

L'Esame di Maturità 2026

Relatori:

Leonardo Sasso

Claudio Zanone

INSEGNARE

Matematica e Fisica

Scuola Secondaria di 2° Grado

Di che cosa parleremo

- 1 Uno sguardo alla normativa
- 2 Le prove del 2025
- 3 Le richieste più ricorrenti nelle prove dal 2023
- 4 Le nostre proposte per la prova scritta di matematica
- 5 I materiali a disposizione del docente

① Uno sguardo alla normativa

Prova d'esame – predisposizione e struttura

- La prova è predisposta dal Ministero
- La prova consiste nella risoluzione, a scelta del candidato, di **un problema** (scelto tra due) e di **quattro quesiti** (scelti tra otto)

Prova d'esame – finalità (dai quadri di riferimento)

- La prova è finalizzata ad accertare l'acquisizione dei **principali concetti e metodi della matematica di base**, anche in prospettiva storico-critica, in relazione ai contenuti previsti dalle vigenti Indicazioni Nazionali per l'intero percorso di studio del Liceo Scientifico e dettagliati nel relativo quadro di riferimento. In particolare la prova mira a rilevare la comprensione e la padronanza del **metodo dimostrativo** nei vari ambiti della matematica e la capacità di **argomentare** correttamente applicando metodi e concetti matematici, attraverso l'uso del ragionamento logico

Prova d'esame – contenuti (dai quadri di riferimento)

Nuclei tematici fondamentali

ARITMETICA E ALGEBRA

Rappresentazioni dei numeri e operazioni aritmetiche

Algebra dei polinomi

Equazioni, disequazioni e sistemi

GEOMETRIA EUCLIDEA E CARTESIANA

Triangoli, cerchi, parallelogrammi

Funzioni circolari

Sistemi di riferimento e luoghi geometrici

Figure geometriche nel piano e nello spazio

INSIEMI E FUNZIONI

Proprietà delle funzioni e delle successioni

Funzioni e successioni elementari

Calcolo differenziale

Calcolo integrale

PROBABILITÀ E STATISTICA

Probabilità di un evento

Dipendenza probabilistica

Statistica descrittiva

Prova d'esame – utilizzo della calcolatrice grafica

L'Articolo 20, comma 12, dell'O.M. 54 del 26 marzo 2026 riporta quanto segue:

Ai fini dello svolgimento della seconda prova scritta è consentito l'uso delle calcolatrici scientifiche o delle calcolatrici grafiche purché non siano dotate della capacità di elaborazione simbolica algebrica (CAS – Computer Algebra System o SAS – Symbolic Algebra System), cioè della capacità di manipolare espressioni matematiche, e non abbiano la disponibilità di connessione INTERNET, elencate in allegato alla nota del Direttore generale della D.G. per gli ordinamenti scolastici, la formazione del personale scolastico e la valutazione del sistema nazionale di istruzione n. 78833 del 16 marzo 2026. Per consentire alla commissione d'esame il controllo dei dispositivi in uso, i candidati che intendono avvalersi della calcolatrice devono consegnarla alla commissione in occasione dello svolgimento della prima prova scritta.

Prova d'esame – valutazione

Indicatore (correlato agli obiettivi della prova)	Punteggio max per ogni indicatore (totale 20)
Comprendere Analizzare la situazione problematica. Identificare i dati ed interpretarli. Effettuare gli eventuali collegamenti e adoperare i codici grafico-simbolici necessari.	5
Individuare Conoscere i concetti matematici utili alla soluzione. Analizzare possibili strategie risolutive ed individuare la strategia più adatta.	6
Sviluppare il processo risolutivo Risolvere la situazione problematica in maniera coerente, completa e corretta, applicando le regole ed eseguendo i calcoli necessari.	5
Argomentare Commentare e giustificare opportunamente la scelta della strategia risolutiva, i passaggi fondamentali del processo esecutivo e la coerenza dei risultati al contesto del problema.	4

- La prova ha un punteggio di 20 punti
- Il d.m. 769 del 2018 contiene la griglia di valutazione, i cui indicatori saranno declinati in descrittori a cura delle commissioni

Colloquio – la normativa

L'Articolo 22, comma 1, dell'O.M. 54 del 26 marzo 2026 riporta quanto segue:

Il colloquio è disciplinato dall'articolo 17, comma 9, del d.lgs. 62/2017, e ha la finalità di accertare il conseguimento del profilo educativo, culturale e professionale della studentessa o dello studente (PECUP). A tal fine la commissione d'esame tiene conto anche delle informazioni contenute nel Curriculum della studentessa e dello studente di cui all'articolo 1, comma 30, della legge 13 luglio 2015, n. 107. Il colloquio si svolge sulle quattro discipline individuate ai sensi dell'articolo 1, comma 1, lettera b), del d.m. 13/2026, al fine di verificare l'acquisizione dei contenuti e dei metodi propri di ciascuna disciplina, la capacità di utilizzare e raccordare le conoscenze acquisite e di argomentare in modo critico e personale, nonché il grado di responsabilità e maturità raggiunto. Esso concorre alla valutazione delle conoscenze, delle abilità e delle competenze del candidato, nonché del grado di maturazione personale, di autonomia e di responsabilità raggiunto al termine del percorso di studio, anche tenuto conto dell'impegno dimostrato nell'ambito scolastico e in altre attività coerenti con il percorso di studio, nonché del grado di responsabilità o dell'impegno evidenziati in azioni particolarmente meritevoli – documentate nel Curriculum della studentessa e dello studente - in una prospettiva di sviluppo integrale della persona.

Colloquio – la normativa

L'Articolo 22, comma 2, dell'O.M. 54 del 26 marzo 2026 riporta quanto segue:

Il colloquio ha inizio con una breve riflessione del candidato sul proprio percorso scolastico e personale, anche alla luce delle informazioni contenute nel Curriculum della studentessa e dello studente. Il colloquio prosegue con la proposta di domande e approfondimenti sulle quattro discipline di cui all'art. 1, co.1, lettera b), del d.m. 13/2026, al fine di evidenziare il grado di responsabilità e maturità raggiunto dal candidato in ordine all'acquisizione dei contenuti e dei metodi propri delle singole discipline e alla capacità di utilizzare e raccordare le conoscenze acquisite per argomentare in maniera critica e personale. Nel corso del colloquio il candidato analizza criticamente e correla al percorso di studi seguito e al PECUP, mediante una breve relazione o un lavoro multimediale, le esperienze svolte nell'ambito delle attività di formazione scuola-lavoro o dell'apprendistato di primo livello, con riferimento al complesso del percorso effettuato. Per i candidati esterni la relazione o il lavoro multimediale hanno ad oggetto l'attività di cui all'articolo 14, comma 3, ultimo periodo, del d.lgs 62/2017...

Colloquio – la normativa

... Inoltre, il colloquio verifica le competenze di educazione civica, di cui alla legge 20 agosto 2019, n. 92, e alle linee guida di cui al decreto ministeriale 7 settembre 2024, n. 183, come definite nel curriculum d'istituto e previste dalle attività declinate dal documento del consiglio di classe. Infine, nell'ambito del colloquio, viene effettuata la discussione degli elaborati relativi alle prove scritte. La commissione cura l'equilibrata articolazione e durata delle fasi del colloquio e il coinvolgimento delle diverse discipline, valorizzandone soprattutto i nuclei tematici fondamentali e la dimensione pluridisciplinare e interdisciplinare. Nella conduzione del colloquio, la commissione tiene conto del percorso didattico effettivamente svolto, in coerenza con il documento di ciascun consiglio di classe, al fine di considerare le metodologie adottate, i progetti e le esperienze realizzati, con riguardo anche alle iniziative di personalizzazione eventualmente intraprese nel percorso di studi, nel rispetto delle Indicazioni nazionali per i licei e delle Linee guida per gli istituti tecnici e professionali.

Colloquio – valutazione

L'Articolo 22, comma 8, dell'O.M. 54 del 26 marzo 2026 riporta quanto segue:

*La commissione/classe dispone di venti punti per la valutazione del colloquio.
La commissione/classe procede all'attribuzione del punteggio del colloquio sostenuto da ciascun candidato nello stesso giorno nel quale il colloquio viene espletato.
Il punteggio è attribuito dall'intera commissione/classe, compreso il presidente, secondo la griglia di valutazione di cui all'allegato A.*

