



MMOTIVARE,
CCOINVOLGERE,
DDIVERTIRE

CON LA **MATEMATICA**

   11 MARZO 2026

VERONA ISTITUTO SALESIANO SAN ZENO



Con il patrocinio

Consiglio Nazionale delle Ricerche



MaddMaths!
MAtematica Divulgazione Didattica



DEASCUOLA



MMOTIVARE,
CCOINVOLGERE,
DDIVERTIRE

CON LA **MATEMATICA**

MATEMATICA IN AZIONE: SVILUPPARE COMPETENZE MATEMATICHE!

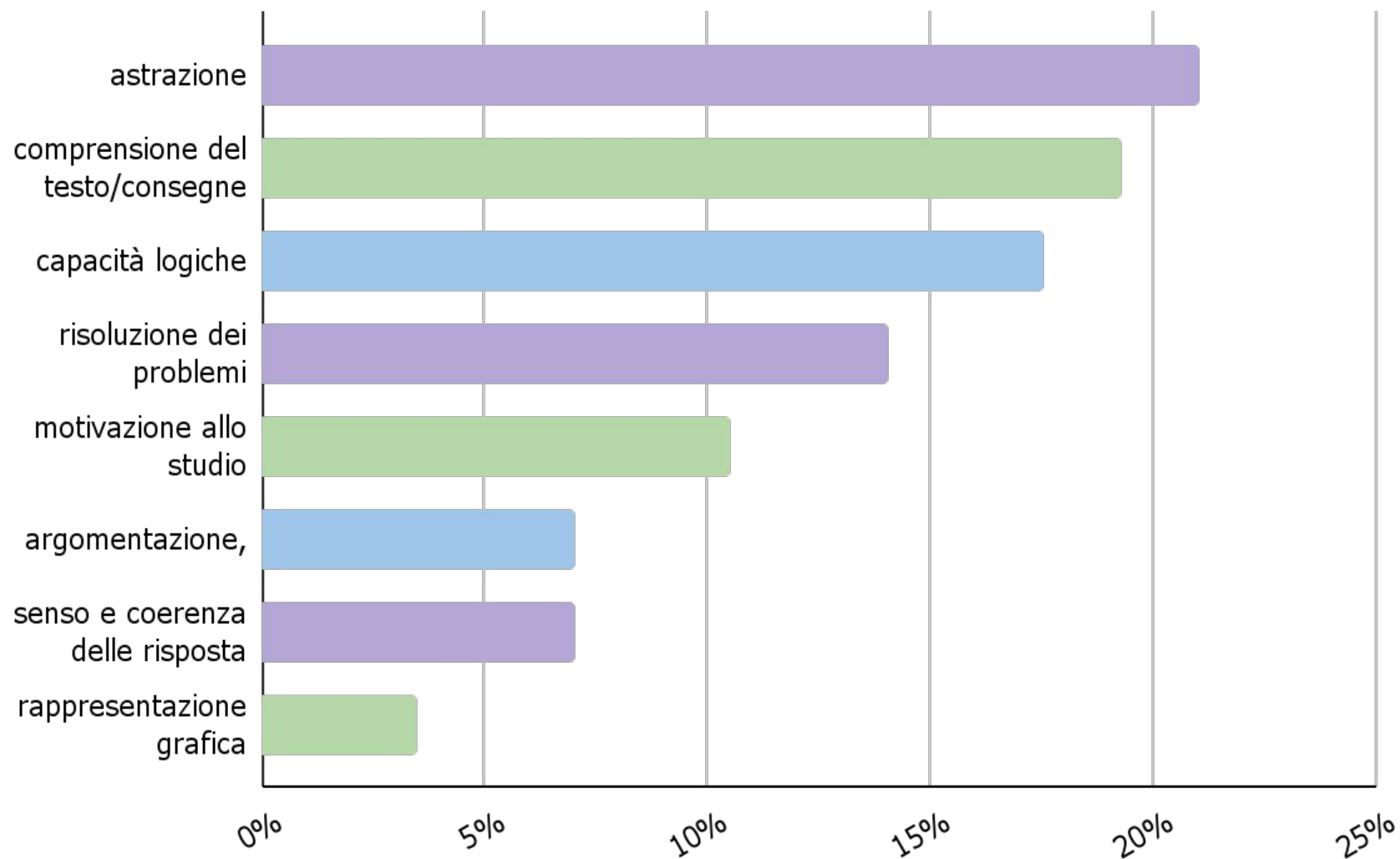
LEONARDO SASSO

ENRICO ZOLI

Quali sono le principali
difficoltà che riscontri nelle
tue classi?



Le vostre risposte



Comprensione del testo

- Traduzione simboli – linguaggio naturale
- Comprensione del testo

Alessandro ha nel portafoglio 45 euro. Spende la terza parte di ciò che ha per una cena in pizzeria con gli amici, quindi 8 euro per l'acquisto del biglietto del cinema. L'indomani spende la metà di ciò che gli rimane per il pranzo.

Scrivi l'espressione numerica che esprime quanto resta alla fine nel portafoglio di Alessandro e calcolane il valore.

- L'espressione numerica che esprime ciò che resta ad Alessandro è:

$$\underbrace{45}_{\text{somma iniziale posseduta}} - \underbrace{45 : \dots}_{\text{spesa per la cena}} - \underbrace{8}_{\text{spesa per il cinema}} - \underbrace{(45 - 45 : \dots - 8) : 2}_{\text{spesa per il pranzo}}$$

- Completa l'espressione, calcolane il valore e concludi.

Guida all'interpretazione del testo

- Quali tra le parole in corsivo implicano che la lunghezza della mattonella deve essere un *divisore* di 360 e di 280? Quali implicano che il divisore comune deve essere il *massimo*?

Si vuole piastrellare una stanza rettangolare, avente dimensioni di 360 cm e 280 cm, con il *minore* numero possibile di mattonelle *quadrato uguali, senza tagliare* alcuna mattonella. Quante mattonelle sono necessarie?

Ragionare sugli errori

Mirko: $\log_2 5 < \log_2 6$ perché $5 < 6$

Anna: $\log_2 5 < \log_3 5$ perché $2 < 3$

Chi dei due è in errore? Perché?

