 \rightarrow g(x) = f_1(x) - 2 = (x + 1)^2 - 2$
traslazione verticale verso il basso di due unità

In Fig. 23 sono rappresentati i passaggi.

Con GeoGebra puoi verificare la correttezza del procedimento,

- tramite i seguenti passaggi:
- disegna il grafico della funzione $f(x) = x^2$;
- scrivi nella Barra di inserimento la formula $f_1(x) = f(x + 1)$;
- scrivi nella Barra di inserimento la formula $g(x) = f_1(x) - 2$.

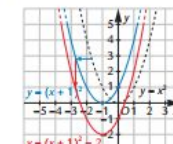


FIGURA 23

74 A partire dal grafico della funzione $y = f(x) = x^2$, disegna il grafico della funzione $y = h(x) = x^2 - 6x + 10$.



Lezione 6

TEORIA

Numeri complessi, vettori, trasformazioni e matrici

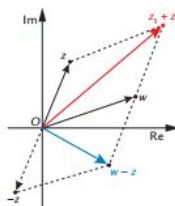


FIGURA 9

Abbiamo visto che un numero complesso può essere rappresentato da un punto o da un vettore nel piano di Gauss. Diamo ora un'interpretazione geometrica delle operazioni tra numeri complessi.

Addizione e sottrazione

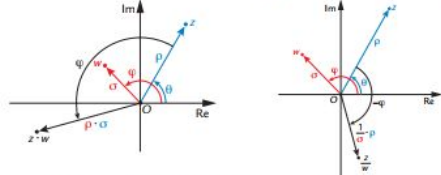
L'addizione e la sottrazione di numeri complessi equivalgono all'addizione e sottrazione di vettori, nelle loro componenti cartesiane (Fig. 9): dati $z = a + ib$ e $w = c + id$, posto $\vec{z} = (a; b)$ e $\vec{w} = (c; d)$, al numero $z + w = a + c + i(b + d)$ corrisponde il vettore $\vec{z} + \vec{w} = (a + c; b + d)$ e al numero $z - w = a - c + i(b - d)$ corrisponde il vettore $\vec{z} - \vec{w} = (a - c; b - d)$.

Moltiplicazione e divisione

Consideriamo due numeri complessi z e w , di cui il secondo di modulo 1, scritti in forma esponenziale: $z = \rho e^{i\theta}$, $w = e^{i\varphi}$.

Prodotto	Quoziente
$z \cdot w = \rho e^{i(\theta + \varphi)}$ Per effetto della moltiplicazione per w , il modulo di z rimane invariato, mentre il suo argomento viene aumentato della quantità φ . Dal punto di vista geometrico, il punto e il vettore corrispondenti a z , subiscono una rotazione attorno all'origine di un angolo φ .	$z : w = \rho e^{i(\theta - \varphi)}$ Per effetto della divisione per w , il modulo di z rimane invariato, mentre il suo argomento viene diminuito della quantità φ . Dal punto di vista geometrico, il punto e il vettore corrispondenti a z , subiscono una rotazione attorno all'origine di un angolo $-\varphi$.

Nel caso in cui il numero w abbia modulo generico σ , la moltiplicazione e la divisione di z per w , oltre a una rotazione, comportano anche la trasformazione mediante un'omotetia con centro nell'origine e rapporto, rispettivamente, σ o $\frac{1}{\sigma}$.



Siccome il rapporto di omotetia in entrambi i casi è positivo e poiché sappiamo che la composizione di un'omotetia con una rotazione dà una similitudine diretta, ne segue che esiste una **rappresentazione matriciale** dei numeri complessi, mediante la matrice di una similitudine diretta, appunto:

$$z = a + ib = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \rho \sin \theta & \rho \cos \theta \end{bmatrix}$$

Si può dimostrare che tutte le operazioni tra numeri complessi corrispondono alle analoghe operazioni tra matrici: proponiamo le verifiche come esercizio nella pagina a fianco.