Colloquio – valutazione

Indicatori	Livelli	Descrittori	Punti	Punteggio
Acquisizione dei contenuti e dei metodi delle quattro discipline oggetto del colloquio	I	Non ha acquisito i contenuti e i metodi delle diverse discipline, o li ha acquisiti in modo estremamente frammentario e lacunoso.	0,50 - 1	
	II	Ha acquisito i contenuti e i metodi delle diverse discipline in modo parziale e/o incompleto, e li utilizza in modo non sempre appropriato.	1,50 - 2,50	
	III	Ha acquisito i contenuti e utilizza i metodi delle diverse discipline in modo corretto e appropriato.	3 - 3,50	
	IV	Ha acquisito i contenuti delle diverse discipline in maniera completa e utilizza in modo consapevole i relativi metodi.	4 - 4,50	
	V	Ha acquisito i contenuti delle diverse discipline in maniera completa e approfondita e utilizza con piena padronanza i relativi metodi.	5	
Capacità di utilizzare e ricordare le conoscenze acquisite; padronanza lessicale e semantica, anche con riferimento al linguaggio tecnico e/o di settore (eventualmente anche in lingua straniera)	I	Non è in grado di utilizzare e ricordare le conoscenze acquisite o lo fa in modo del tutto inadeguato. Si esprime in modo scorretto e/o stentato.	0,50 - 1	
	II	È in grado di utilizzare e ricordare le conoscenze acquisite con difficoltà e solo se guidato. Si esprime in modo non sempre corretto, utilizzando un lessico, anche di settore, parzialmente adeguato.	1,50 - 2,50	
	III	È in grado di utilizzare correttamente le conoscenze acquisite, istituendo adeguati raccordi tra le discipline. Si esprime utilizzando un lessico complessivamente corretto, anche in riferimento al linguaggio tecnico e/o di settore.	3 - 3,50	
	IV	È in grado di utilizzare le conoscenze acquisite raccordandole in una trattazione pluridisciplinare articolata. Si esprime in modo preciso e accurato utilizzando un lessico, anche tecnico e settoriale, vario e preciso.	4 - 4,50	
	V	È in grado di utilizzare le conoscenze acquisite raccordandole in una trattazione pluridisciplinare ampia e approfondita. Si esprime con ricchezza e piena padronanza lessicale e semantica, anche in riferimento al linguaggio tecnico e/o di settore.	5	
Capacità di argomentare in modo critico e personale	I	Non è in grado di argomentare in maniera critica e personale, o argomenta in modo superficiale e disorganico.	0,50 - 1	
	II	È in grado di formulare argomentazioni critiche e personali solo a tratti e/o solo in relazione a specifici argomenti.	1,50 - 2,50	
	III	È in grado di formulare semplici argomentazioni critiche e personali, rielaborando correttamente i contenuti acquisiti.	3 - 3,50	
	IV	È in grado di formulare articolate argomentazioni critiche e personali, rielaborando efficacemente i contenuti acquisiti.	4 - 4,50	
	V	È in grado di formulare ampie e articolate argomentazioni critiche e personali, rielaborando con originalità i contenuti acquisiti.	5	
Grado di maturazione personale, di autonomia e di responsabilità raggiunto al termine del percorso di studio	I	Ha raggiunto un grado di maturazione molto parziale e un livello di autonomia e responsabilità incompleto.	0,50 - 1	
	II	Ha raggiunto un limitato grado di maturazione e di autonomia; necessita di guida e di supporto per gestire scelte e responsabilità.	1,50 - 2,50	
	III	Ha raggiunto un apprezzabile livello di maturazione; è in grado di assumere decisioni autonome e gestire con sicurezza scelte personali.	3 - 3,50	
	IV	Ha raggiunto un alto grado di maturazione, autonomia e responsabilità; è capace di riflettere criticamente sulle proprie scelte e sul proprio agire.	4 - 4,50	
	V	Ha raggiunto un elevato grado di autonomia e maturazione personale; sa gestire responsabilità significative in modo esemplare per gli altri.	5	
Punteggio totale della prova				

● Allegato A

② La prova del 2025

Problema con parametri

PROBLEMA 1

«La ragione non è nulla senza l'immaginazione» - Cartesio

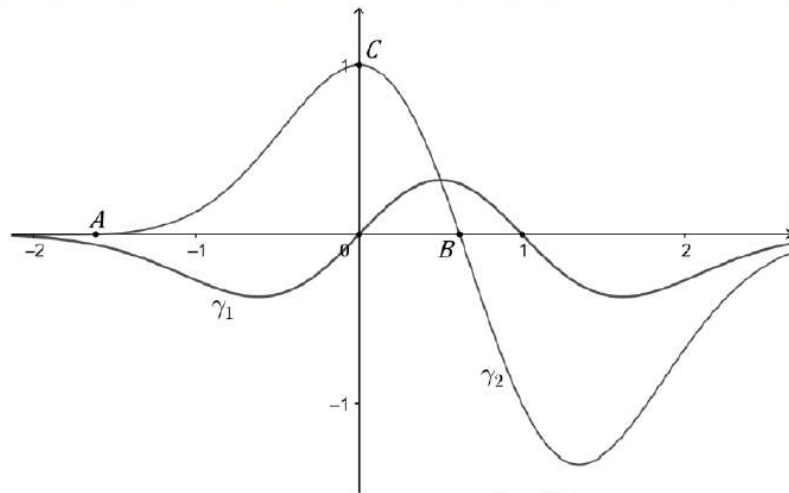
Dati $r > 0$ e $k < 0$, si considerino la circonferenza C_r , di centro l'origine e raggio r , e la funzione $f_k(x) = k|x|$.

- Verificare che f_k è continua ma non derivabile in $x = 0$ qualunque sia il valore di k . Individuare i due valori di r in corrispondenza dei quali C_r delimita con il grafico di f_k , per opportuni valori di k , un settore circolare nel semipiano $y \leq 0$ di area π e contorno di lunghezza $4 + \pi$. Stabilito che $r = 2$ è il maggiore di tali valori, in uno stesso riferimento cartesiano Oxy , tracciare la circonferenza C_2 e il grafico della funzione f_{-1} .
- Studiare la funzione $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$, specificandone dominio, simmetrie, punti di non derivabilità, intervalli di monotonia ed insieme immagine. Verificare che il grafico di g coincide con la parte di C_2 che si trova nel semipiano $y \geq 0$. Spiegare perché g non è invertibile nel suo dominio ed esplicitare l'intervallo $[a; b]$ di ampiezza massima, con $b > 0$, nel quale g ammette una funzione inversa h . Qual è l'espressione analitica di h ?
- Sia A un punto del grafico di g , situato nel I quadrante, e siano M e R le sue proiezioni ortogonali sugli assi del riferimento. Determinare le coordinate di A in modo che il quadrilatero $AMOR$ abbia area massima. Dopo aver verificato che tale quadrilatero è un quadrato, dimostrare che è anche quello di perimetro massimo.
- Si consideri la funzione $F(x) = \int_{-2}^x \sqrt{4 - t^2} dt$, con $x \in [-2; 2]$. Determinare $F(2)$ e tracciare un grafico di F , dopo averne studiato monotonia e concavità. Scrivere, inoltre, l'equazione della retta tangente al grafico di F nel suo punto di flesso.

Problema di interpretazione di grafici

PROBLEMA 2

«La bellezza è mescolare, in giuste proporzioni, il finito e l'infinito» - attribuita a Platone



I grafici γ_1 e γ_2 rappresentano, rispettivamente, le funzioni f e g , definite su $\mathbb{R}$, le cui espressioni analitiche sono

$$f(x) = p(x) \cdot e^{p(x)}, \quad g(x) = q(x) \cdot e^{p(x)}$$

con $p(x)$ e $q(x)$ polinomi di secondo grado.

Problema di interpretazione di grafici

- a) Determinare i polinomi $p(x)$ e $q(x)$ utilizzando le informazioni deducibili dai grafici in figura, considerando che $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ è ascissa di un punto stazionario di f e che $-\varphi$, ascissa del punto A , è uno zero di g .
- b) Posto che $p(x) = x - x^2$, studiare la funzione f specificando l'equazione dell'asintoto, le ascisse dei punti stazionari e di flesso. Verificare che la retta di equazione $x = \frac{1}{2}$ è asse di simmetria per γ_1 . Determinare l'insieme immagine di f e indicare, al variare del parametro reale k , il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.
- c) Stabilito altresì che $q(x) = 1 - x - x^2$, verificare che $\frac{1}{\varphi}$ è l'ulteriore zero di g e che il triangolo ABC è rettangolo. Dimostrare che γ_1 e γ_2 hanno un unico punto di intersezione, del quale si chiedono le coordinate. Considerati su γ_1 e γ_2 , rispettivamente, i punti P_1 e P_2 aventi uguale ascissa $x \geq \frac{1}{2}$, calcolare la lunghezza massima che può assumere il segmento P_1P_2 .
- d) Calcolare l'area della regione limitata R compresa tra γ_1 , γ_2 e l'asse delle ordinate. Individuare, successivamente, il valore di $t \geq \frac{1}{2}$ affinché la retta $x = t$ delimiti con i due grafici una regione R' equivalente ad R .

Quesiti

1. Dato un triangolo ABC , sia M il punto medio del lato BC e siano B' e C' due punti, rispettivamente, sul lato AB e sul lato AC , in modo tale che $AB' = \frac{1}{3}AB$ e $AC' = \frac{1}{3}AC$. Dimostrare che, se i segmenti MB' e MC' sono tra loro congruenti, allora lo sono anche i lati AB e AC .
2. Si considerino la superficie sferica di equazione $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 1$ e il piano π di equazione $x - 2y - 2z + d = 0$. Discutere, al variare del parametro reale d , se il piano π è secante, tangente o esterno alla superficie sferica. Determinare il valore del parametro d in modo che π divida la sfera in due parti uguali.

3. L'opera futurista di Boccioni "Forme uniche della continuità nello spazio" del 1913, riportata sulla moneta da 20 centesimi, descrive un uomo che avanza velocemente nello spazio. Una parte del profilo evidenziato in figura, in un opportuno sistema di riferimento, può essere approssimato dalla funzione

$$f(x) = \begin{cases} -4x^2 - 8x, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1 + \tan\left(x + \frac{3}{4}\pi\right), & 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

Tracciare il grafico di f , dopo averne analizzato la continuità e la derivabilità nell'intervallo $[-1; 2]$.



4. Assegnata una funzione g , derivabile in $\mathbb{R}$ e tale che $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$, determinare l'equazione della retta normale alla curva $y = g(x) \sin^2 x$ nel suo punto di ascissa $\frac{\pi}{4}$.