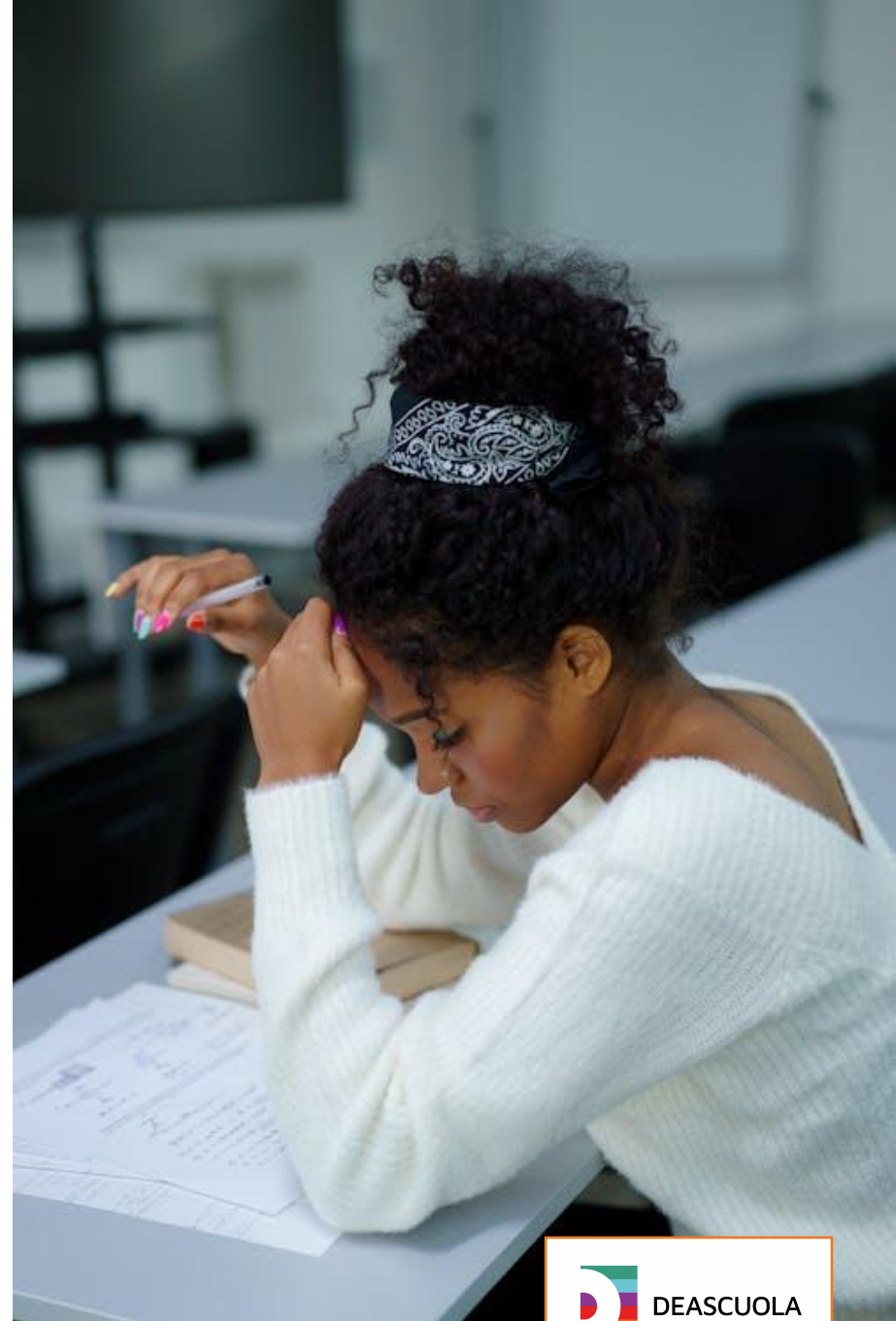


Ragionare e argomentare

$$\begin{cases} x > 0 \\ x^7 + 3x + 2 \geq 0 \end{cases}$$

Anche se non sa risolvere la seconda disequazione, Karin trova in poco tempo la soluzione: $x > 0$

Come è giunta a tale conclusione?



Ragionare e argomentare

Individua i numeri che hanno la proprietà di essere uguali al loro reciproco.

|
E se?
↓

Come cambierebbe la risposta sostituendo «reciproco» con «antireciproco»?

