Insegnare con… Nuova Matematica allo specchio

Relatori: Leonardo Sasso,
Claudio Zanone,
Pierangela Accomazzo

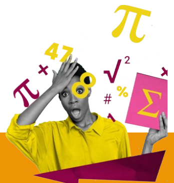
Insegnare matematica allo specchio: una matematica sostenibile

Relatori: Leonardo Sasso,
Claudio Zanone,
Pierangela Accomazzo

Insegnare matematica «allo specchio»
Perché questo titolo?

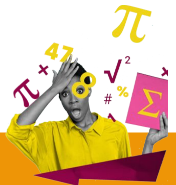
- Perché la nostra azione di docenti è un continuo specchiarci nelle studentesse e negli studenti e viceversa

- Perché la matematica si specchia continuamente in se stessa, tra il suo aspetto teorico/speculativo e il suo aspetto pratico/applicativo



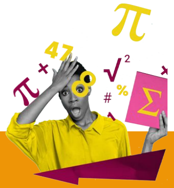
Quale idea di matematica?

- Una matematica a misura di studente, illustrata con rigore e completezza
- Una matematica attiva e coinvolgente
- Una matematica che parta da problemi, volta non solo all’acquisizione delle tecniche di calcolo, ma soprattutto alla **formazione di competenze** e alla **costruzione di significati**



Quale idea di matematica?

- Una matematica con una forte valenza sia strumentale sia culturale
- Una matematica inclusiva, che aiuti a stare bene a scuola
- Una matematica attenta alla cittadinanza e alla sostenibilità



Star bene a scuola

I primi provvedimenti dello stesso PNRR (cfr. Scuola 4.0) riportano che i finanziamenti sono finalizzati a *"favorire*

1. ***l'apprendimento attivo e collaborativo***
2. *la motivazione ad apprendere e il benessere emotivo*
3. ***il peer learning e il problem solving***
4. ***l'inclusione e la didattica personalizzata*** *per lo sviluppo di "abilità cognitive e metacognitive (pensiero critico e creativo)*
5. *abilità sociali ed emotive (empatia, autoefficacia, responsabilità, collaborazione)*

Le difficoltà: prendiamo spunto dai risultati OCSE – PISA del 2022

- L'Italia si attesta attorno alla media OCSE, ma ha perso 15 punti circa in Matematica, come *quasi* tutti gli altri Paesi del mondo negli anni di pandemia.

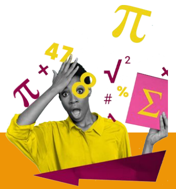
- La pandemia ha creato maggiori difficoltà in Matematica.

- Ci sono discrepanze tra aree geografiche diverse e tra tipologie di scuola diverse.

- L'Italia ha il record nel divario di genere per i risultati delle studentesse che raggiungono livelli medi inferiori rispetto agli studenti.

Un nuovo progetto didattico

- Le lezioni «a specchio», per una didattica attiva ed efficace, con una teoria presentata in modo sintetico ma rigoroso e completo
- La presentazione «a spirale» di alcuni temi che fungono da filo conduttore
- Il laboratorio di matematica, per mettere gli studenti e le studentesse al centro del processo di apprendimento



Le lezioni «a specchio»

Teoria

3 Secondo principio di equivalenza

I numeri reali godono della seguente proprietà, detta **seconda legge di monotonia**.

PROPRIETÀ Seconda legge di monotonia dei numeri reali

1. Se due numeri reali a e b sono uguali, moltiplicando entrambi per lo stesso numero reale c si ottengono ancora due numeri uguali.
$$a=b \Rightarrow a\cdot c=b\cdot c$$
2. Dati tre numeri reali a, b, c, con c **diverso da zero**, se $a\cdot c$ e $b\cdot c$ sono uguali, allora anche a e b sono uguali.
$$a\cdot c=b\cdot c \wedge c\neq 0 \Rightarrow a=b$$

Possiamo quindi concludere quanto segue: $\boxed{a=b\wedge c\neq 0 \Leftrightarrow a\cdot c=b\cdot c}$

Anche in questo caso è possibile visualizzare la proprietà precedente pensando a ciò che accade su una bilancia a bracci uguali quando si trova in equilibrio (Fig. 4).