Quesiti

5. Determinare il valore del parametro reale k in modo che le due curve $y = e^x$, $y = 6 - ke^{-x}$ risultino tangenti tra loro, individuando le coordinate del punto di contatto.
6. Scrivere una funzione polinomiale f in modo tale che la retta di equazione $y = 2x + 3$ sia tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa 0 e si abbia $\int_0^3 f(x)dx = 9$.
7. *Siccome mi sembrava che per puro caso alcuni fatti fossero avvenuti così com'erano stati predetti dagli'indovini, tu hai parlato a lungo del caso, e hai detto, per esempio, che si può ottenere il "colpo di Venere" lanciando a caso quattro dadi [...].*

Cicerone, De divinatione, II, 21, 48 - traduzione e cura di S. Timpanaro, Garzanti, Milano 1999.

Testo originale - *Nam cum mihi quaedam casu viderentur sic evenire ut praedicta essent a divinantibus, dixisti multa de casu, ut Venerium iaci posse casu quattuor talis iactis [...].*

Cicerone, nel dialogo con il fratello Quinto, parla del colpo di Venere, che consiste nel lanciare 4 dadi a 4 facce ottenendo 4 risultati diversi. Supponendo che le facce di ciascun dado siano equiprobabili, determinare:

- la probabilità di ottenere il colpo di Venere nel lancio di 4 dadi;
- la probabilità di ottenere 4 numeri tutti uguali.

8. Quanti sono gli anagrammi, anche senza significato, della parola "STUDIARE"? In quanti di tali anagrammi si può leggere consecutivamente la parola "ARTE", come ad esempio in "SUARTEDI"?

Quanti sono gli anagrammi, anche senza significato, della parola "VACANZA"?

③ Le richieste più ricorrenti nelle prove dal 2023

Studio di proprietà di una funzione al variare del parametro

PROBLEMA 2

Fissato un parametro reale a , con $a \neq 0$, si consideri la funzione f_a così definita:

$$f_a(x) = \frac{x^2 - ax}{x^2 - a}$$

il cui grafico sarà indicato con Ω_a .

- a) Al variare del parametro a , determinare il dominio di f_a , studiarne le eventuali discontinuità e scrivere le equazioni di tutti i suoi asintoti.
- b) Mostrare che, per $a \neq 1$, tutti i grafici Ω_a intersecano il proprio asintoto orizzontale in uno stesso punto e condividono la stessa retta tangente nell'origine.
- c) Al variare di $a < 1$, individuare gli intervalli di monotonia della funzione f_a . Studiare la funzione $f_{-1}(x)$ e tracciarne il grafico Ω_{-1} .
- d) Determinare l'area della regione limitata compresa tra il grafico Ω_{-1} , la retta ad esso tangente nell'origine e la retta $x = \sqrt{3}$.

(Ordinaria 2023)

- 5. Determinare per quali valori del parametro reale $k > 0$ il grafico della funzione $f(x) = e^x - kx^3$ risulta volgere la concavità verso l'alto $\forall x \in \mathbb{R}$.

(Calendario australe 2025)

Determinare i valori dei parametri in base a condizioni date

PROBLEMA 1

Sia data la seguente funzione parametrica:

$$y = x^3 + ax^2 + c$$

- a) Si dimostri che per ogni valore dei parametri reali a e c ($a \neq 0$), il flesso coincide con il punto medio del segmento che ha per estremi i punti di massimo e di minimo relativi.
- b) Si determinino i valori dei parametri affinché la funzione abbia il massimo in $x = -2$ e abbia un flesso di ordinata 6.

(Straordinaria 2024)

6. Assegnata la curva $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, determinare i valori dei parametri reali in modo che passi per $A(-1, -3)$, $B(1, -1)$ e risulti tangente in $C(0, 1)$ alla retta $t: y = 2x + 1$. Determinare infine le coordinate dell'ulteriore punto Q di intersezione tra la curva e la retta t .

(Calendario Australe 2023)

3. Data la funzione $f(x) = \frac{a}{1+be^{-cx}}$ con $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$, determinare a , b , c sapendo che $f(x)$ ha come asintoto orizzontale la retta $y = 5$ e che il grafico di $f(x)$ è tangente, in $x = 0$, alla retta di equazione $y = \frac{2}{5}x + 1$.

(Calendario Australe 2023)

Individuare l'espressione analitica di una funzione a partire dal grafico

PROBLEMA 1

Il grafico in figura, rappresentativo della funzione continua $y = f(x)$, è unione dell'arco di parabola Γ_1 , dell'arco di circonferenza Γ_2 e dell'arco di iperbole Γ_3 .

- a) Scrivere un'espressione analitica della funzione f definita a tratti nell'intervallo $[-2; 2]$, utilizzando le equazioni:

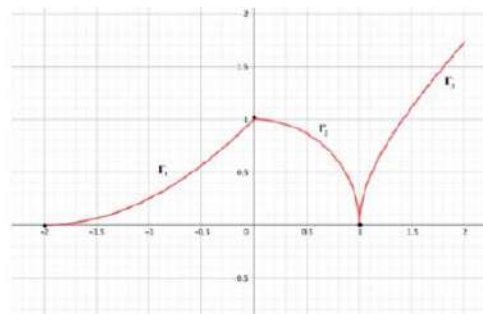
$$y = a(x+2)^2 \quad x^2 + y^2 + b = 0 \quad x^2 - y^2 + c = 0$$

e individuare i valori opportuni per i parametri reali a, b, c .

Studiare la derivabilità della funzione f e scrivere le equazioni delle eventuali rette tangenti nei punti di ascissa

$$x = -2 \quad x = 0 \quad x = 1 \quad x = 2$$

- b) A partire dal grafico della funzione f , dedurre quello della sua derivata f' e individuare gli intervalli di concavità e convessità di $F(x) = \int_{-2}^x f(t)dt$.
- c) Si consideri la funzione $y = \frac{1}{4}(x+2)^2$, definita nell'intervallo $[-2; 0]$, di cui Γ_1 è il grafico rappresentativo. Spiegare perché essa è invertibile e scrivere l'espressione analitica della sua funzione inversa h . Studiare la derivabilità di h e tracciarne il grafico.
- d) Sia S la regione limitata del secondo quadrante, compresa tra il grafico Γ_1 e gli assi cartesiani. Determinare il valore del parametro reale k affinché la retta di equazione $x = k$ divida S in due regioni equivalenti.



(Ordinaria 2023)

Studio di funzione – deduzione della funzione derivata e della funzione integrale

PROBLEMA 2

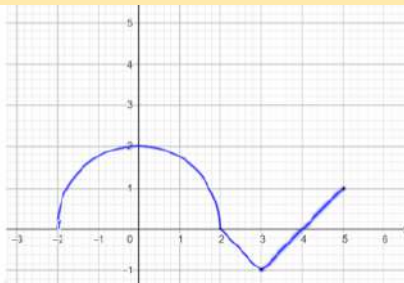
Si consideri la funzione $f(x) = e^{-x^2}$.

- a) Tracciare, nel medesimo sistema di riferimento, il grafico γ_1 della funzione $f(x)$ e il grafico γ_2 della sua funzione derivata, individuando i loro asintoti, estremi e flessi. Successivamente scrivere le coordinate del punto P in cui γ_1 e γ_2 si intersecano.
- b) La retta di equazione $x = t$, $t \in \mathbb{R}$, incontra γ_1 e γ_2 , rispettivamente, nei punti P_1 e P_2 . Determinare il valore del parametro t , in modo che la misura del segmento che unisce i due punti abbia misura massima e calcolare il valore di tale misura.
- c) Sia γ_3 il grafico rappresentativo della funzione $f''(x)$. Calcolare l'area della regione finita delimitata da γ_2 e γ_3 .

(Straordinaria 2024)

6. Si consideri la funzione $F(x) = \int_{-2}^x f(t)dt$ con $x \in [-2; 5]$, dove f è la funzione rappresentata in figura, ottenuta dall'unione di una semicirconferenza e due segmenti.

Calcolare $F(-2)$, $F(2)$, $F(3)$ e $F(5)$.



(Straordinaria 2023)

Funzione inversa

PROBLEMA 1

- b) Studiare la funzione $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$, specificandone dominio, simmetrie, punti di non derivabilità, intervalli di monotonia ed insieme immagine. Verificare che il grafico di g coincide con la parte di C_2 che si trova nel semipiano $y \geq 0$. Spiegare perché g non è invertibile nel suo dominio ed esplicitare l'intervallo $[a; b]$ di ampiezza massima, con $b > 0$, nel quale g ammette una funzione inversa h . Qual è l'espressione analitica di h ?

(Ordinaria 2025)

PROBLEMA 1

Si consideri la famiglia di funzioni $f_a(x) = (x^2 + 1)e^{ax+1}$, con a parametro reale non nullo, e si indichi con γ_a il grafico di f_a .

- a) Al variare di a , stabilire il numero degli estremi relativi e dei flessi. Determinare il valore positivo di a in modo che il grafico abbia un flesso a tangente orizzontale.
- b) Studiare la funzione f_1 e tracciare γ_1 . Spiegare perché f_1 è invertibile in $\mathbb{R}$ e indicare con g la sua funzione inversa. Specificare il dominio di g e determinare $g'(e)$.