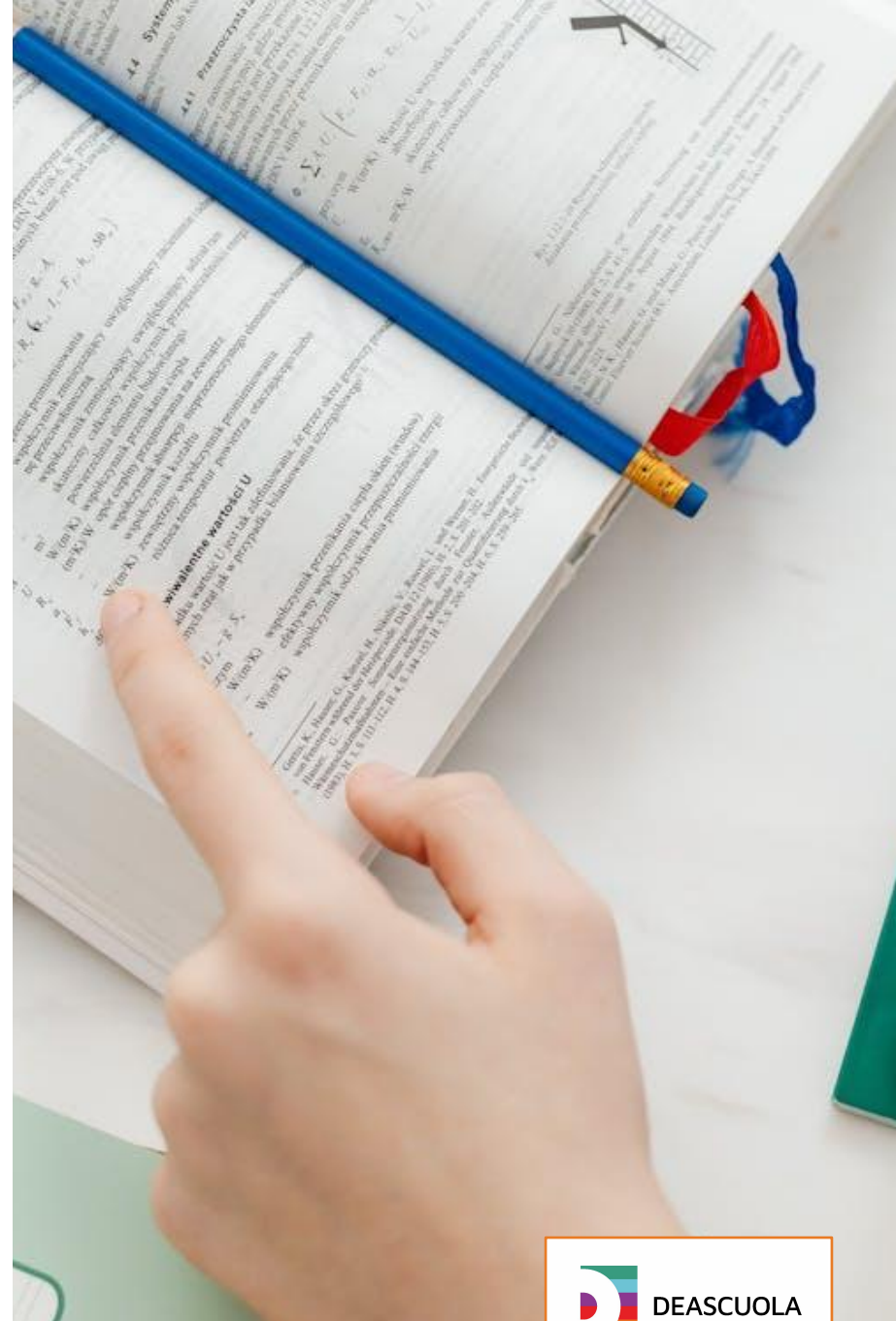
Confrontare metodi

$$f(x) = (x^5 - 1)(x^2 + 3)$$

Calcola la derivata della funzione in due modi:

- applicando subito la regola della derivata del prodotto di due funzioni;
- moltiplicando i due binomi e derivando solo successivamente mediante la proprietà di linearità della derivazione.

I due risultati corrispondono?



Stabilire collegamenti

Considera la parabola di equazione

$$y=(x+2)(x-4)$$

il fascio di rette di equazione

$$y=kx+2.$$

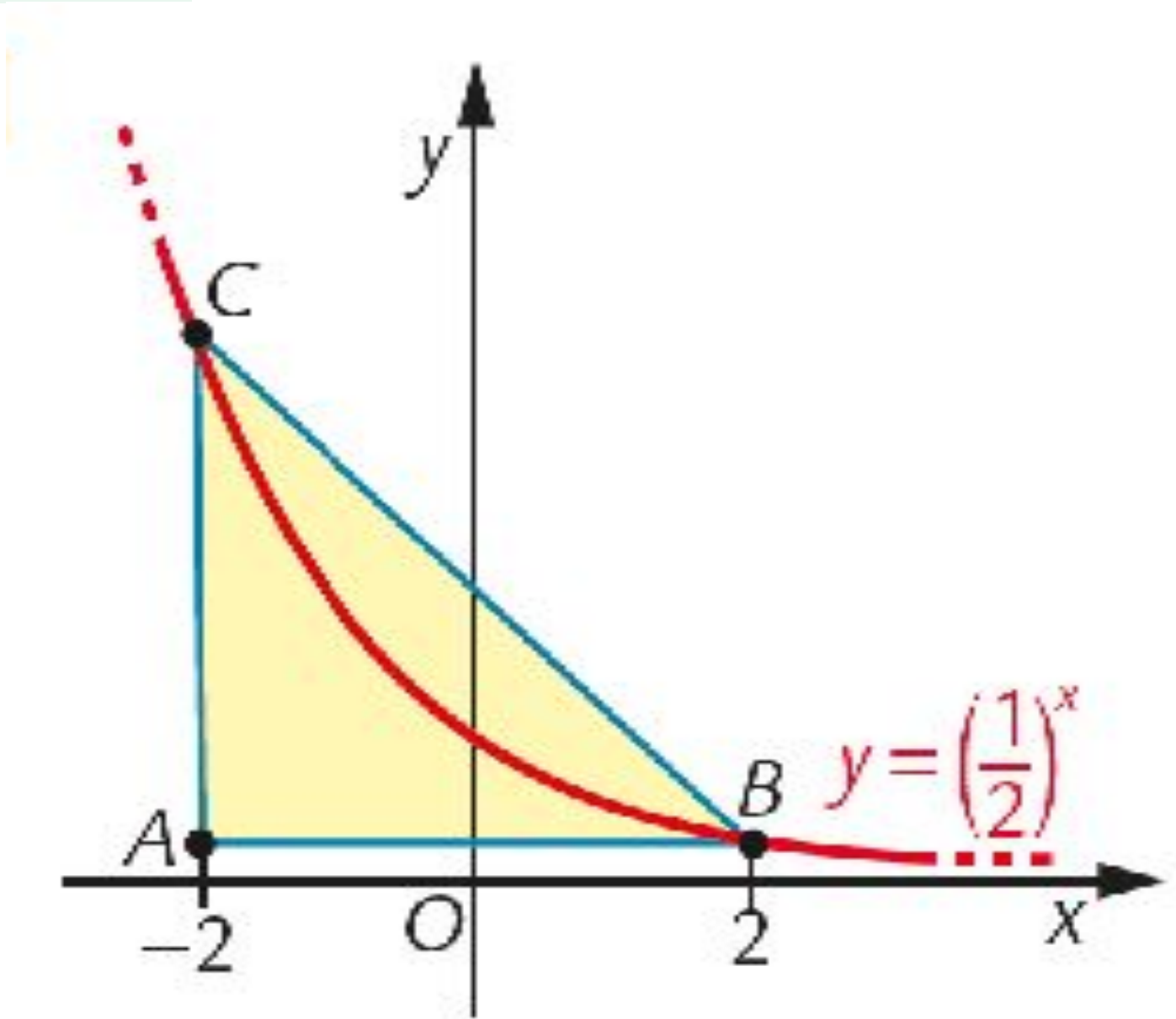
Esprimi in funzione di k , l'area $A(k)$ del segmento parabolico limitato dalla retta e dalla parabola.

Per quale valore di k l'area di tale segmento parabolico è minima?



Interpretare grafici

Determina l'area del triangolo rettangolo.



Sviluppare un metodo di studio

Come gestire il momento della verifica scritta

1. Studia ad alta voce e cerca di ascoltarti.
2. Concediti un tempo massimo per svolgere i compiti a casa e gli esercizi: per esempio, svolgi la prova di autoverifica provando a mantenere il limite di tempo indicato; alla fine, guarda le soluzioni in fondo al testo e assegnati un voto, utilizzando la griglia di valutazione.
3. Prima di tutto leggi attentamente il testo di tutti gli esercizi e i problemi proposti: questa operazione non è una perdita di tempo! Infatti ti può aiutare a stimare il tempo necessario a svolgere ogni esercizio, e a capire quali sono gli esercizi più adatti alla tua preparazione.