139 - 154

RIFLETTI SULLA TEORIA

UNITÀ 6 | Numeri complessi

Rappresentare numeri complessi mediante trasformazioni

Dati i seguenti numeri complessi, scrivi le equazioni della rotazione e dell'omotetia a cui ognuno di essi corrisponde quando moltiplica o divide un altro numero complesso.

- 139 -5 140 10i 141 4 - i 142 2 + 2i

- 143 Le radici dell'unità hanno tutto modulo uguale a 1, per cui corrispondono a rotazioni. Scrivi le equazioni di tali rotazioni nel caso di radici quadrate, cubiche e quarte. In seguito generalizza il risultato al caso delle radici di indice n .

Con GeoGebra puoi calcolare ampiezze di angoli e distanze, trasformare punti mediante rotazioni e omotetie. Utilizza tali strumenti per calcolare, per ciascuna delle seguenti coppie di numeri complessi, il prodotto e il quoziente in entrambi gli ordini. Verifica poi con il calcolo i risultati ottenuti.

- 144 $1 + i, -2i$ 145 $-4, 3 + 2i$ 146 $-2 - 2i, 4 - 3i$ 147 $\sqrt{2} + \sqrt{2}i, \sqrt{3} - \sqrt{3}i$

Rappresentare numeri complessi mediante matrici

- 148 Considera la rappresentazione del generico numero $z = a + ib$ mediante la matrice $Z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$. Quali matrici corrispondono ai numeri reali? Quali ai numeri immaginari? Scrivi, in particolare, la matrice associata al numero 1 e la matrice associata all'unità immaginaria i .

- 149 Verifica che il numero $z = a + ib$, con la notazione matriciale, può essere scritto nella forma:

$$z = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

- 150 Data la matrice $Z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, determina la sua inversa. A quale numero complesso corrisponde? C'è una relazione con il numero complesso corrispondente a Z ? [Z^{-1} corrisponde al reciproco di z]

- 151 Considera le matrici: $\Sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\Sigma_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\Sigma_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. A quali trasformazioni corrispondono? A quali numeri complessi? Mostra che, moltiplicando tra loro due matrici tra quelle date, si ottiene ancora una di esse: in particolare, completa la seguente tavola di moltiplicazione.

	Σ_0	Σ_1	Σ_2	Σ_3
Σ_0	Σ_0	Σ_1	Σ_2	Σ_3
Σ_1	Σ_3	Σ_0	Σ_2	Σ_1
Σ_2	Σ_2	Σ_1	Σ_0	Σ_3
Σ_3	Σ_1	Σ_2	Σ_3	Σ_0

- 152 **SAPERNE DI PIÙ** Facendo riferimento all'Esercizio 52 dell'Unità T5, dimostra che le matrici presentate nell'Esercizio 151 formano gruppo rispetto alla moltiplicazione di matrici e che i numeri complessi a esse corrispondenti formano gruppo rispetto alla moltiplicazione di numeri complessi.

- 153 **SAPERNE DI PIÙ** Mostra che l'insieme $\mathbb{C}$ è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di addizione e che l'insieme $\mathbb{C} - \{0\}$ è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di moltiplicazione.

- 154 **SAPERNE DI PIÙ** Un insieme A , in cui siano definite due operazioni, che indichiamo con $\oplus$ e $\otimes$, è un **campo**, se valgono le seguenti proprietà:

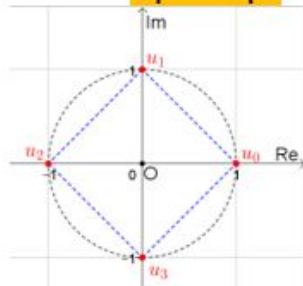
- A è un gruppo commutativo rispetto all'operazione $\oplus$, con elemento neutro n_+ ;
- $A - \{n_+\}$ è un gruppo commutativo rispetto all'operazione $\otimes$;
- l'operazione $\otimes$ è distributiva rispetto all'operazione $\oplus$.