(Suppletiva 2025)

Limiti (calcolo, esistenza, parametrici)

PROBLEMA 2

Si consideri la famiglia di funzioni $f_k(x) = kx^4 + x^3 + 2kx^2$ con $k \geq 0$.

1. Al variare del parametro k , studiare la monotonia, specificando la natura dei punti stazionari.
2. Tracciare il grafico γ_1 della funzione corrispondente al valore $k = \frac{3}{8}$ determinando, in particolare, le coordinate dei due punti di flesso F_1 e F_2 . Scrivere le equazioni delle rette t_1 e t_2 tangenti a γ_1 in F_1 e F_2 .
3. Scrivere l'equazione $y = g(x)$ della funzione simmetrica di f rispetto all'asse delle ascisse e se ne tracci il grafico rappresentativo γ_2 nel medesimo piano cartesiano in cui è tracciato γ_1 . Si indichi con R la regione delimitata da γ_1 , γ_2 e dalla retta $x = 1$ e se ne calcoli l'area.
4. Calcolare, al variare del parametro k , i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_k(x)}{\sin^k(x)} \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_k(x)}{|\sin^k(x)|}$$

(Calendario australe 2023)

7. Calcolare $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x (t^2 - 1) \cdot e^{2t} dt}{(x - 1)^2}$ (Suppletiva 2023)

8. Sia data la funzione $f(x) = ax \ln(x) + \frac{b}{x^4} + c \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Determinare i parametri a, b, c in modo che:

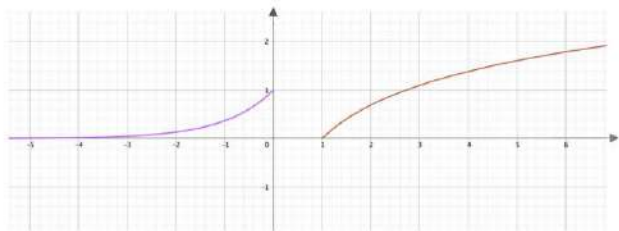
- il $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ esista ed abbia un valore finito;
- $\int_1^e f(x) dx = 1$.

(Suppletiva 2025)

Studio della continuità e della derivabilità

PROBLEMA 2

In figura, sono rappresentati i grafici della funzione esponenziale, con $x < 0$, e della funzione logaritmica, con $x > 1$, entrambe in base naturale.



a) Determinare il polinomio di terzo grado $P(x)$ in modo che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x < 0 \\ P(x) & 0 \leq x \leq 1 \\ \ln(x) & x > 1 \end{cases}$$

sia continua e derivabile in $\mathbb{R}$.

(Calendario boreale, 2024)

7. Determinare il dominio della funzione $f(x) = \frac{x|x+1|}{x^3-x}$ e stabilire la tipologia delle sue discontinuità.

(Straordinaria 2023)

5. Individuare e classificare i punti in cui la funzione $f(x) = |x-1| + \sqrt[3]{x^3+x^2}$ è continua ma non derivabile.

(Straordinaria 2024)

Numero di soluzioni di una equazione ed equazioni parametriche

PROBLEMA 1

Si consideri la famiglia di funzioni $f(x) = ax + b\sqrt{x} + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$.

- a) Determinare i valori dei parametri a, b, c in corrispondenza dei quali la funzione abbia il punto di massimo assoluto di coordinate $(4, 8)$ e uno zero in $x = 16$.

D'ora in avanti, si assuma $a = -2$, $b = 8$, $c = 0$.

- b) Studiare f e tracciare un suo grafico rappresentativo γ , dopo averne analizzato il segno, la derivabilità, la monotonia e la concavità. Verificare che la funzione non presenta asintoti. Al variare del parametro reale k , stabilire il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.

(Straordinaria 2025)

4. Dimostrare che l'equazione $x^3 + x - \cos x = 0$ ammette un'unica soluzione positiva.

(Ordinaria 2024)

8. Data la funzione $f_a(x) = x^5 - 5ax + a$, definita nell'insieme dei numeri reali, stabilire per quali valori del parametro $a > 0$ la funzione possiede tre zeri reali distinti.

(Ordinaria 2024)

Determinare una funzione polinomiale

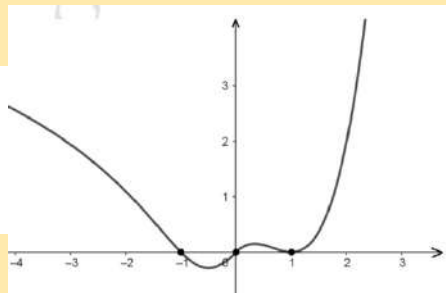
PROBLEMA 2

Il grafico y in figura rappresenta la funzione f così definita:

$$f(x) = \begin{cases} \ln(P_2(x)) & \text{se } x < 0 \\ P_3(x) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

dove $P_2(x)$ e $P_3(x)$ sono, rispettivamente, polinomi di 2° e di 3° grado.

(Suppletiva 2025)



6. Scrivere una funzione polinomiale $y = p(x)$ di terzo grado che si annulli solo per $x = 0$ e per $x = 3$, il cui grafico sia tangente all'asse x in un punto e passi per $P(1, -4)$. Determinare l'area della regione piana limitata compresa tra l'asse x ed il grafico della funzione polinomiale individuata.

(Suppletiva 2023)

5. Determinare la funzione polinomiale di quarto grado $y = p(x)$ sapendo che, in un sistema di riferimento cartesiano, il suo grafico verifica le seguenti condizioni:
- è tangente all'asse x nell'origine;
 - passa per il punto $(1, 0)$;
 - ha un punto stazionario in $(2, -2)$.

(Ordinaria 2024)

Dimostrare proprietà di simmetria

PROBLEMA 1

Sia data la seguente funzione parametrica:

$$y = x^3 + ax^2 + c$$

- a) Si dimostri che per ogni valore dei parametri reali a e c ($a \neq 0$), il flesso coincide con il punto medio del segmento che ha per estremi i punti di massimo e di minimo relativi.
- b) Si determinino i valori dei parametri affinché la funzione abbia il massimo in $x = -2$ e abbia un flesso di ordinata 6.
- c) Si disegni quindi il grafico della funzione $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4$, e si calcoli l'area della regione finita di piano compresa tra la funzione, l'asse delle ascisse, l'asse delle ordinate e la retta di equazione $x = -2$.
- d) Si dimostri infine che la funzione $f(x)$ è simmetrica rispetto al suo punto di flesso. Successivamente, si applichi alla funzione $f(x)$ la traslazione di vettore $\vec{v}(\alpha, \beta)$. Determinare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, affinché la funzione traslata risulti dispari.

(Straordinaria 2024)

8. Dimostrare che la curva di equazione $y = \frac{2x+1}{x^2+x}$ è simmetrica rispetto al suo punto di flesso.

(Straordinaria 2025)

Problemi di massimo o minimo

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione $f(x) = e^{-x^2}$.

- Tracciare, nel medesimo sistema di riferimento, il grafico γ_1 della funzione $f(x)$ e il grafico γ_2 della sua funzione derivata, individuando i loro asintoti, estremi e flessi. Successivamente scrivere le coordinate del punto P in cui γ_1 e γ_2 si intersecano.
- La retta di equazione $x = t$, $t \in \mathbb{R}$, incontra γ_1 e γ_2 , rispettivamente, nei punti P_1 e P_2 . Determinare il valore del parametro t , in modo che la misura del segmento che unisce i due punti abbia misura massima e calcolare il valore di tale misura.
- Sia γ_3 il grafico rappresentativo della funzione $f''(x)$. Calcolare l'area della regione finita delimitata da γ_2 e γ_3 .
- Posto $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$, calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{f'(x)}$ spiegando perché, in $x = 0$, le funzioni $F(x)$ ed $f'(x)$ sono infinitesime dello stesso ordine.

(Straordinaria 2024)

- Una sfera, di raggio r fissato, è inscritta nel cono S di volume minimo. Qual è la distanza del vertice del cono dalla superficie della sfera?

(Suppletiva 2023)

- Si dimostri che, fra tutti i triangoli rettangoli di perimetro assegnato p , quello isoscele ha la massima area.

(Calendario Australe 2024)

Retta tangente, curve tangenti

PROBLEMA 1

Assegnata la funzione

$$f(x) = a x \ln(x) - \frac{3}{2}x$$

- a) determinare il valore del parametro reale a in modo che f abbia un punto di minimo assoluto in $x = \sqrt{e}$. Si studi la funzione ottenuta e se ne disegni il grafico.

Si ponga, d'ora in avanti, $a = 1$.

- b) Si verifichi che esiste una sola retta tangente t alla curva di equazione $y = f(x)$, condotta dal punto $Q(0, -1)$. Determinare l'equazione di t e le coordinate del corrispondente punto di tangenza.

- c) Determinare i parametri reali h, k in modo che le curve di equazioni

$$y = f(x) \quad \text{e} \quad y = \frac{x+h}{x+k}$$

risultino tangenti nel loro punto comune di ascissa 1.

- d) Studiare la funzione

$$g(x) = \int_1^x f(t) dt$$

dopo averne scritta l'espressione analitica. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di g nel suo punto di ascissa $x = e$.

(Suppletiva 2023)

5. Determinare il valore del parametro reale k in modo che la retta di equazione cartesiana $y = x - 2$ risulti tangente alla curva $y = x^3 + kx$.

(Suppletiva 2023)

Calcolo di aree

PROBLEMA 1

Si consideri la funzione $f(x) = \frac{2x^2+ax+b}{cx-1}$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$.