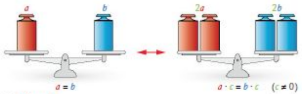


Figura 4

Dalla seconda legge di monotonia segue il **secondo principio di equivalenza** per le equazioni.

PROPRIETÀ Secondo principio di equivalenza delle equazioni

Moltiplicando o dividendo entrambi i membri di un'equazione per lo stesso numero, diverso da 0, o la stessa espressione algebrica, purché diversa da 0 e definita per tutti i valori del dominio dell'equazione, si ottiene un'equazione equivalente a quella di partenza.

ESEMPIO 8 Secondo principio di equivalenza

Considera l'equazione $-2x=10$.
Dividendo entrambi i membri per -2, si ottiene: $\frac{-2x}{-2}=\frac{10}{-2} \Leftrightarrow x=-5$

Puoi verificare che l'equazione di partenza ha come insieme delle soluzioni $S=\{-5\}$.

Perché il numero per cui moltiplichiamo o dividiamo entrambi i membri di un'equazione deve essere diverso da 0?

Moltiplicare entrambi i membri di un'equazione per 0, in generale fornisce un'equazione **non** equivalente a quella di partenza: si potrebbe addirittura trasformare un'uguaglianza falsa in una vera.
Sappiamo inoltre, dalla definizione di divisione, che **non è possibile** dividere un numero per 0.

ESEMPIO 9 Moltiplicare entrambi i membri per 0

1. L'equazione $2x=10$ ha come insieme delle soluzioni $S=\{5\}$.
Moltiplicando entrambi i membri per 0, si ottiene $0\cdot(2x)=0\cdot 10 \Leftrightarrow 0=0$, che è un'identità.
2. Dall'uguaglianza falsa $10=8$, moltiplicando entrambi i membri per 0, si ottiene l'uguaglianza vera $0=0$.

Rifletti sulla teoria

Applicare il secondo principio di equivalenza

METODO DI STUDIO Date le seguenti equazioni, trova le equazioni a esse equivalenti e in cui tutti i coefficienti siano interi.

30 ESERCIZIO SVOLTO $\frac{x+1}{2}+\frac{x+2}{3}=\frac{x+3}{4}$

1. Portiamo tutte le frazioni allo stesso denominatore:
$\frac{x+1}{2}+\frac{x+2}{3}=\frac{x+3}{4} \Leftrightarrow \frac{6(x+1)+4(x+2)}{12}=\frac{3(x+3)}{12}$
2. Applicando il secondo principio, moltiplichiamo entrambi i membri per 12, in modo da eliminare i denominatori:
$\frac{6(x+1)+4(x+2)}{\cancel{12}}\cdot\cancel{12}=\frac{3(x+3)}{\cancel{12}}\cdot\cancel{12}$
3. Svolgiamo i prodotti e sommiamo i termini simili:
$6x+6+4x+8=3x+9 \Leftrightarrow 10x+14=3x+9$

31 $\frac{x-1}{25}-\frac{1}{10}x=\frac{1-x}{20}$ $[-6x-4=-5x+5]$

33 $x-2=\frac{2x-4}{3}$ $[3x-6=2x-4]$

32 $\frac{x+3}{4}-\frac{3x-1}{28}=\frac{1}{2}$ $[4x+22=14]$

34 $\frac{3}{5}x-1+\frac{x-4}{2}=-\frac{2}{3}x$ $[18x-30+15x-60=-20x]$

Applicare congiuntamente i principi di equivalenza

35 SPIEGA PERCHÉ Seguendo l'esempio svolto, completa la tabella indicando se le equazioni sono equivalenti nel dominio ℝ. Motiva le tue scelte applicando i principi di equivalenza.

Prima equazione	Seconda equazione	Sono equivalenti?	Perché?
$a+3=7$	$10a+30=7$	No	Il primo membro è stato moltiplicato per 10, mentre il secondo no.
$5t+2=0$	$t+\frac{2}{5}=0$	Sì	La seconda si ottiene dalla prima dividendo entrambi i membri per 5.
$4x-\frac{3}{4}=1$	$16x-7=0$	Sì	La seconda equazione si ottiene dalla prima moltiplicando entrambi i membri per 4 e sottraendo loro 4.
$3x=6x+1$	$18x=6$	No	Nella seconda entrambi i membri sono stati moltiplicati per 6, ma non è presente il termine 36x.