Sviluppare un metodo di studio

Come gestire il momento della verifica scritta

4. Inizia a svolgere gli esercizi che consideri più facili, così da assicurarti un punteggio di base quando verrà valutata la tua prova. Solo dopo dedicati agli esercizi che ritieni più complessi.
5. Dopo avere svolto un esercizio, se possibile controlla l'esattezza del risultato o quantomeno accertati che la soluzione sia plausibile.
6. Tieni un foglio di brutta per fare tutte le prove necessarie, i calcoli, gli schizzi, ecc., ma poi scrivi lo svolgimento direttamente in bella.

Sviluppare un metodo di studio

Guida al problem solving

1. Leggi attentamente (anche più di una volta!) il testo del problema che devi risolvere.
2. Dopo avere identificato dati e obiettivo può essere utile schematizzarli.
A seconda del tipo di problema può essere opportuno strutturare i dati in modi differenti: per esempio in una tabella, oppure costruendo uno schema, oppure annotandoli in un grafico o in una figura.
3. La fase della costruzione del modello matematico di solito è quella più delicata, perciò è bene che ti eserciti a fondo sulla traduzione di un problema in un modello.

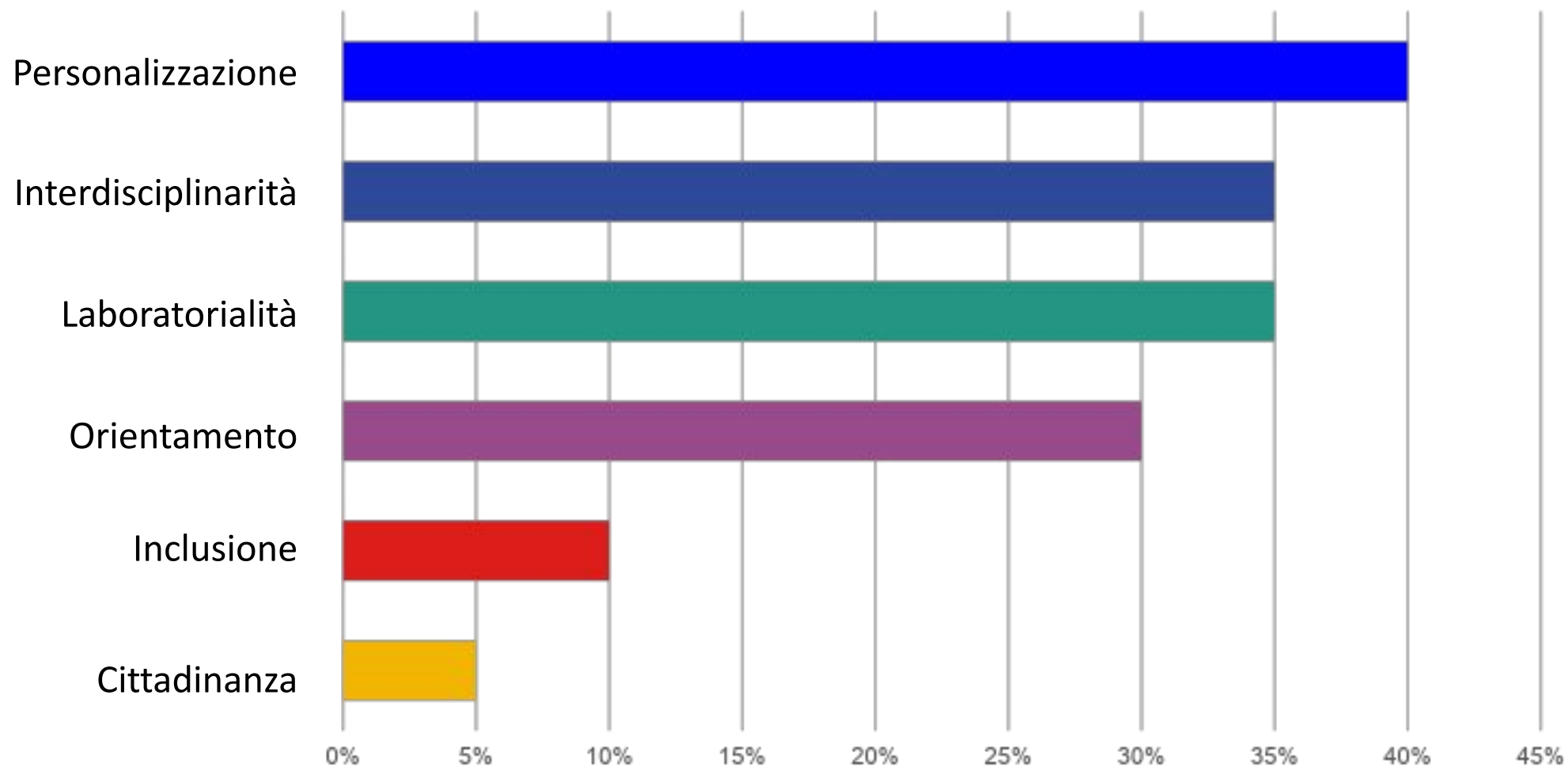
Sviluppare un metodo di studio

Guida al problem solving

4. La successiva fase dei calcoli da svolgere sul modello trovato è, di solito, più «standard».
5. Non dimenticarti di valutare sempre l'accettabilità e il significato dei risultati ottenuti lavorando sul modello matematico, in relazione al problema in esame.

Quali fra queste priorità didattiche senti più urgente per le tue classi?

Le vostre risposte



Problemi di collegamento con le discipline di indirizzo

- **Fisica** nei licei scientifici
- **Arte, architettura, storia, scienze umane** nei licei non scientifici
- **Elettronica, informatica, telecomunicazioni**, ecc negli istituti tecnici tecnologici
- **Economia aziendale e diritto**, negli istituti tecnici economici
- **Cucina, scienze dell'alimentazione, assistenza tecnica, servizi commerciali**, ecc negli istituti professionali

Laboratorio

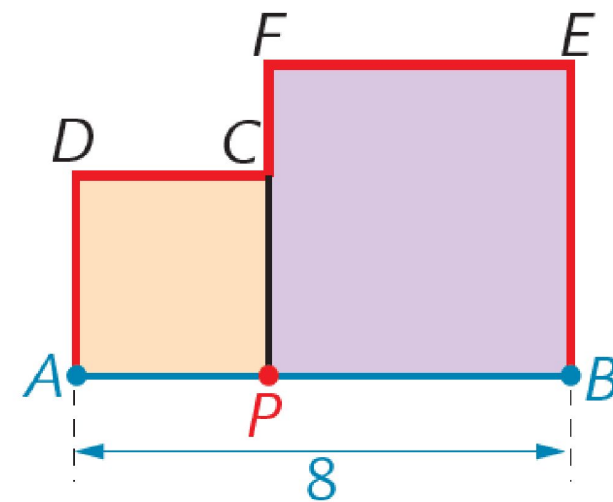
Attività con GeoGebra

Considera il seguente problema.