- a. Determinare il valore dei parametri a, b, c in modo che il grafico della funzione f abbia la retta $x = \frac{1}{2}$ come asintoto verticale, l'asintoto obliquo passi per il punto $P\left(\frac{3}{2}, 3\right)$ e la retta tangente nel punto di ascissa $x = -1$ passi dal punto $Q(2,3)$.

D'ora in avanti, si assuma che $a = 2, b = -1, c = 2$.

- b. Studiare la funzione corrispondente e disegnare il suo grafico γ .
- c. Considerati i rettangoli con i lati paralleli agli assi cartesiani e inscritti nella regione delimitata da γ e dall'asse delle ascisse, determinare quello di area massima.
- d. Calcolare l'area della regione R_k delimitata da γ , dal suo asintoto obliquo e dalle rette $x = k$ e $x = k^2$, con $k > 1$. Determinare il valore di k in corrispondenza del quale la suddetta area vale $\frac{1}{4} \ln \frac{17}{5}$.

(Calendario Australe 2025)

7. Dimostrare che la regione finita di piano contenuta nel primo quadrante, delimitata dagli assi cartesiani e dalla curva $y = \frac{k-x}{x^2+k^2}$ con $k > 0$, ha area costante pari a $\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$.

(Calendario Australe 2023)

7. Tra tutte le curve di equazione $f_a(x) = ax^2 - 2ax - 3a$, con a parametro reale non nullo, determinare il valore di a affinché l'area racchiusa tra la funzione e l'asse delle ascisse valga $\frac{16}{3}$.

(Calendario Australe 2024)

Quesito di geometria piana

1. È dato un triangolo ABC , rettangolo in B . Dimostrare che tale triangolo è isoscele se e solo se l'altezza BH relativa all'ipotenusa è congruente a metà ipotenusa.

(Ordinaria 2024)

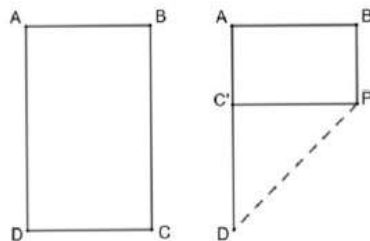
1. Nel triangolo ABC , l'ampiezza di uno dei tre angoli è la metà di un secondo angolo del triangolo ed è pari al triplo del terzo angolo. Detti A' , B' , C' i punti di tangenza tra i lati di ABC ed il suo cerchio inscritto, determinare le ampiezze degli angoli del triangolo $A'B'C'$.

(Straordinaria 2023)

1. È dato un triangolo ABC di lati $AB = a$ e $BC = \sqrt{3}a$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
 - Se $\hat{ACB} = \frac{\pi}{6}$, allora il triangolo è rettangolo;
 - Se il triangolo è rettangolo, allora $\hat{ACB} = \frac{\pi}{6}$.

(Suppletiva 2024)

1. Un rettangolo si dice aureo se il rapporto fra i suoi lati è uguale a $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Sia dato un foglio la cui forma è un rettangolo aureo e lo si indichi con $ABCD$. Dopo aver piegato il foglio come mostrato in figura, verificare che anche il rettangolo $ABPC'$ è aureo. Successivamente, determinare la lunghezza di AD , sapendo che $AC' = 40$ cm.



(Suppletiva 2025)

Quesito di geometria analitica nello spazio

3. Verificare che i punti $O(0,0,0)$, $A(1,4,8)$, $B(-6,0,12)$ e $C(-7,-4,4)$ sono complanari. Calcolare area e perimetro del quadrilatero $OABC$ e classificarlo.

(Suppletiva 2024)

3. Assegnate le rette $r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 1 + 4t \end{cases}$, $s : \begin{cases} x = 1 \\ 2y - z = 3 \end{cases}$ con t parametro reale, determinare

l'equazione cartesiana del piano π contenente r e parallelo ad s .

(Straordinaria 2023)

3. Il centro di una superficie sferica S è il punto di intersezione tra la retta r individuata dalle equazioni

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 3x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

e la retta t passante per i punti $A(-2,3,0)$ e $B(2,-1,2)$. La superficie S è inoltre tangente al piano α di equazione $4x - 2y - 4z + 1 = 0$. Qual è l'equazione di S ?

(Straordinaria 2024)

Quesito di calcolo combinatorio o probabilità

2. Una classe è formata da 18 studenti; durante la lezione di musica, vengono creati (in modo completamente casuale) tre gruppi formati rispettivamente da 5, 6 e 7 studenti. Se Alice, Barbara e Chiara sono tre studentesse della classe, determinare la probabilità che solo due di loro facciano parte di uno stesso gruppo.

(Straordinaria 2023)

2. Si lancia 5 volte una moneta truccata che dà testa con probabilità p .
- Qual è la probabilità di ottenere testa esattamente 2 volte?
 - Per quale valore di p la probabilità di ottenere testa esattamente 2 volte è massima?

(Ordinaria 2024)

2. Un'urna contiene 16 palline, numerate da 1 a 16. Vengono estratte in blocco 5 palline dall'urna; qual è la probabilità che il numero più grande tra quelli usciti sia maggiore di 9?

(Straordinaria 2025)

3. Quanti sono i numeri naturali di tre cifre tali che la cifra "8" compare almeno una volta? Quanti quelli in cui la cifra "0" compare almeno una volta?

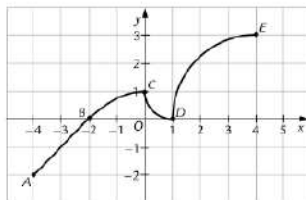
(Straordinaria 2025)

④ Le nostre proposte per la prova scritta di matematica

- **15 simulazioni di seconda prova (HUB Scuola):**
 - 2 inedite
 - Simulazione il 6 maggio

Simulazione 3

Problema 2



In figura è mostrato il grafico di una funzione $y = f(x)$, definita nell'intervallo $[-4, 4]$. La curva è composta dai seguenti quattro tratti:

- AB , un segmento di retta;
- BC , un arco di parabola, con vertice in C ;
- CD , un quarto di circonferenza;
- DE , un quarto di circonferenza.

1 Scrivi l'espressione analitica della funzione e studia la sua derivabilità, con particolare riferimento a quanto si verifica nei punti di raccordo tra i vari tratti sopra elencati e negli estremi della curva: fornisci giustificazioni grafiche e analitiche. Individua i punti di massimo e di minimo relativi e assoluti della funzione.

2 Traccia un grafico qualitativo della funzione $y = f'(x)$, motivando opportunamente le tue scelte.

3 Stabilisci graficamente il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = x + k$, al variare del parametro $k \in \mathbf{R}$.

4 Considera la funzione $F(x) = \int_{-4}^x f(t)dt$, con $x \in [-4, 4]$: senza effettuare calcoli, determina i valori di $F(-4)$, $F(-2)$, $F(0)$, $F(1)$, $F(4)$ e traccia un grafico qualitativo di $F(x)$. Considera infine la restrizione di $F(x)$ all'intervallo $[-4, 0]$, scrivi la sua espressione analitica e disegna il suo grafico preciso.

● Problema dal grafico

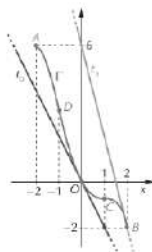
Simulazione 4

Problema 1

La curva Γ in figura rappresenta il grafico della funzione integrale F , relativa al punto $x = 0$, della funzione f sull'intervallo $[-2, 2]$:

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad \text{con } -2 \leq x \leq 2$$

In $x = -2$ e $x = 1$ ci sono due punti stazionari e le rette t_0 e t_B sono tangenti alla curva. Inoltre, è noto che la funzione f è derivabile in $[-2, 2]$ e che la tangente a Γ in D è parallela a t_B .



1. Determina i valori di $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$. Dimostra che il teorema di Lagrange è applicabile alla funzione F nell'intervallo $[-2, 2]$ e che il punto di ascissa $c = 0$ è uno dei punti la cui esistenza è garantita dal teorema. Dimostra con il teorema di Rolle che la funzione F ammette un punto di flesso nell'intervallo $[-2, 1]$.

2. Sapendo che il punto D è l'unico flesso a tangente obliqua per F , traccia il grafico probabile della funzione $y = f(x)$, con $-2 \leq x \leq 2$. Supponi, anche nei punti successivi 3 e 4, che la funzione F sia, sull'intervallo considerato, una funzione polinomiale di quarto grado e determina l'espressione analitica delle funzioni $y = F(x)$ e $y = f(x)$.

3. Calcola i seguenti limiti:

a. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} \left[\int_0^x f(t) dt - \int_0^{-1} f(t) dt \right]$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} f(t) dt}{-2x^2}$

c. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x |f(t)| dt}{(1-x)^2}$

4. Considera la funzione $g(x) = F(-x)$, per $-2 \leq x \leq 2$, e calcola l'area della porzione di piano delimitata dai grafici di F e di g e dalle rette $y = 6$ e $y = -2$.

• Problema dal grafico

Simulazione 12

PROBLEMA 2

Considera la funzione:

$$f_k(x) = \frac{2x^2 + k}{x^2 + 4},$$

dove k è un parametro reale.