Scrivi le seguenti equazioni nella forma normale $P(x)=0$, dove $P(x)$ è un polinomio di primo grado a coefficienti interi.

36 ESERCIZIO SVOLTO $\frac{2}{3}x-\frac{1}{5}=\frac{6x+1}{6}$

1. Riduciamo tutte le frazioni allo stesso denominatore:
$\frac{10\cdot 2x}{30}-\frac{6\cdot 1}{30}=\frac{5\cdot(6x+1)}{30} \Leftrightarrow \frac{20x-6}{30}=\frac{30x+5}{30}$.
2. Eliminiamo i denominatori, moltiplicando entrambi i membri per 30: $20x-6=30x+5$.
3. Aggiungiamo a entrambi i membri l'espressione $-30x$ e riduciamo i termini simili:
$20x-6-30x=30x+5-30x \Leftrightarrow -10x-6=5$
Sottraiamo 5 a entrambi i membri e riduciamo i termini simili:
$-10x-6-5=5-5 \Leftrightarrow -10x-11=0$

37 $\frac{x+1}{2}+\frac{x+1}{3}+\frac{x+1}{4}=x$ $[x+13=0]$

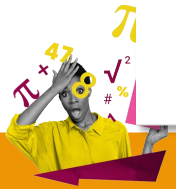
39 $1-\frac{5(2x-1)}{6}=\frac{5}{12}x$ $[-25x+22=0]$

38 $\frac{2x-1}{5}-\frac{x}{7}-\frac{3}{14}=-2$ $[18x+111=0]$

40 $3x-\frac{3x-5}{2}=2+\frac{7}{4}x$ $[-x+2=0]$

Nella pagina sinistra si presenta la teoria

Nella pagina destra si trova un primo gruppo di esercizi



Le pagine a sinistra

3 Secondo principio di equivalenza

I numeri reali godono della seguente proprietà, detta **seconda legge di monotonia**.

PROPRIETÀ Seconda legge di monotonia dei numeri reali

1. Se due numeri reali a e b sono uguali, moltiplicando entrambi per lo stesso numero reale c si ottengono ancora due numeri uguali.
$$a=b \Rightarrow a\cdot c=b\cdot c$$
2. Dati tre numeri reali a, b, c, con c **diverso da zero**, se $a\cdot c$ e $b\cdot c$ sono uguali, allora anche a e b sono uguali.
$$a\cdot c=b\cdot c \wedge c\neq 0 \Rightarrow a=b$$

Possiamo quindi concludere quanto segue: $\boxed{a=b \wedge c\neq 0 \Leftrightarrow a\cdot c=b\cdot c}$

Anche in questo caso è possibile visualizzare la proprietà precedente pensando a ciò che accade su una bilancia a bracci uguali quando si trova in equilibrio (Fig. 4).

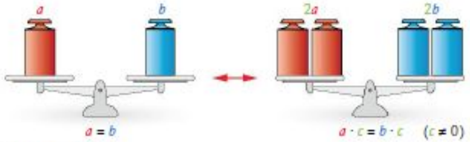


Figura 4

Dalla seconda legge di monotonia segue il **secondo principio di equivalenza** per le equazioni.

PROPRIETÀ Secondo principio di equivalenza delle equazioni

Moltiplicando o dividendo entrambi i membri di un'equazione per lo stesso numero, diverso da 0, o la stessa espressione algebrica, purché diversa da 0 e definita per tutti i valori del dominio dell'equazione, si ottiene un'equazione equivalente a quella di partenza.

ESEMPIO 8 Secondo principio di equivalenza

Considera l'equazione $-2x=10$.

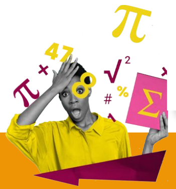
Dividendo entrambi i membri per -2, si ottiene: $\frac{-2x}{-2}=\frac{10}{-2} \quad \Leftrightarrow \quad x=-5$

Puoi verificare che l'equazione di partenza ha come insieme delle soluzioni $S=\{-5\}$.