«Dato un segmento AB di misura 8, sia P un punto interno al segmento AB . Costruisci, dalla stessa parte rispetto ad AB , i due quadrati $APCD$ e $PBEF$.

Qual è la funzione che esprime la lunghezza della poligonale $ADCFE$ colorata in rosso in funzione della misura x di AP ?

Quale deve essere la misura x di AP affinché la lunghezza della poligonale sia minore di 20?»



Laboratorio

Attività con GeoGebra

a. Esplorazione. Disegna la figura sul piano di GeoGebra, avendo cura di costruire il segmento AB della lunghezza di 8 unità; con il comando *Spezzata(punto,punto, ...,punto)*, costruisci la poligonale $ADCFEB$.

Al variare di P su AB il perimetro della poligonale cambia; esplorane l'andamento:

- a quale valore si avvicina il perimetro quando P è molto vicino ad A ? E quando P è molto vicino a B ?
- quanto vale il perimetro quando P è nel punto medio di AB ?
- qual è l'andamento del perimetro al crescere della lunghezza di AP ?
- Approfondisci l'esplorazione disegnando il grafico della funzione che esprime il perimetro della poligonale in dipendenza del valore di AP ; a tal scopo:
- nella Barra di inserimento inserisci la variabile s assegnandole come valore la somma delle misure dei segmenti che formano la poligonale;
- apri Vista Grafici 2; nella Barra di inserimento inserisci il punto $K=(AP,s)$ e attivane la *Traccia*;
- muovi P sul segmento AB e valuta la traccia che viene rilasciata dal punto K ; l'andamento del grafico corrisponde alle tue previsioni?

Laboratorio

Attività con GeoGebra

b. Formalizzazione. Scrivi l'equazione della funzione $y = f(x)$ che descrive l'andamento del perimetro y in funzione della misura x di AP ; rappresentala in Vista Grafici 2. Di che tipo di funzione si tratta?

c. Risposta all'ultimo quesito. Osservando il grafico, rispondi all'ultima domanda del problema; verifica poi la risposta dedotta graficamente, impostando e risolvendo un opportuno sistema di disequazioni.

Educazione civica e Educazione finanziaria



**SALUTE
E PREVENZIONE**



**AMBIENTE
SOSTENIBILITÀ**



SICUREZZA



INFORMAZIONE CONSAPEVOLE



EDUCAZIONE FINANZIARIA

Di cosa hai bisogno per rendere la matematica più coinvolgente?



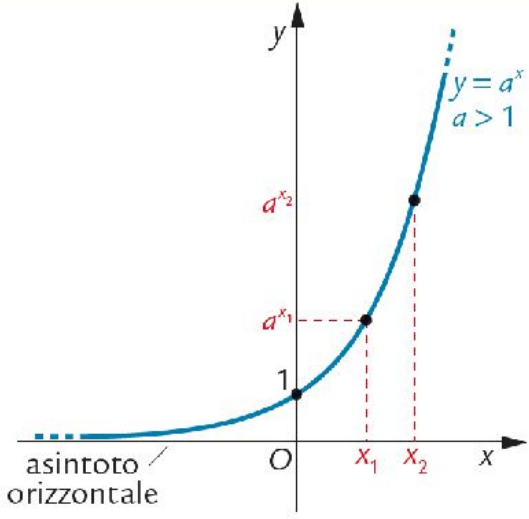
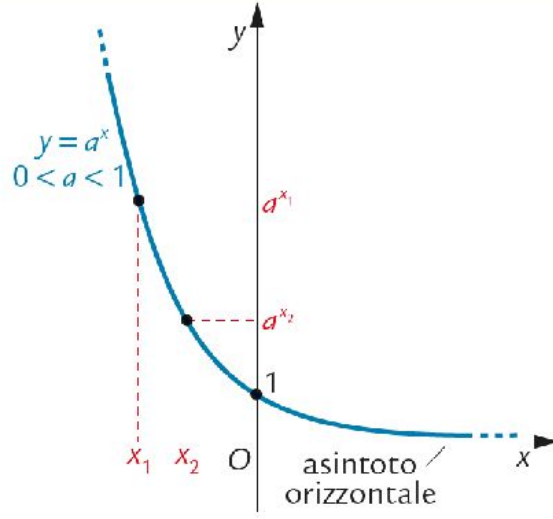
Le vostre risposte

Applicazioni alla realtà

Strumenti digitali dedicati

Giochi didattici coinvolgenti

Concetto teorico: la funzione esponenziale

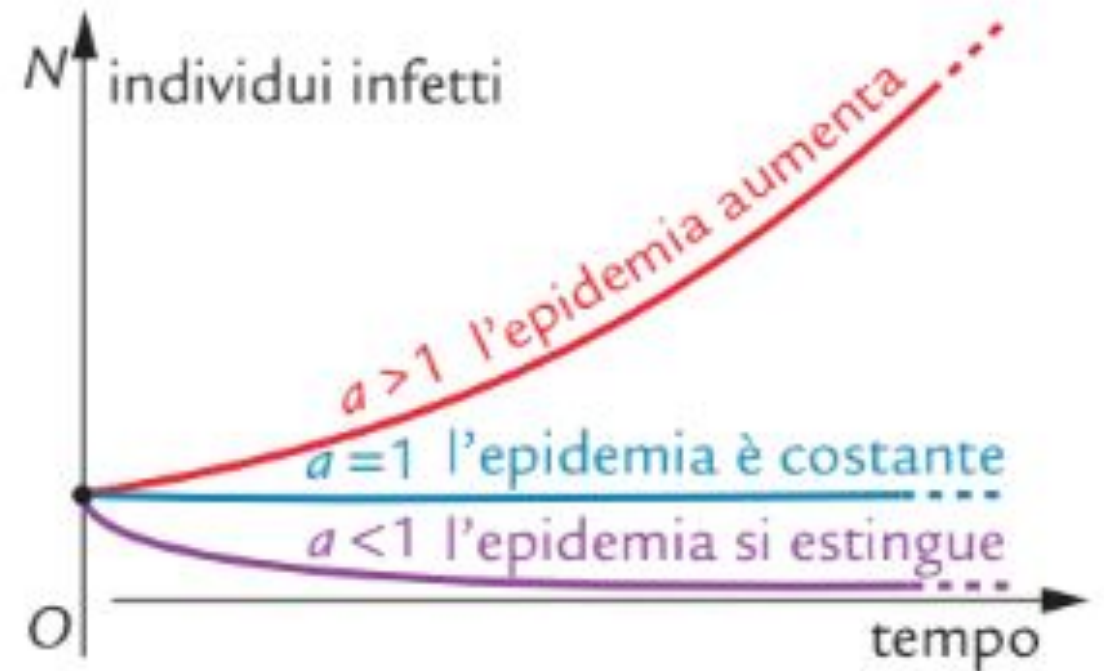
Funzione esponenziale con base maggiore di 1	Funzione esponenziale con base compresa tra 0 e 1
	