Spiega perché l'insieme $\mathbb{C}$ è un campo rispetto alle operazioni di addizione e moltiplicazione. Anche l'insieme delle matrici del tipo $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ lo è?



465.

Saperne di più



In figura sono rappresentate le radici dell'unità, già trattate nell'Esercizio

464.

Scrivi gli argomenti dei numeri complessi precedenti, nell'ordine in cui li abbiamo considerati: $0, \frac{\pi}{2}, \pi, 2\pi$. Osserva ora il quadrato in figura e supponi di ruotarlo attorno al suo centro, a partire dalla posizione iniziale, ogni volta in senso antiorario di un angolo pari a uno degli argomenti precedenti.

Possiamo affermare che le quattro rotazioni trasformano il quadrato in sé stesso? **Sì**

Scrivi le loro equazioni, considerando l'origine nel centro del quadrato.

$$\rho_0 = \rho_{0,0}: \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases} \quad \rho_1 = \rho_{0,\frac{\pi}{2}}: \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases} \quad \rho_2 = \rho_{0,\pi}: \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases} \quad \rho_3 = \rho_{0,\frac{3\pi}{2}}: \begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$$

Completa la tabella seguente, relativa alla composizione delle rotazioni fra loro

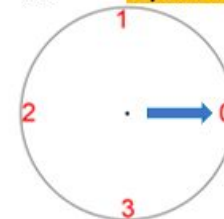
$\circ$	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_0
ρ_2	ρ_2	ρ_3	ρ_0	ρ_1
ρ_3	ρ_3	ρ_0	ρ_1	ρ_2

Che cosa puoi osservare in merito alla struttura dell'insieme di queste rotazioni con l'operazione di composizione? Osservi una corrispondenza con l'insieme analizzato nell'Esercizio 464?

Anche in questo caso si tratta di un gruppo abeliano, in cui gli elementi si compongono fra loro nello stesso ordine in cui si compongono le radici quarte dell'unità.

466.

Saperne di più



Osserva l'orologio mostrato in figura, in cui ci sono solo quattro numeri, disposti in senso antiorario, e tale è pure il verso in cui ruota l'unica lancetta.

Considera l'operazione di addizione fra questi numeri, così definita: ogni volta che si aggiunge un'unità a un numero, la lancetta compie uno scatto in verso antiorario, fino al numero successivo. Completa la tabella relativa a tale operazione.

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Quali analogie osservi rispetto agli insiemi analizzati negli Esercizi 464 e 465?

Quali sono le rotazioni che deve compiere la lancetta per passare da un numero all'altro sull'orologio?

Sì ha ancora un gruppo abeliano, in cui gli elementi si compongono fra loro nello stesso ordine in cui si compongono nei precedenti gruppi.

Sono esattamente le quattro rotazioni che trasformano il quadrato in sé stesso.



Limiti di successioni

- Sono trattati prima e indipendentemente dai limiti di funzioni in generale
- Si introduce a piccoli passi il concetto più complicato del triennio, con il suo linguaggio
- Si dà importanza alle successioni che, pur essendo particolari funzioni, hanno aspetti numerici interessanti
- Si evidenzia il principio di induzione e un nuovo modo di condurre una dimostrazione



3 Limite infinito di una successione

n	a_n
0	1
1	2
2	5
5	26
10	101
1000	1 000 001
10^6	$10^{12} + 1$
10^{12}	$10^{24} + 1$

TABELLA 1

Consideriamo la successione $a_n = n^2 + 1$, dell'Esempio 3: abbiamo già osservato che, all'aumentare di n , i suoi termini diventano "sempre più grandi" (Tab. 1) e che la successione diverge a $+\infty$.

Troviamo un modo rigoroso per esprimere questa proprietà.

Scegliamo un numero positivo M , che consideriamo "grande", ad esempio $M = 1\,000\,000$, e mostriamo che, da un certo valore di n in poi, tutti i termini della successione sono maggiori di M .