La teoria è presentata in modo sintetico, rigoroso e completo, **dando respiro** alle pagine, che contengono **pochi concetti** ben evidenziati

I concetti vengono spesso **visualizzati graficamente**, per migliorare la comprensione usando **più registri**

A ogni concetto corrispondono uno o più **esempi**



Le pagine a sinistra

Perché il numero per cui moltiplichiamo o dividiamo entrambi i membri di un'equazione deve essere diverso da 0?

Moltiplicare entrambi i membri di un'equazione per 0, in generale fornisce un'equazione **non** equivalente a quella di partenza: si potrebbe addirittura trasformare un'uguaglianza falsa in una vera.
Sappiamo inoltre, dalla definizione di divisione, che **non è possibile** dividere un numero per 0.

ESEMPIO 9 **Moltiplicare entrambi i membri per 0**

1. L'equazione $2x = 10$ ha come insieme delle soluzioni $S = \{5\}$.
   Moltiplicando entrambi i membri per 0, si ottiene $0 \cdot (2x) = 0 \cdot 10 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 0$, che è un'identità.
2. Dall'uguaglianza falsa $10 = 8$, moltiplicando entrambi i membri per 0, si ottiene l'uguaglianza vera $0 = 0$.

I **box domanda/risposta** portano all'attenzione gli aspetti che possono creare difficoltà

Le pagine a destra

Gli esercizi sono raggruppati per **abilità**, indicate con un verbo

Applicare il secondo principio di equivalenza

METODO DI STUDIO **Date le seguenti equazioni, trova le equazioni a esse equivalenti e in cui tutti i coefficienti siano interi.**

30 **ESERCIZIO SVOLTO** $\frac{x+1}{2}+\frac{x+2}{3}=\frac{x+3}{4}$

① Portiamo tutte le frazioni allo stesso denominatore:

$$\frac{x+1}{2}+\frac{x+2}{3}=\frac{x+3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{6(x+1)+4(x+2)}{12}=\frac{3(x+3)}{12}$$

② Applicando il secondo principio, moltiplichiamo entrambi i membri per 12, in modo da eliminare i denominatori:

$$\frac{6(x+1)+4(x+2)}{\cancel{12}}\cdot\cancel{12}=\frac{3(x+3)}{\cancel{12}}\cdot\cancel{12}$$

③ Svolgiamo i prodotti e sommiamo i termini simili:

$$6x+6+4x+8=3x+9 \quad \Leftrightarrow \quad 10x+14=3x+9$$

31 $\frac{x-1}{25}-\frac{1}{10}x=\frac{1-x}{20}$ $[-6x-4=-5x+5]$

32 $\frac{x+3}{4}-\frac{3x-1}{28}=\frac{1}{2}$ $[4x+22=14]$

33 $x-2=\frac{2x-4}{3}$ $[3x-6=2x-4]$

34 $\frac{3}{5}x-1+\frac{x-4}{2}=-\frac{2}{3}x$ $[18x-30+15x-60=-20x]$

Gli esercizi talvolta sono le **prime applicazioni** di quanto presentato a sinistra, altre volte invitano lo studente ad **approfondire il ragionamento** su alcuni concetti, in modo da **consolidarne la comprensione**

Gli esercizi per l'acquisizione di procedure sono sempre presentati come **esercizi svolti** in modo da **evidenziare i vari passi**

Le pagine a destra

2 TRADUCI Ogni equazione può essere interpretata come la richiesta di trovare numeri che soddisfano una certa condizione. Basandoti sulle proprietà delle operazioni, completa la tabella come nell'esempio svolto, indicando la richiesta associata a ogni equazione o individuando l'equazione associata alla richiesta verbale.

Equazione	Dominio	Richiesta
$2x = 5$	$\mathbb{N}$	Trova un numero naturale che moltiplicato per 2 dà 5
$2x = 5$	$\mathbb{Q}$	Trova un numero razionale che moltiplicato per 2 dà 5
$x^2 = 0$	$\mathbb{N}$	Trova un numero naturale il cui quadrato è 0
$(x + 1)^2 = 36$	$\mathbb{N}$	Il quadrato del successivo di un numero naturale è 36. Trova il numero.
$x^3 = 125$	$\mathbb{N}$	Trova un numero naturale il cui cubo è 125.
$2/7\ x = -3$	$\mathbb{Q}$	Trova un numero razionale il cui doppio diviso per 7 dà –3.