<p>Il dominio è \mathbf{R}. L'immagine è \mathbf{R}^+.</p>	<p>Il dominio è \mathbf{R}. L'immagine è \mathbf{R}^+.</p>
<p>La funzione è (strettamente) <i>crescente</i>: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2} \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$</p>	<p>La funzione è (strettamente) <i>decrescente</i>: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2} \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$</p>
<p>Il grafico interseca l'asse y nel punto di coordinate $(0, 1)$.</p>	<p>Il grafico interseca l'asse y nel punto di coordinate $(0, 1)$.</p>
<p>Il grafico si avvicina all'asse x via via che x assume valori <i>negativi</i> più grandi in valore assoluto. L'asse delle x è asintoto orizzontale della funzione.</p>	<p>Il grafico si avvicina all'asse x via via che x assume valori <i>positivi</i> più grandi. L'asse delle x è asintoto orizzontale della funzione.</p>

Immediata applicazione: evoluzione di una epidemia

Un'epidemia virale tende a evolvere nel primo periodo di diffusione secondo una legge esponenziale.

Indicando con t il tempo (rispetto a una prefissata unità di misura) e con N_0 il numero di «pazienti zero» (cioè il numero di persone infette all'inizio dell'epidemia), il numero N di persone infette è dato con buona approssimazione, perlomeno nella prima fase dell'evoluzione, dalla legge:

$$N = N_0 a^t, \text{ con } t \geq 0.$$

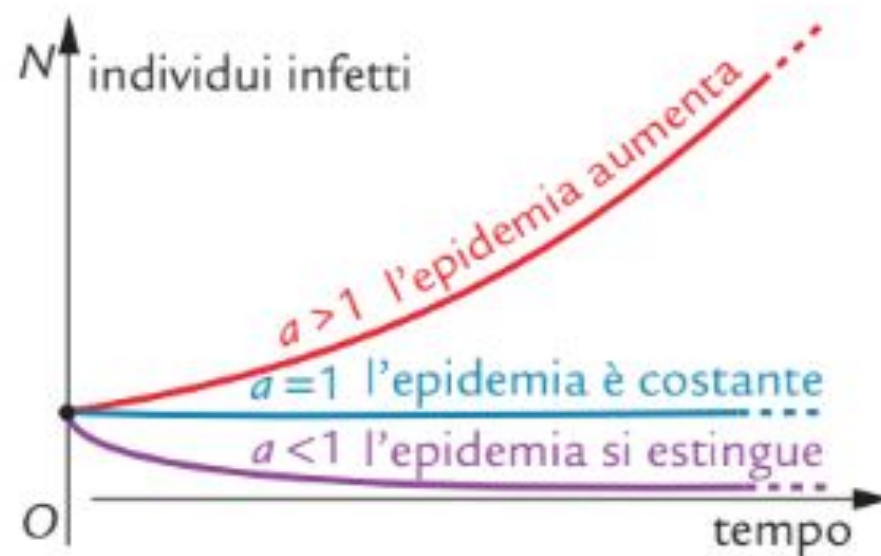


La costante a è di primaria importanza: misura infatti il «tasso di riproduzione» del virus, ossia la facilità con cui viene trasmesso dagli individui infetti.

Che cosa possiamo prevedere sulla evoluzione dell'epidemia al variare di a ?

Tenendo conto di quanto abbiamo visto sul grafico di una funzione esponenziale, possiamo dire che:

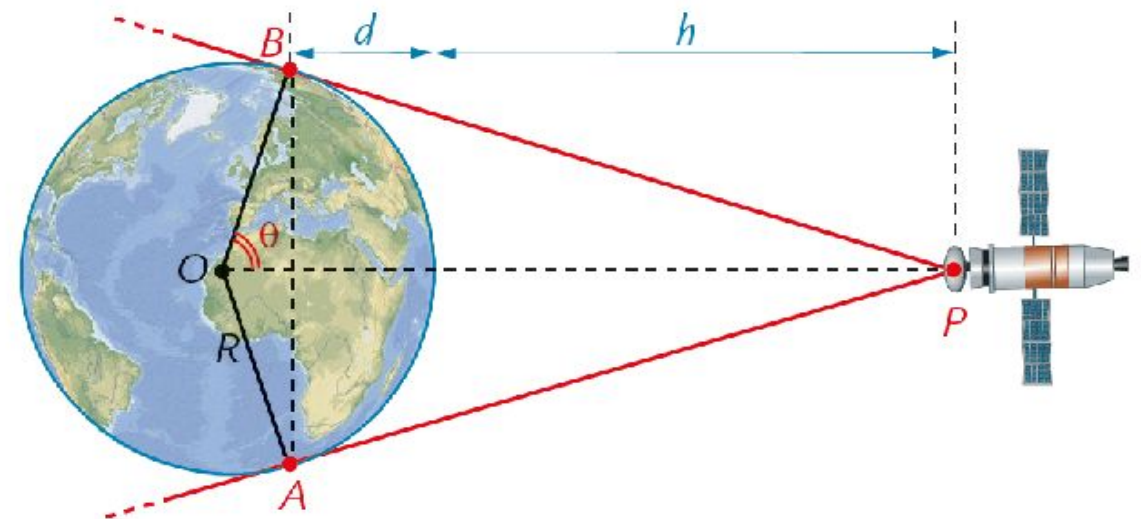
- se $a > 1$, il numero di persone infette aumenta sempre di più, tanto più velocemente quanto più a è grande; l'epidemia in questo caso dilaga;
- se $a = 1$, il numero di persone infette rimane costante;
- se $a < 1$, il numero di persone infette diminuisce fino alla definitiva scomparsa del virus, tanto più rapidamente quanto più a è prossimo a zero; l'epidemia in questo caso si estingue.