- 1** Effettua lo studio completo della funzione f_k , al variare del parametro k . Sulla base dei risultati trovati, traccia, al variare di k , un grafico qualitativo delle funzioni f_k . Considera poi la funzione $g(x) = f_{-8}(x)$, cioè la funzione della famiglia f_k che corrisponde al valore $k = -8$; tracciane il grafico e deduci da esso il grafico della funzione $y = \frac{1}{g(x)}$.
- 2** Spiega perché la funzione g **non** è invertibile, mentre lo è la sua restrizione all'intervallo $[0, +\infty)$. Determina l'equazione $y = g^{-1}(x)$ dell'inversa di tale restrizione e tracciane il grafico. Studia la continuità e la derivabilità della funzione g^{-1} .
- 3** Discuti, al variare di k , il numero delle soluzioni dell'equazione $f_k(x) = x - 2$.
- 4** Stabilisci se la regione di piano delimitata dal grafico della funzione g e dal suo asintoto orizzontale ha area finita. Determina poi per quali valori di k la regione di piano limitata dal grafico di f_k , dal suo asintoto orizzontale e dalle rette verticali passanti per i punti di flesso di f_k ha area uguale a π ; dimostra che i grafici delle due funzioni corrispondenti ai valori di k trovati sono simmetrici rispetto all'asintoto orizzontale.

- Problema con parametri

Simulazione 11

PROBLEMA 1

È data una funzione del tipo:

$$f(x) = k + \frac{ax+b}{e^x}$$

con a, b, k parametri reali.

- 1** Determina i valori dei parametri in modo che la retta tangente al grafico nel punto di ascissa nulla abbia equazione $y = 3x$ e che si abbia:

$$\int_0^1 f(x) dx = 2 - \frac{3}{e}$$

- 2** Verificato che la funzione cercata al punto **1** è $f(x) = 1 + \frac{2x-1}{e^x}$, studiane zeri e segno, anche con considerazioni grafiche, e stabilisci se ha:

- asintoti, di cui sono richieste le equazioni;
- punti di massimo o minimo relativi o assoluti, di cui sono richieste le coordinate;
- punti di flesso, di cui sono richieste le coordinate.

Utilizza poi i risultati trovati per rappresentare la funzione sul piano cartesiano.

- 3** Determina l'espressione analitica della funzione:

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

e ripeti per questa funzione lo studio effettuato al punto **2**, tenendo conto dei risultati già trovati.

- 4** Trova almeno due modi per dimostrare che esiste ed è unico il punto $x_0 \in (0, 1)$ per cui si ha $F(x_0) = 2 - \frac{3}{e}$

- Problema con parametri

Simulazione 13 (inedita 2026)

PROBLEMA 1

È data la funzione

$$f(x) = \frac{ax + b}{x^2 + 1}$$

con a e b parametri reali e $a \neq 0$.

1. Determina i valori di a e b in modo che $x = 1$ sia un punto di massimo e che la distanza tra i due punti stazionari del grafico della funzione f sia uguale a $2\sqrt{5}$.

D'ora in avanti poni $a = 4$ e $b = 0$.

2. Studia la funzione f ottenuta e determina in particolare:
 - il dominio, gli zeri, il segno e le eventuali simmetrie;
 - le equazioni degli asintoti;
 - i punti di massimo e minimo relativi o assoluti;
 - i punti di flesso.

Utilizza i risultati acquisiti per rappresentare il grafico della funzione sul piano cartesiano. Scrivi inoltre le equazioni delle rette tangenti al grafico di f nei suoi punti di flesso.

- Problema con parametri

Simulazione 13 (segue)

3. Considera le funzioni:

$$g(x) = e^x \quad \text{e} \quad h(x) = \frac{1}{x}$$

Traccia i grafici qualitativi delle seguenti funzioni:

- $y = g(f(x))$
- $y = h(f(x))$

specificando per ognuna il dominio, gli zeri, il segno, gli asintoti, i punti di massimo e minimo relativi o assoluti.

Posto $G(x) = g(f(x))$, dimostra che $h(G(x)) = G(-x)$ e traccia il grafico della funzione $y = h(G(x))$.

4. Considera la funzione definita a tratti, con k parametro reale:

$$p(x) = \begin{cases} k \frac{4x}{x^2 + 1} & 0 \leq x \leq \sqrt{e-1} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

. Determina il valore del parametro k in modo che $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$. Quale significato puoi attribuire alla funzione p ottenuta?

- **Problema con parametri**

Simulazione 13 (segue)

PROBLEMA 2

Nella seguente **Fig. 1** sono rappresentate la curva γ e le due semirette t_1 e t_2 , rispettivamente tangenti a γ a sinistra e a destra nel suo punto C .

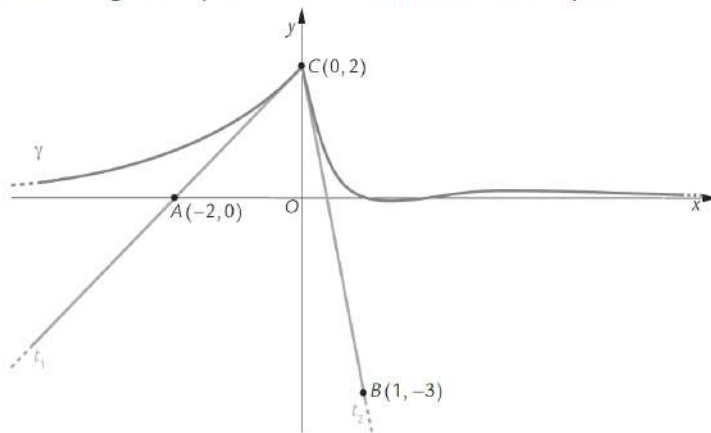


Fig.1

1. Se la curva γ è il grafico della funzione:

$$f(x) = \begin{cases} ce^{dx} & x < 0 \\ (x^2 + ax + b)e^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$$

determina il valore dei parametri $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ in base ai dati in figura.

- Problema di interpretazione di grafici

Simulazione 13 (segue)

2. Studia la funzione f , determinando in particolare:

- il dominio, gli zeri e il segno;
- le equazioni degli asintoti;
- i punti di massimo e minimo relativi o assoluti;
- i punti di flesso.

Determina inoltre l'ampiezza dell'angolo formato dalle semirette tangenti nel punto angoloso, esprimendo il risultato in gradi e primi sessagesimali.

3. Calcola i seguenti integrali e forniscine l'interpretazione geometrica:

$$\int_0^1 f(x)dx$$

$$\int_0^2 f(x)dx$$

$$\int_2^{+\infty} f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^0 f(x)dx$$

4. Traccia il grafico della funzione $F(x) = \int_0^x f(x)dx$, senza utilizzare la sua espressione analitica, ma sfruttando le informazioni raccolte nei punti precedenti per la funzione f . In particolare, determina:

- il dominio, gli zeri e il segno;
- le equazioni degli asintoti;
- i punti di massimo e minimo relativi o assoluti;
- i punti di flesso.

Scrivi inoltre l'equazione della retta tangente al grafico di F nel suo punto di ascissa nulla.

- **Problema di interpretazione di grafici**

Simulazione 13 (segue)

1. Sia P un punto qualsiasi del diametro AB della semicirconferenza γ e Q il punto di intersezione tra γ e la perpendicolare ad AB passante per P . Dette γ_1 e γ_2 le semicirconferenze di diametri AP e PB , contenute nello stesso semipiano di γ , dimostra che l'area della regione delimitata dalle tre semicirconferenze γ , γ_1 e γ_2 , detta *arbelo*, è equivalente al cerchio di diametro PQ .
2. Si lanciano due dadi regolari e si sommano i due esiti. Sia p la probabilità che si verifichi un generico evento E in un singolo lancio dei due dadi.
 - a. Calcola p per l'evento E : "ottenere almeno 9".
 - b. Descrivi un possibile evento E tale che $p = \frac{1}{3}$.
 - c. Determina il valore di p per cui la probabilità che l'evento E si verifichi 2 volte su 6 lanci sia massima.
3. In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ sono dati i punti $A(0, 0, 1)$, $B(2, 2, 0)$, $C(-2, 0, 0)$.
 - a. Verifica che i punti non sono allineati e determina il piano a cui appartengono.
 - b. Determina il centro e il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo ABC .
4. Tra tutti i rettangoli di perimetro uguale a 12, individua quello che, ruotando intorno a uno dei suoi lati, genera il cilindro di volume massimo.

• Quesiti

Simulazione 13 (segue)

- 5.** Sia g una funzione continua e derivabile in $\mathbf{R}$ e sia $y = 2x - 1$ l'equazione della retta tangente al grafico di g nel suo punto di ascissa 1. Determina l'equazione della retta tangente nel punto di ascissa 1 al grafico della funzione:

$$f(x) = \int_1^{g(x)} t^2 dt$$

- 6.** È data la funzione $y = \ln(e^{ax} + e^{x+b})$ con $a > 1$ e $b > 0$. Determina i valori di a e b , in modo che la funzione abbia un asintoto obliquo destro di equazione $y = 2x$ e un asintoto obliquo sinistro di equazione $y = x + 1$.

- 7.** È data la funzione definita a tratti

$$f(x) = \begin{cases} a(x-2)^2 + b & x < 0 \\ \sqrt{cx+1} & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{con } a, b, c \in \mathbf{R}$$

- a.** Determina i valori di a , b , c in modo che:

- f soddisfi le ipotesi del teorema di Lagrange sull'intervallo $[\alpha, 2]$, con $\alpha < 0$;
- il grafico di f passi per il punto $A(2,3)$.

- b.** Posti $a = -\frac{1}{2}$, $b = 3$, $c = 4$, stabilisci se esiste almeno un valore di α per il quale $x = 0$ sia un punto di Lagrange.