Gli esercizi di tipo **TRADUCI** consentono di passare da un registro all'altro

35 SPIEGA PERCHÉ Seguendo l'esempio svolto, completa la tabella indicando se le equazioni sono equivalenti nel dominio $\mathbb{R}$. Motiva le tue scelte applicando i principi di equivalenza.

Prima equazione	Seconda equazione	Sono equivalenti?	Perché?
$a + 3 = 7$	$10a + 30 = 7$	No	Il primo membro è stato moltiplicato per 10, mentre il secondo no.
$5t + 2 = 0$	$t + \frac{2}{5} = 0$	Sì	La seconda si ottiene dalla prima dividendo entrambi i membri per 5.
$4x - \frac{3}{4} = 1$	$16x - 7 = 0$	Sì	La seconda equazione si ottiene dalla prima moltiplicando entrambi i membri per 4 e sottraendo loro 4.
$3x = 6x + 1$	$18x = 6$	No	Nella seconda entrambi i membri sono stati moltiplicati per 6, ma non è presente il termine 36x.

Gli esercizi di tipo **SPIEGA PERCHÉ** sono un primo approccio all'argomentazione

DEASCUOLA

Le pagine a destra

METODO DI STUDIO Applica il primo principio a ciascuna delle seguenti equazioni, in modo che sia soddisfatta la condizione espressa a fianco e si ottenga un'equazione equivalente a quella data.

25 SEGUI LA TRACCIA $\frac{1}{3}x+3=\frac{13}{3}$ — il secondo membro è uguale a 10

Aggiungi a entrambi i membri la quantità $\left(-\frac{13}{3}+10\right)$ e riduci i termini simili.

$\frac{1}{3}x+3+\frac{17}{3}=\frac{13}{3}+\frac{17}{3} \iff \frac{1}{3}x+\frac{26}{3}=10$

26 $15+2x=3x-10$ — il primo membro è un numero e il secondo membro è un monomio contenente x

27 $\frac{3}{5}x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}x-\frac{3}{5}$ — tutti i termini contenenti x sono a primo membro, ridotti a un solo monomio, e il secondo membro è nullo

28 $(x-1)(x+1)=x^2-2x$ — il secondo membro è uguale a 1

29 $(2x-1)(2x+1)=x^2-2x$ — il secondo membro è nullo

Gli esercizi di tipo **METODO DI STUDIO** focalizzano l'attenzione su casi particolari o aspetti e passaggi talvolta nascosti e insegnano a studiare **chiedendosi il perché** delle cose

60 TROVA L'ERRORE Wendy ha risolto un'equazione come di seguito. Spiega perché non è possibile farlo.

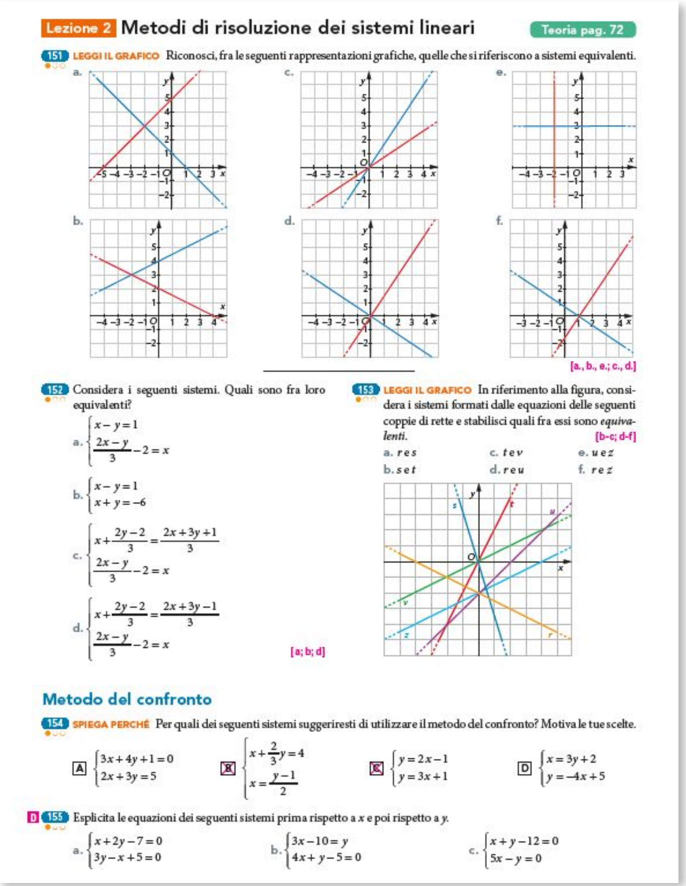
$(x+1)(x-1)(x+2)=1 \iff x+1=0 \lor x-1=0 \lor x+2=0 \iff x=-1 \lor x=1 \lor x=-2$