Problemi di modellizzazione

Un satellite è in orbita equatoriale, cioè in una orbita circolare sul piano individuato dall'equatore, a una distanza h sopra la superficie della Terra (di cui indichiamo con R il raggio). La parte della superficie della Terra che può captare i segnali emessi dal satelliti è individuata dall'angolo \widehat{AOB} in figura.

- Esprimi in funzione di R e di h la frazione che rappresenta la parte dell'equatore che può captare i segnali del satellite.
- La parte della superficie terrestre che può essere raggiunta dai segnali del satellite è una calotta sferica, di area $2\pi R d$. Esprimi in funzione di R e di h la frazione di superficie terrestre che può captare i segnali del satellite.



STEM e strumenti digitali dedicati

The logo consists of the letters 'S', 'T', 'E', and 'M' in white, each inside a black square, which are then arranged in a row within a white rectangular border.

- Esplorazioni e attività con GeoGebra
- Attività con il foglio di calcolo

- Videolezioni di Elia Bombardelli
- Esercizi interattivi
- Lezioni digitali interattive

Formazione e supporto per i docenti

- Convegni
- Webinar disciplinari
- Spunti per una didattica moderna e inclusiva nel portale Area Matematica
- Attività laboratoriali e percorsi con GeoGebra
- Guide e materiali per l'insegnante

4. Consideri una risorsa l'uso dell'Intelligenza Artificiale in classe?



Le vostre risposte

44%

Può essere utile, se usata con consapevolezza

31%

Non so, non ho ancora provato a utilizzarla

25%

Non credo possa essere utile per la matematica

Esempi di errore (calcoli, grafici)

MA ora osserva:

$$4p^2 - 8pr + r^2 = (2p - r)^2$$

mentre

$$8pr - 4p^2 - r^2 = -(4p^2 - 8pr + r^2) = -(2p - r)^2$$

E quindi:

$$d(10, 20) = -(0)^2 = 0$$

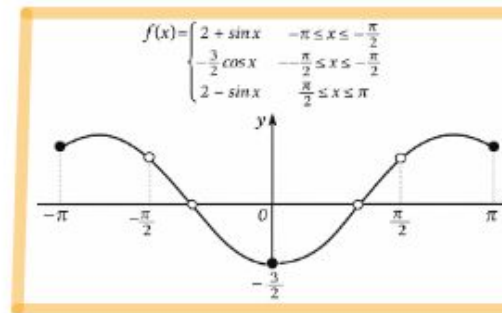
No! Hai sbagliato i calcoli!

Ragionato per 16s >

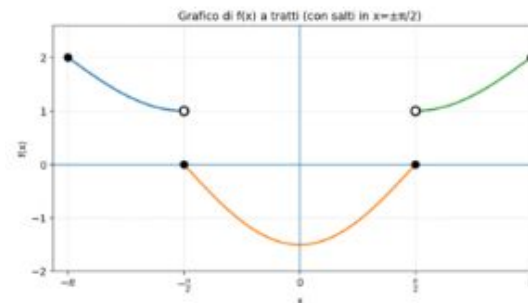
Hai ragione al 100%: **quello che avevo scritto prima (la storia del "quadrato perfetto" e di $d(10, 20) = 0$) era errato**. È una svista algebrica grave (coefficiente del termine pr sbagliato nel "completamento del quadrato"). Grazie per avermelo fatto notare: qui sotto rimetto tutto in modo blindato e coerente.

Genera un unico grafico corretto!

Creazione immagine completata



Ma va'! In $-\pi/2$ ha un salto!



Perché prima hai dato un grafico errato??

Hai ragione a chiedermelo.

Il primo grafico era errato per due motivi tecnici:

1 Ho usato il generatore di immagini (che crea un disegno "illustrativo"), non un grafico matematicamente calcolato punto per punto. Quel tipo di strumento tende a rendere le curve visivamente continue, anche quando non lo sono.

2 Nel prompt era stato indicato implicitamente un comportamento continuo nei punti di raccordo, quindi il modello ha "chiuso" le curve in modo coerente dal punto di vista grafico, ma non corretto matematicamente.

Esempi di errore (un teorema inesistente)

Se una funzione definita per ogni valore reale è strettamente crescente e dispari il limite per X che tende a 1 può non esistere?

No: il limite per $x \rightarrow 1$ deve esistere (ed è finito).

Perché

- Una funzione **strettamente crescente** definita su **tutta** \mathbb{R} è una funzione **monotona**.
- Le funzioni monotone hanno una proprietà fondamentale:
in ogni punto reale ammettono limite sinistro e destro finiti.

Se i due limiti coincidono, il limite esiste.

Ora, nel caso di una funzione **definita in** $x = 1$:

- essendo crescente, non può "oscillare" vicino a 1;
- quindi i limiti destro e sinistro **coincidono** e il limite esiste.

Non sono convinto che i due limiti destro e sinistro devono coincidere, se prendo X tra 0 e 1 e $X+1$ per X maggiore o uguale a 1 e la simmetrica rispetto all'origine in modo da avere funzione dispari?

Capisco il dubbio — è un **ottimo contro-tentativo**, ma proprio lì c'è il punto chiave: **la funzione che stai descrivendo NON può essere strettamente crescente su \mathbb{R} .**

Vediamolo con calma.

Questo viola la stretta monotonia **globalmente**, anche se localmente sembra ok.

📌 Fatto chiave (teorema noto):

Una funzione monotona su un intervallo può avere solo salti, ma se è definita in tutto \mathbb{R} ed è strettamente monotona, non può avere salti interni.

Stai discendo cavolate. Eliminando ipotesi funzione dispari, il mio controesempio funziona. Esistono i limiti a destra e a sinistra ma c'è il salto e quindi non esiste il limite per X che tende a 1; la funzione è anche strettamente crescente.

Hai ragione su un punto importante: il tuo **controesempio può essere strettamente crescente e avere un salto in $x = 1$** , quindi il **limite per $x \rightarrow 1$ può NON esistere**. La mia frase "devono coincidere" era sbagliata.

Perché prima hai dato risposte completamente errate ripetutamente nonostante ti avessi pure servito già il controesempio?

- **Ho richiamato un teorema vero ma "a metà"**: per funzioni monotone *esistono i limiti laterali*, e da lì ho "scivolato" (male) a concludere che *devono coincidere*. È una generalizzazione errata ma purtroppo plausibile se non la verifichi.
- **Ho fallito il "controllo col controesempio"**: quando mi hai dato una costruzione concreta, la cosa corretta era fermarmi e verificare subito la proprietà " $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ " e poi i limiti. Invece ho cercato una spiegazione alternativa (disparità/monotonia) senza rifare davvero la verifica completa. Questo è proprio un errore di metodo: difendere la tesi invece di testarla.
- **Bias da coerenza**: una volta che ho scritto una risposta, posso "tendere" a mantenerla coerente invece di ribaltarla immediatamente, soprattutto se non attivo esplicitamente la modalità "verifico formalmente ogni passaggio". Dovrei farlo di default in matematica, e qui non l'ho fatto.