- 8.** Classifica i punti di non derivabilità della funzione $f(x) = \sqrt[3]{|x|(x^2 - 4)}$.

• Quesiti

Simulazione 14 (inedita 2026)

PROBLEMA 1

Considera la funzione f_k così definita:

$$f_k(x) = \frac{\sqrt[3]{1+kx} - 1}{x}$$

dove k è un parametro reale, con $k \neq 0$.

1. Classifica i punti di singolarità e di non derivabilità della funzione f_k . Dopo aver dimostrato l'esistenza di un unico punto P_k del grafico di f_k in cui la funzione è continua ma non derivabile, determina l'equazione cartesiana del luogo geometrico dei punti P_k al variare di k in $\mathbb{R} - \{0\}$.

2. Individua il valore del parametro k in modo che $x = -\frac{9}{8}$ sia un punto stazionario.

Verificato che $k = 1$, studia la funzione f_1 , determinando in particolare:

- il dominio, gli zeri, il segno;
- le equazioni degli asintoti;
- gli eventuali punti di estremo relativo.

Senza calcolare la derivata seconda, fai una previsione sul minimo numero di punti di flesso che deve avere la funzione, poi utilizza i risultati acquisiti per rappresentare la curva Γ , grafico della funzione sul piano cartesiano.

- Problema con i parametri

Simulazione 14 (segue)

- 3.** Deduci, dal grafico di f_1 , il grafico della funzione reciproca $g(x) = \frac{1}{f_1(x)}$.

Calcola l'area della regione di piano finita S , delimitata dal grafico di g e dalla retta di equazione $y = 1$.

- 4.** Calcola

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_1'(x)$$

quindi traccia il grafico della funzione $y = f_1'(x)$ in tutto il suo dominio, utilizzando le informazioni acquisite nei punti precedenti, tralasciando lo studio dei punti di flesso di f_1 .

- Problema con i parametri

Simulazione 14 (inedita 2026)

PROBLEMA 2

Una nuova piattaforma digitale viene introdotta sul mercato. Nella **Fig. 1** è rappresentata la curva Γ che rappresenta il grafico della funzione $y = N(t)$, dove t rappresenta il tempo (in anni) e y il numero di utenti, in milioni, dopo t anni dal lancio della piattaforma digitale.

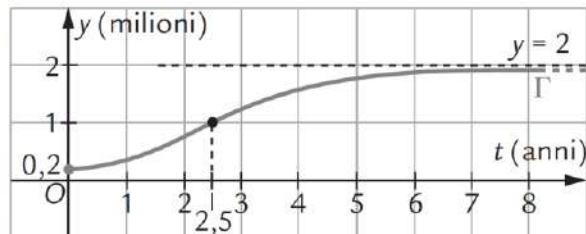


Fig. 1

1. In base all'analisi del grafico stima:

- a quale valore tende nel lungo periodo il numero di utenti della piattaforma;
- l'anno a partire dal quale il numero di utenti si mantiene superiore al milione;
- il numero di utenti dopo 5 anni;
- in che anno la velocità di crescita del numero di utenti comincia a diminuire.

Rappresenta successivamente la curva γ che descrive l'andamento della velocità con cui cresce il numero di utenti nel tempo.

- Problema di interpretazione di grafici

Simulazione 14 (inedita 2026)

2. Sfruttando le informazioni fornite dalla **Fig. 1** e sapendo che:

$$N'(t) = \frac{8ke^{-\frac{8}{9}t}}{\left(1 + 9e^{-\frac{8}{9}t}\right)^2} \quad \text{con } k > 0$$

determina il valore di k e verifica che

$$N(t) = \frac{2}{1 + 9e^{-\frac{8}{9}t}}$$

Individua le coordinate del punto di flesso F di Γ . Determina l'equazione della retta tangente a Γ in F . Qual è il significato del suo coefficiente angolare?

3. Calcola il valor medio della funzione N sull'intervallo $[0, 8]$. Se ogni utente genera un ricavo medio annuo di 12 euro, qual è il ricavo complessivo previsto dal modello nei primi 8 anni?

4. Si vuole costruire un modello alternativo a quello espresso dalla funzione $N(t)$, utilizzando una funzione della forma:

$$N_1(t) = a(1 - e^{-bt^2}) \quad \text{con } a > 0 \text{ e } b > 0$$

Determina per quali valori di a e b la funzione N_1 ha stesso asintoto orizzontale della funzione N e punto di flesso in $x = \frac{5}{2}$. Qual è il grafico della funzione che corrisponde a questi valori di a e b ?

- **Problema di interpretazione di grafici**

Simulazione 14 (inedita 2026)

QUESITI

1. In un triangolo equilatero ABC il lato misura 1. Detto N un punto di AB , considera i punti P e Q , rispettivamente proiezione di N sul lato BC e punto di intersezione tra il prolungamento di AC e la retta PN . Determina la posizione di N su AB , in modo che il perimetro del triangolo PCQ sia uguale al perimetro di ABC .
2. In media, in un database informatico il 2% dei file contiene almeno un errore, indipendentemente dagli altri file. Un tecnico analizza 60 file. Qual è la probabilità che trovi almeno un file contenente almeno un errore? Se il numero di file dimezza, la probabilità dimezza?
3. Calcola il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{x-2} \int_2^x f(t) dt \right)$$

sapendo che f è una funzione continua in un intorno di $x = 2$ e che $f(2) = \frac{1}{2}$.

• Quesiti

Simulazione 14 (inedita 2026)

4. In un riferimento cartesiano $Oxyz$ sono date le rette:

$$r: \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + z = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 0 \\ z = 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Dopo aver verificato che r e s sono sghembe, calcola la loro distanza.

5. Nella figura geometrica rappresentata in **Fig. 2** il quadrilatero $AP'CP$ è un rombo.

Determina la posizione dei punti P e P' in modo tale che la somma del perimetro del rombo $APCP'$ e della lunghezza dei segmenti BP e $P'D$ sia minima.

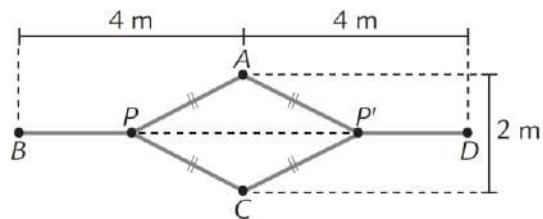


Fig. 2

• Quesiti

Simulazione 14 (inedita 2026)

6. Le curve rappresentate nella **Fig.3** sono i grafici delle funzioni:

- $f(x) = x \cdot \sin x + 1$
- $g(x) = -\left(\frac{ex}{\pi}\right)^2 + 1$
- $h(x) = \ln \frac{ex}{\pi}$

Si sa che A appartiene all'asse y , C appartiene all'asse x e B ha la stessa ordinata di A .
Dopo aver dimostrato che $x_C = \frac{\pi}{e}$ e che $x_B = \pi$, calcola l'area della regione evidenziata.

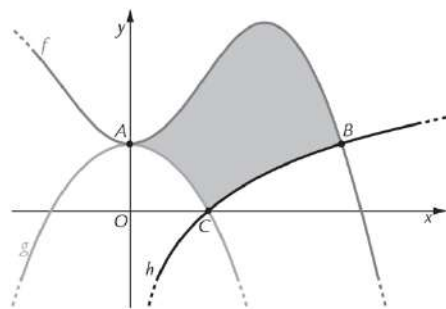


Fig. 3

• Quesiti

Simulazione 14 (inedita 2026)

7. Determina la funzione polinomiale di quarto grado $y = P(x)$ sapendo che, in un sistema di riferimento cartesiano, il suo grafico verifica le seguenti condizioni:

- $x = 0$ e $x = 2$ sono zeri della funzione;
- il grafico della funzione è simmetrico rispetto all'asse y ;
- l'ordinata minima è -2 .

8. Dopo aver determinato il dominio della funzione

$$f(x) = \cos x + x - \ln(\sqrt{1+x^2} - x)$$

dimostra che la funzione è invertibile nel suo dominio e, detta g l'inversa di f , determina la retta tangente al grafico di g in $x = 1$.