61 TROVA L'ERRORE Riccardo ha risolto la stessa equazione di Wendy come di seguito. Spiega perché [...] è possibile farlo.

$(x+1)(x-1)(x+2)=1 \iff x+1=1 \lor x-1=1 \lor x+2=1 \iff x=0 \lor x=2 \lor x=-1$

Gli esercizi di tipo **TROVA L'ERRORE** sono un altro invito all'argomentazione e mettono in evidenza gli **errori tipici**

Gli esercizi di lezione



Lezione 2 Metodi di risoluzione dei sistemi lineari — Teoria pag. 72

151 LEGGI IL GRAFICO Riconosci, fra le seguenti rappresentazioni grafiche, quelle che si riferiscono a sistemi equivalenti.

a. b. c. d. e. f.

[a., b., e.; c., d.]

152 Considera i seguenti sistemi. Quali sono fra loro equivalenti?

a. $\begin{cases} x-y=1 \\ \frac{2x-y}{3}-2=x \end{cases}$

b. $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=-6 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x+\frac{2y-2}{3}=\frac{2x+3y+1}{3} \\ \frac{2x-y}{3}-2=x \end{cases}$

d. $\begin{cases} x+\frac{2y-2}{3}=\frac{2x+3y-1}{3} \\ \frac{2x-y}{3}-2=x \end{cases}$

[a; b; d]

153 LEGGI IL GRAFICO In riferimento alla figura, considera i sistemi formati dalle equazioni delle seguenti coppie di rette e stabilisci quali fra essi sono equivalenti. [b-c; d-f]

a. r e s c. t e v e. u e z

b. s e t d. r e u f. r e z

Metodo del confronto

154 SPIEGA PERCHÉ Per quali dei seguenti sistemi suggeriresti di utilizzare il metodo del confronto? Motiva le tue scelte.

A $\begin{cases} 3x+4y+1=0 \\ 2x+3y=5 \end{cases}$ B $\begin{cases} x+\frac{2}{3}y=4 \\ x=\frac{y-1}{2} \end{cases}$ C $\begin{cases} y=2x-1 \\ y=3x+1 \end{cases}$ D $\begin{cases} x=3y+2 \\ y=-4x+5 \end{cases}$

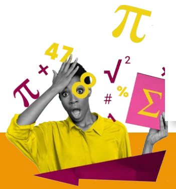
D **155** Esplicita le equazioni dei seguenti sistemi prima rispetto a x e poi rispetto a y.

a. $\begin{cases} x+2y-7=0 \\ 3y-x+5=0 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 3x-10=y \\ 4x+y-5=0 \end{cases}$ c. $\begin{cases} x+y-12=0 \\ 5x-y=0 \end{cases}$

Per ogni lezione è presente una sezione di esercizi, **classificati per argomento o paragrafo**

Sono catalogati in **ordine di difficoltà**: gli esercizi di lezione possono essere di **livello 1 o livello 2**

Per la maggior parte delle lezioni questa parte si conclude con una sezione di **problemi**



Gli esercizi di lezione

193 ●○○

$$\begin{cases} \frac{5}{3}x - \frac{11}{2}y = \frac{4}{9} \\ -\frac{1}{10}x - \frac{2}{5}y = -1 \end{cases}$$

$\left[\left(\frac{14}{3}; \frac{4}{3}\right)\right]$

200 ●●○

$$\begin{cases} \sqrt{3}x - 2\sqrt{5}\,y = 13 \\ x + 2y - \sqrt{3} + 2\sqrt{5} = 0 \end{cases}$$

$[(\sqrt{3}; -\sqrt{5})]$

Livello di difficoltà degli esercizi

380 ●○○ **ESERCIZIO SVOLTO** A un gioco partecipano n giocatori e il vincitore riceve n fagioli da ciascuno degli altri giocatori. Se il vincitore riceve 210 fagioli, quanti sono i partecipanti?