A questo proposito risolviamo la disequazione $a_n > M$:

$$n^2 + 1 > 1\,000\,000 \Leftrightarrow n^2 > 999\,999 \Leftrightarrow n > \sqrt{999\,999} \approx 999,99$$

entrambi i membri sono positivi

Possiamo quindi affermare che $a_n > 1\,000\,000$ se $n > 999$.

Generalizziamo il ragionamento a qualsiasi valore di M , che a noi interessa rendere grande a piacere. Risolviamo la disequazione $a_n > M$ nel caso generale:

$$n^2 + 1 > M \Leftrightarrow n^2 > M - 1 \Leftrightarrow n > \sqrt{M - 1}$$

Se indichiamo con $[\sqrt{M - 1}]$ la parte intera del numero $\sqrt{M - 1}$, siamo certi che, per ogni numero naturale $n > [\sqrt{M - 1}]$, la disequazione è verificata.

Possiamo allora dare la seguente definizione.

DEFINIZIONE Limite di una successione divergente a $+\infty$

Data una successione di termine generale u_n , diciamo che essa **diverge** a $+\infty$, o che il suo **limite** è $+\infty$, se, comunque scelto un numero $M > 0$, esiste un numero naturale n_M per cui si ha $u_n > M$, $\forall n > n_M$. In simboli scriviamo: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Per la successione precedente possiamo quindi scrivere: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + 1) = +\infty$.

Possiamo interpretare graficamente il fatto che una successione diverga a $+\infty$ osservando che, tracciata la retta di equazione $y = M$, con $M > 0$, da un certo punto in poi, i punti del diagramma stanno tutti al di sopra di essa (Fig. 5).

DEFINIZIONE Limite di una successione divergente a $-\infty$

Data una successione di termine generale u_n , diciamo che essa **diverge** a $-\infty$, o che il suo **limite** è $-\infty$, se, comunque scelto un numero $M > 0$, esiste un numero naturale n_M per cui si ha $u_n < -M$, $\forall n > n_M$. In simboli: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

(leggi «limite per n che tende a più infinito di u_n uguale a meno infinito»)

Esempio 4 • Successione divergente a $-\infty$

Verifichiamo che $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - n^2) = -\infty$.

Sia $M > 0$. Risolviamo la disequazione $u_n < -M$:

$$1 - n^2 < -M \Leftrightarrow n^2 > M + 1 \Leftrightarrow n > \sqrt{M + 1}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo tenuto conto del fatto che n non può essere negativo.

Se poniamo $n_M = [\sqrt{M + 1}]$, la disequazione è verificata per ogni $n > n_M$.

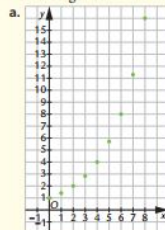
In questo caso i termini sono negativi ma diventano sempre più grandi in valore assoluto: la successione quindi diverge a $-\infty$.

Graficamente, per $n \geq n_M$, i punti del diagramma della successione stanno tutti sotto la retta $y = -M$.

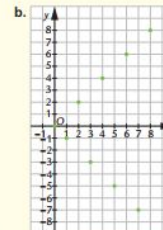
IL SIGNIFICATO DELLE PAROLE
Quando una proprietà è verificata «da un certo punto in poi», per ogni numero naturale $n > n_M$, si usa anche dire che è **definitivamente verificata**.

Esplorare il comportamento di successioni divergenti

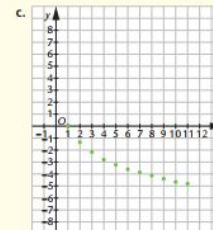
28 Nelle seguenti figure sono rappresentati alcuni grafici di successioni: stabilisci se divergono a $+\infty$, a $-\infty$ o se non divergono.



[$+\infty$]



[non diverge]



[$-\infty$]



ATTIVITÀ CON GEOGEBRA

Esploriamo con il Foglio di calcolo il comportamento della successione $a_n = -\sqrt{n}$.