• Quesiti

Esempio di griglia di valutazione

Indicatori	Livelli	Descrittori	Punti	Evidenze		
				Problema 1	Problema 2	Quesiti
Comprendere Analizzare la situazione problematica. Identificare i dati ed interpretarli. Effettuare gli eventuali collegamenti e adoperare i codici grafico-simbolici necessari.	L1	Esamina la situazione proposta in modo superficiale o frammentario. Formula ipotesi esplicative non adeguate. Non riconosce modelli, analogie o leggi.	1	☐ Comprende le richieste del problema. ☐ Interpreta le situazioni presentate nelle figure. ☐ Individua la regione finita di piano di cui calcolare l'area. ☐ Utilizza il linguaggio simbolico.	☐ Comprende le richieste del problema. ☐ Interpreta il grafico dato nel testo. ☐ Individua la regione di piano illimitata. ☐ Individua la regione limitata di piano di cui calcolare l'area. ☐ Utilizza il linguaggio simbolico.	☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8
	L2	Esamina la situazione proposta in modo parziale. Formula ipotesi esplicative non del tutto adeguate. Riconosce modelli o analogie o leggi in modo non sempre appropriato.	2			
	L3	Esamina la situazione proposta in modo parziale. Formula ipotesi esplicative complessivamente adeguate.	3			
	L4	Esamina la situazione proposta in modo quasi completo. Formula ipotesi esplicative complessivamente adeguate. Riconosce modelli o analogie o leggi in modo generalmente appropriato.	4			
	L5	Esamina criticamente la situazione proposta in modo completo ed esauriente. Formula ipotesi esplicative adeguate. Riconosce modelli o analogie o leggi in modo appropriato.	5			
Individuare Conoscere i concetti matematici utili alla soluzione. Analizzare possibili strategie risolutive ed individuare la strategia più adatta.	L1	Non conosce o conosce solo parzialmente i concetti matematici utili alla soluzione della prova, non è in grado di individuare relazioni tra le variabili in gioco e non riesce a individuare gli strumenti formali opportuni.	1	☐ Conosce il teorema di Archimede. ☐ Conosce la definizione di continuità. ☐ Conosce la definizione di derivabilità. ☐ Conosce la definizione di asintoto. ☐ Conosce la definizione di minimo assoluto. ☐ Individua la strategia per determinare il minimo assoluto. ☐ Individua la strategia per studiare le funzioni $\alpha(k)$ e $\alpha'(k)$. ☐ Individua la strategia per calcolare l'area.	☐ Conosce la definizione di derivata. ☐ Individua la strategia per dimostrare la relazione data. ☐ Individua la strategia per studiare la funzione $f(x)$. ☐ Individua la strategia per ricavare il grafico di $f(x)$. ☐ Individua la strategia per ricavare il grafico di $f'(x)$. ☐ Conosce il concetto di primitiva. ☐ Conosce la formula per il calcolo della retta tangente al grafico di una funzione in un punto. ☐ Conosce il concetto di integrale improprio. ☐ Individua la strategia per il calcolo dell'area.	☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8
	L2	Conosce solo parzialmente i concetti matematici utili alla soluzione della prova o non imposta correttamente il procedimento risolutivo. Individua con difficoltà o errori gli strumenti formali opportuni.	2			
	L3	Conosce superficialmente i concetti matematici utili alla soluzione della prova e individua le relazioni fondamentali tra le variabili. Non riesce a impostare correttamente tutto il procedimento risolutivo.	3			
	L4	Conosce i concetti matematici utili alla soluzione della prova e le possibili relazioni tra le variabili. Individua gran parte delle strategie risolutive, anche se non sempre le più adeguate ed efficienti.	4			
	L5	Conosce i concetti matematici utili alla soluzione della prova e tutte le relazioni tra le variabili, che utilizza in modo adeguato. Individua le strategie risolutive, anche se non sempre le più efficienti. Individua gli strumenti di lavoro formali opportuni.	5			
	L6	Conosce e padroneggia i concetti matematici utili alla soluzione della prova, formula congetture, effettua chiari collegamenti logici e utilizza nel modo migliore le relazioni matematiche note. Individua strategie di lavoro adeguate ed efficienti e procedure risolutive anche non standard.	6			

Esempio di griglia di valutazione

Sviluppare il processo risolutivo Risolvere la situazione problematica in maniera coerente, completa e corretta, applicando le regole ed eseguendo i calcoli necessari.	L1	Formalizza le situazioni problematiche in modo inadeguato. Non applica correttamente gli strumenti matematici e disciplinari rilevanti per la soluzione.	1	☐ Determina l'area delle regioni colorate nei tre casi. ☐ Calcola i limiti della funzione $a(k)$ ☐ Studia la continuità di $a(k)$. ☐ Calcola la derivata $a'(k)$. ☐ Calcola i limiti della funzione $a'(k)$ per studiare la derivabilità di $a(k)$. ☐ Studia il segno di $a'(k)$ per determinare il minimo di $a(k)$. ☐ Calcola la derivata $a''(k)$. ☐ Studia la concavità di $a(k)$. ☐ Studia l'andamento della funzione $a'(k)$. ☐ Calcola la derivata $a'''(k)$. ☐ Studia la concavità di $a'(k)$. ☐ Traccia i grafici delle funzioni. ☐ Calcola l'area.	☐ Dimostra la relazione data dal testo. ☐ Calcola dominio, segno e zeri di $f'(x)$. ☐ Calcola i limiti e gli asintoti di $f'(x)$. ☐ Calcola le derivate di $f'(x)$. ☐ Studia l'andamento e la concavità di $f'(x)$. ☐ Traccia il grafico di $f'(x)$. ☐ Traccia il grafico di $f''(x)$. ☐ Calcola i limiti di $f''(x)$. ☐ Calcola $f''(x)$ e ne studia il segno per determinare l'andamento di $f'(x)$. ☐ Traccia il grafico di $f''(x)$. ☐ Calcola la derivata della funzione data, per verificare che sia la primitiva richiesta. ☐ Calcola l'equazione della retta tangente. ☐ Imposta l'integrale improprio per dimostrare che l'area non è finita. ☐ Calcola l'intersezione tra i grafici di $f'(x)$ e $g(x)$ per calcolare l'area richiesta. ☐ Calcola l'integrale per determinare l'area richiesta.	☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8
	L2	Formalizza le situazioni problematiche in modo superficiale. Non applica gli strumenti matematici e disciplinari rilevanti per la risoluzione.	2			
	L3	Formalizza le situazioni problematiche in modo parziale. Applica gli strumenti matematici e disciplinari rilevanti per la risoluzione in modo non sempre corretto	3			
	L4	Formalizza le situazioni problematiche in modo quasi completo. Applica gli strumenti matematici e disciplinari rilevanti per la risoluzione in modo generalmente corretto	4			
	L5	Formalizza le situazioni problematiche in modo completo ed esauriente. Applica gli strumenti matematici e disciplinari rilevanti per la risoluzione in modo ottimale	5			
Argomentare Commentare e giustificare opportunamente la scelta della strategia risolutiva, i passaggi fondamentali del processo esecutivo e la coerenza dei risultati al contesto del problema.	L1	Descrive il processo risolutivo in modo superficiale. Comunica con un linguaggio non appropriato. Non valuta la coerenza con la situazione problematica proposta.	1	☐ Argomenta i casi che si presentano nel calcolo dell'area delle regioni colorate. ☐ Argomenta lo studio della funzione $a(k)$. ☐ Spiega la strategia di ricerca del minimo assoluto di $a(k)$. ☐ Argomenta lo studio della funzione $a'(k)$. ☐ Argomenta la scelta della strategia per il calcolo dell'area.	☐ Argomenta la dimostrazione che conduce all'espressione di $f'(x)$. ☐ Argomenta lo studio della funzione $f'(x)$. ☐ Spiega come si può ricavare il grafico di $f(x)$ da quello di $f'(x)$. ☐ Spiega come si può ricavare il grafico di $f''(x)$ da quello di $f'(x)$. ☐ Spiega perché la funzione data $f(x)$ è la primitiva cercata. ☐ Argomenta il calcolo della retta tangente al grafico. ☐ Spiega perché l'area non è finita. ☐ Spiega la strategia per il calcolo dell'area finita.	☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8
	L2	Descrive il processo risolutivo in modo parziale. Comunica con un linguaggio non sempre appropriato. Valuta solo in parte la coerenza con la situazione problematica proposta.	2			
	L3	Descrive il processo risolutivo in modo quasi completo. Comunica con un linguaggio generalmente appropriato. Valuta nel complesso la coerenza con la situazione problematica proposta.	3			
	L4	Descrive il processo risolutivo in modo completo ed esauriente. Comunica con un linguaggio appropriato. Valuta in modo ottimale la coerenza con la situazione problematica proposta.	4			

Totale: /20

5 I materiali a disposizione del docente

Sezione dedicata all'esame di maturità con:

- **Simulazioni di seconda prova**, realizzate da Cristina Giuliano Albo, Leonardo Sasso e Claudio Zanone, con svolgimento e griglia di valutazione
- Una **simulazione dotata di videorisoluzioni**, realizzata da Elia Bombardelli e Gabriele Dalla Torre
- **Video**, a cura di Elia Bombardelli, Gabriele Dalla Torre e Marta Polesello, con lo svolgimento di alcuni quesiti tipici e tratti dalle prove ministeriali
- **Spunti per il colloquio** (in preparazione)
- **Attività con la calcolatrice grafica**
- **Richiami di teoria**, per la revisione di concetti, formule e teoremi
- Schede di **guida ai metodi risolutivi**



Esame di maturità

Simulazioni di seconda prova modificabili



In HUB Test:

- **Simulazioni di seconda prova modificabili**
- **Esercizi della categoria ESAME** per creare **prove personalizzate**



[Simulazioni di seconda prova](#)

Esame day



Sul sito Deascuola dedicato all'esame di maturità

- **Ore 07:00:** pubblicazione della **simulazione di seconda prova** da assegnare alla classe
- **Dalle ore 14:00:** pubblicazione della **risoluzione** e della **griglia di valutazione** della simulazione



Spazio alle domande!



DEASCUOLA

Scopri le videolezioni!

- Trova più informazioni e accedi alle videolezioni sulla [pagina dedicata](#)

Insegnare Matematica e Fisica
nella scuola Secondaria di Secondo grado

Scopri i webinar trasversali!

Appuntamenti online sulle **novità** del mondo della scuola e **aggiornamenti** sulle principali **discipline**. Un'**occasione unica**, semplice a portata di mano che porta **a casa tua** i migliori **esperti**.

Partecipare ti permette di **interagire** con il relatore e ottenere **materiali** immediatamente spendibili.

- Trovi tutti i webinar in programma alla [pagina dedicata](#)