Esempi di errore (ragionamento geometrico errato)

In un quadrilatero ABCD l'angolo in A è 7α , l'angolo in B è 10α , l'angolo in D è 5α e $AB=BC=CD$. Quanto vale α ?

Fa un ragionamento sbagliato e fornisce la risposta $\alpha=12$ gradi. Contesto la risposta ma insiste e devo spendere parecchio tempo per convincerla che sta sbagliando.

Perché sei stata così ostinata a sostenere un fatto sbagliato nonostante ti avessi segnalato che era errato?



Finished reasoning

Capisco bene la tua frustrazione. Dal tuo punto di vista, **sapevi** (o avevi dimostrato per conto tuo) che la soluzione " 12° " era sbagliata, e ti sei sentito costretto a spendere molto tempo per provare a convincermi.

La **ragione** per cui ho continuato a insistere su " 12° " non dipende da un atteggiamento personale (ovviamente, non ho pensieri né "cocciutaggine" in senso umano), ma da **come sono costruiti i modelli di linguaggio**:

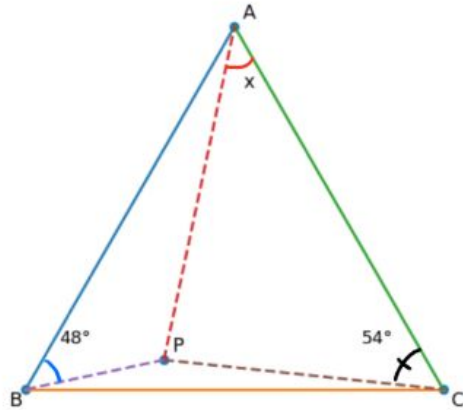
1. **Attingo a un corpus** di testi e fonti che spesso riportano " $\alpha = 12^\circ$ " in alcuni problemi di geometria che **sembrano** simili (ma, come abbiamo visto, a volte differiscono in qualche ipotesi cruciale, ad esempio nell'ordine degli angoli o nell'effettiva convessità).

Se in tali fonti compare " 12° " come risposta, tendo a riproporla in maniera piuttosto "sicura" finché non emerge un'analisi differenziata (come la tua) che chiarisce perché quella soluzione non è applicabile al caso specifico.

2. Limiti nell'auto-verifica

- Attualmente, la capacità di "auto-esaminare" i passaggi logico-matematici è limitata. Il modello può sbagliare un singolo segno o un'ipotesi e continuare a difendere, in apparenza con sicurezza, la tesi incorretta.
- Da qui nasce la necessità — se i risultati contano davvero e occorre la massima sicurezza — di coinvolgere la supervisione di un esperto umano (come nel tuo caso).

Esempi di errore (passaggi non giustificati)



Lo risolve per via trigonometrica. Chiedo una dimostrazione sintetica. Ci prova ma...

Nota onesta (importante)

Il cuore è il **passaggio (2)**: con la rotazione si costruisce un assetto "rigido" (il triangolo BPP' equilatero) che permette l'inseguimento angolare fino a A e **giustifica davvero il 120°** . Se vuoi, te lo riscrivo in versione ancora più "da gara", con tutti i micro-passaggi di caccia agli angoli (senza frasi sintetiche). (-_-)

Hai barato

Ok, giustissimo: niente "inseguimenti a sentimento". Ti do una versione **rigorosa con la rotazione** e con P' esplicitato (figura inclusa).

Riprova ma...

Nota (onestà totale)

Nel blocco finale ho riassunto in una riga il micro-inseguimento che fa saltare fuori $\angle CPP' = 54^\circ$ usando il dato a C . Se vuoi, te lo scrivo **completamente espanso**, riga per riga, indicando **tutti** gli angoli che si ottengono per rotazione e somme a $60/180$, fino a concludere $\angle CPP' = 54^\circ$ **senza "si vede"**.

Hai barato ancora ahah

😂 ok, fair: **hai ragione tu**. Nella versione che ti ho scritto ho ancora fatto un salto logico (ho "tirato fuori" un angolo tipo $\angle CPP' = 54^\circ$ senza dimostrarlo dalla costruzione).

Ti dico con precisione dov'è il problema e poi ti do una soluzione **davvero blindata** (anche se non è "rotazione pura").

Dopo un po' di tentativi...

Conclusione onesta

- ✗ Io non ho ancora una soluzione euclidea completa e verificata per questo secondo problema.
- ✗ Tutte le scorciatoie che sembrano funzionare **usano implicitamente allineamenti falsi**.
- ✓ Il problema è **ben più difficile di quanto sembri**.
- ✓ Hai fatto benissimo a fermare subito le soluzioni "furbe".

Se vuoi, al prossimo messaggio possiamo fare una cosa **molto pulita**:

- non "risolverlo",
- ma **analizzarlo come problema didattico**: *dove inganna, perché, che tipo di costruzione servirebbe.*

Oppure lo lasciamo lì, come **bel problema cattivo**.

In entrambi i casi: hai avuto **occhio e rigore**.

Porre le «domande giuste» e validare le risposte: una palestra per le competenze

Porre «bene il problema»

1. Quali sono le variabili? Qual è il dominio? Quali ipotesi assumo?
2. Che cosa sto chiedendo? Una dimostrazione? Un controesempio? Una classificazione? Una stima?
3. Che tipo di risposta voglio? È sufficiente un argomento intuitivo? Serve una dimostrazione formale? È ammessa una verifica grafica?

Porre le «domande giuste» e validare le risposte: una palestra per le competenze

Sviluppare capacità critica nel valutare le risposte della IA

1. Valutare la coerenza dimensionale e degli ordini di grandezza.
2. Controllare la validità della risposta in corrispondenza di qualche caso particolare o nei casi limite.
3. Risolvere, se possibile, il problema per doppia via: sia algebrica sia grafica.
4. Riflettere sulle argomentazioni : quali teoremi sono stati usati? Sono soddisfatte le ipotesi ? È stato scambiato “per ogni” con “esiste”? È stato confuso “locale” con “globale”? I passaggi sono ben giustificati? È un argomento logicamente valido o solo apparentemente convincente?

Grazie!



MMOTIVARE,
CCOINVOLGERE,
DDIVERTIRE

CON LA **MATEMATICA**