1. Nelle celle A1 e B1 scrivi rispettivamente n e a_n . Nella colonna A inserisci i numeri naturali da 0 a 99; nella colonna B inserisci la formula opportuna per calcolare i termini della successione.

2. Una volta compilata la tabella dei valori, seleziona tutte le celle non vuote delle colonne A e B e crea una *Lista di punti*: in tal modo viene visualizzata una parte del grafico della successione.

3. Crea uno slider M , variabile da 1 a 50, con incremento 0,5, e portalo al valore 1. Evidenzia sul piano cartesiano il semipiano rappresentato dalla disequazione $y \leq -M$.

Fai variare M .

a. Per quali valori di n si ha $a_n < -5$? [$n > 25$]

b. Per quali valori di n si ha $a_n < -8,5$? [$n > 72$]

Le seguenti successioni sono divergenti a $+\infty$: per ognuna di esse determina il valore di n oltre il quale i termini della successione sono tutti maggiori del valore di M indicato.

30 $a_n = n^2$, $M = 500\,000$

[6299] 31 $a_n = e^{n+1}$, $M = 1\,000\,000$

[14]

32 Analogamente a quanto è stato evidenziato in Fig. 5, interpreta dal punto di vista grafico la definizione di successione divergente a $-\infty$, per la successione dell'Esempio 4.

Le seguenti successioni sono divergenti a $-\infty$: per ognuna di esse determina il valore di n oltre il quale i termini della successione sono tutti minori di $-M$ (il valore di M è quello indicato).

33 $a_n = 1 - n^3$, $M = 500\,000$

[79] 34 $a_n = \log_3 n^{10}$, $M = 80$

[6561]

Verificare il limite di una successione divergente

Verifica i seguenti limiti.

35 **ESERCIZIO SVOLTO** $\lim_{n \rightarrow +\infty} (10 - n^5) = -\infty$

SOLUZIONE

Fissiamo $M > 0$ e risolviamo la disequazione $10 - n^5 < -M$:

$$10 - n^5 < -M \Leftrightarrow n^5 > 10 + M \Leftrightarrow n > \sqrt[5]{10 + M}$$

Ponendo $n_M = \lceil \sqrt[5]{10 + M} \rceil$, la disequazione è verificata per ogni $n > n_M$.

36 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$

37 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-\sqrt{n+1}) = -\infty$

38 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{n+1}) = +\infty$

39 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-2^n) = -\infty$

40 **SEGUI LA TRACCIA** Dimostra che una progressione aritmetica di ragione $d > 0$ diverge a $+\infty$.

TRACCIA

Il termine generale della progressione è: $u_n = u_1 + (n-1)d$.

Imposta la disequazione $u_n > M$, con $M > 0$: $u_1 + (n-1)d > M \Leftrightarrow (n-1)d > \frac{M - u_1}{d}$.

È possibile dividere entrambi i membri per d perché $d > 0$. Si ha: $n - 1 > \frac{M - u_1}{d} \Leftrightarrow n > 1 + \frac{M - u_1}{d}$.

Ponendo $n_M = \lceil 1 + \frac{M - u_1}{d} \rceil$, la disequazione è verificata $\forall n > n_M$.



Integrali con una scansione non «tradizionale»

- Si parte dal concetto di integrale definito, introdotto in casi semplici
- Si dà priorità al concetto anziché al calcolo
- Si giunge all'integrale indefinito mediante il teorema fondamentale
- Si complica il calcolo in modo graduale
- Una seconda unità è dedicata alle regole di calcolo di integrali indefiniti e definiti, al calcolo di aree e volumi



Lezione 5

TEORIA

L'integrale indefinito

1 Integrale indefinito

Le funzioni $\Phi(x)$ e $\varphi(x) = \begin{cases} \ln x + 2 & \text{se } x > 0 \\ \ln(-x) - 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$ sono entrambe primitive di f in $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$, ma non differiscono per una costante.

La conoscenza di una qualsiasi primitiva di una funzione f in $[a; b]$ consente di calcolare il valore dell'integrale definito di f su $[a; b]$. Per questa ragione, ma non solo, affrontiamo ora il problema della ricerca delle funzioni primitive.

Osserviamo che la caratterizzazione delle primitive data nella **Lezione 4** vale a condizione che la funzione f sia definita su un singolo intervallo.

Consideriamo invece, per esempio, la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ in $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

La funzione $\Phi(x) = \ln|x| = \begin{cases} \ln x & \text{se } x > 0 \\ \ln(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$ è una primitiva di f in ogni intervallo che non contiene l'origine. Da ora in avanti indichiamo con I un intervallo o l'unione di più intervalli.

DEFINIZIONE Integrale indefinito

Data una funzione f definita in $I \in \mathbb{R}$, l'insieme di tutte le primitive $\Phi(x) + c$, con $c \in \mathbb{R}$, di una funzione f in I si dice **integrale indefinito** di f .

Si scrive: $\int f(x) dx$ e si legge «integrale di f in dx ».

Il simbolo dx indica la variabile di integrazione.

Esempio 11 - Integrale indefinito

Data $f(x) = \cos x$, una primitiva su un qualsiasi intervallo è $\Phi(x) = \sin x$, quindi l'integrale indefinito è: $\int \cos x dx = \sin x + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Infatti $D(\sin x + c) = \cos x$ per ogni valore di $c \in \mathbb{R}$.

2 Integrali indefiniti immediati

Nota che la **Tab. 1** si ottiene leggendo «in senso inverso» la tabella delle derivate delle funzioni elementari.

L'**Esempio 11** propone un integrale che possiamo definire **immediato**, perché la funzione integranda è una funzione elementare. Gli integrali indefiniti immediati costituiscono la base dei metodi di calcolo per determinare le primitive.

TABELLA 1

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$, con $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$	6. $\int e^x dx = e^x + c$
2. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$	7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$, con $a > 0$ e $a \neq 1$
3. $\int \sin x dx = -\cos x + c$ $\int \cos x dx = \sin x + c$	8. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$
4. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + c$	9. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$
5. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int (1 + \cot^2 x) dx = -\cot x + c$	

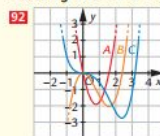
94 - 102

RIFLETTI SULLA TEORIA

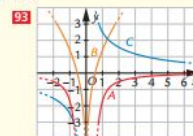
UNITÀ A8 | Gli integrali definiti e indefiniti

Interpretare i grafici delle funzioni integrali e derivate

La figura seguente mostra i grafici di una funzione f , di una sua primitiva F e della sua derivata f' . Associa a ciascun grafico la funzione corretta, giustificando la risposta.



A: f'
B: f
C: F



A: f'
B: F
C: f

Calcolare integrali immediati

Calcola i seguenti integrali indefiniti.

94 **ESERCIZIO SVOLTO** a. $\int x^4 dx$ b. $\int \frac{1}{x^2} dx$ c. $\int \sqrt{x} dx$

SOLUZIONE
Utilizziamo la formula (2).

a. $\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + c = \frac{x^5}{5} + c$

b. $\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c = -\frac{1}{x} + c$

c. $\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + c$

95 $\int \pi dx$ $[\pi x + c]$ 96 $\int x\sqrt{x} dx$ $[\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \sqrt{x} + c]$ 97 $\int \frac{1}{x^2+3} dx$ $[\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x}{\sqrt{3}} + c]$

ATTIVITÀ CON GEOGEBRA

Traccia con GeoGebra il grafico della funzione $f(x) = 2x^2$.
a. Utilizza il comando **Integrale(<Funzione>)**, per la funzione f . Ottieni la funzione $g(x)$. Che cosa rappresenta?
b. Inserisci uno slider k , variabile da -10 a $+10$ e la funzione $h(x) = g(x) + k$. Fai variare il valore dello slider. Che cosa osservi? [a. $g(x) = \frac{2}{3} x^3$ è una particolare primitiva di f ; b. Tutte le funzioni $h(x)$ sono primitive di f e differiscono per una costante]

Risolvere problemi con primitive e integrali indefiniti

99 **ESERCIZIO SVOLTO** Tra le primitive della funzione $f(x) = \sqrt{x}\sqrt{x}$ in $]0; +\infty[$ individua quella il cui grafico passa per il punto $P(0; 2)$.

SOLUZIONE

La famiglia di tutte le primitive della funzione data è l'integrale indefinito:

$$\int \sqrt{x}\sqrt{x} dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + c = \frac{4}{7} x^{\frac{7}{2}} \sqrt{x} + c, \text{ con } c \in \mathbb{R}.$$

Imponendo la condizione $F(0) = 2$, otteniamo $c = 2$ e conseguentemente la funzione cercata è $y = \frac{4}{7} x^{\frac{7}{2}} \sqrt{x} + 2$.

100 Tra le primitive della funzione $f(x) = \sin x$ individua quella il cui grafico passa per il punto $P(\frac{\pi}{2}; -1)$.
[$y = -\cos x - 1$]

Interpretare i simboli dell'integrale

101 Nella **Tab. 1** degli integrali indefiniti immediati, compare l'integrale $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$. Dimostra che $y = \ln|x|$ è proprio una primitiva di $y = \frac{1}{x}$ su ogni intervallo che non contiene l'origine. Spiega il significato dell'uguaglianza $\int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln x$ per $x > 0$.

102 Confronta il significato dei seguenti simboli e mettili in relazione.

a. $\int 3 dx$ $[\Phi(t) + c = 3t + c]$ b. $\int_0^x 3 dt$ $[\Phi(x) - \Phi(0) = 3x]$ c. $\int_0^2 3 dx$ $[\Phi(2) - \Phi(0) = 6]$

ESERCIZI PAG. 327 307





Scopri il nuovo modo di apprendere... DE AFLIX!

Secondaria di II grado

Italiano grammatica

Italiano antologia

Italiano letteratura

Latino grammatica

Latino letteratura

Matematica

Fisica

Inglese grammatica

Inglese letteratura

Francese grammatica

Spagnolo grammatica

- Numeri (2)
- Geometria analitica (7)
- Goniometria e trigonometria (3)
- Analisi (4)
- Algebra (6)
- Statistica e probabilità (2)
- Esponenziali e logaritmi (2)

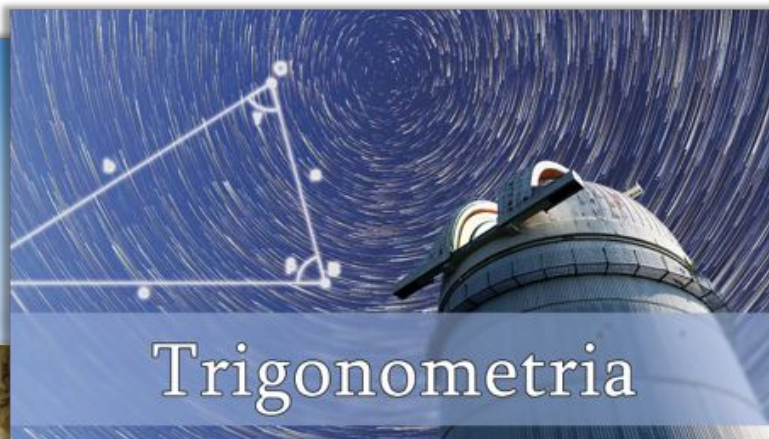
<https://deascuola.it/deaflix/>





La nuova risorsa: DEAFLIX

26 playlist per trattare gli argomenti fondamentali della matematica della Scuola Secondaria di Secondo Grado.



Matematica allo specchio

[Scheda del libro](#)

[Videopresentazione](#)

Per maggiori informazioni
contatta il tuo responsabile
di zona, [clicca qui](#)



Grazie