Dati e relazioni: n giocatori; il vincitore riceve n fagioli per $n-1$ volte per un totale di 210 fagioli.
Richieste: trovare n.
Scelta dell'incognita e dominio:
numero giocatori $= n \quad n \in \mathbb{N} - \{0\}$
Grandezze
Somma ricevuta dal vincitore $= n(n-1)$
Equazione e sua risoluzione
$n(n-1) = 210 \quad \Leftrightarrow \quad n^2 - n - 210 = 0$

$\Delta = 1 + 840 = 841 \quad n_{1,2} = \frac{1 \pm 29}{2} \quad \rightarrow \quad n_1 = -14 \vee n_2 = 15$

La prima soluzione non è accettabile, perché $-14 \notin \mathbb{N}$, mentre la seconda sì.
Risposta
I partecipanti sono 15.

I problemi svolti offrono una **guida per la risoluzione di un problema** che ha come modello algebrico un'equazione o un sistema

Gli esercizi di lezione

Determina l'equazione della parabola che soddisfa le condizioni indicate. In seguito traccia la parabola.

148 SEGUI LA TRACCIA **Determinare l'equazione di una parabola con il vertice su uno degli assi**

a. Il vertice è sull'asse x, l'asse di simmetria ha equazione $x = \frac{3}{4}$, il punto $P(1; -2)$ appartiene alla parabola.

b. Il vertice è $V(1; 0)$, il punto $P(2; 1)$ appartiene alla parabola.

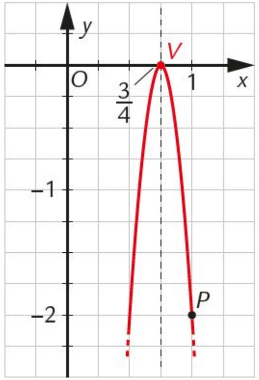
a. ① Il vertice è sull'asse x, quindi la parabola ha equazione del tipo $y = a(x - p)^2$.

② Dall'equazione dell'asse si può dedurre che $p = \frac{3}{4}$, quindi l'equazione è del tipo: $y = a\left(x - \frac{3}{4}\right)^2$.

③ Per determinare a, imponi il passaggio per il punto P: sostituendo le coordinate di P nell'equazione, si ottiene $-2 = a\left(1 - \frac{3}{4}\right)^2$.

Risolvi: $-2 = \frac{1}{16}a \quad \Leftrightarrow \quad a = -32$.

④ Scrivi l'equazione della parabola cercata (vedi figura): $y = -32\left(x - \frac{3}{4}\right)^2$.

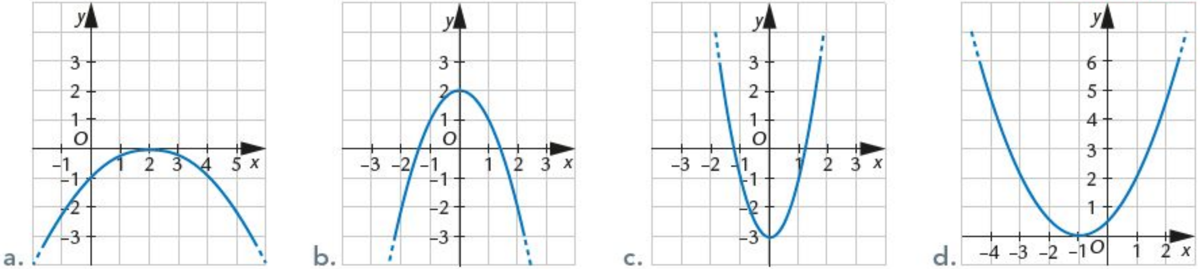


Gli esercizi di tipo **SEGUI LA TRACCIA** sono esercizi a completamento o guidati, per iniziare le studentesse e gli studenti allo svolgimento autonomo

Gli esercizi di lezione

137 ●○○ **LEGGI IL GRAFICO** Associa a ciascuno dei seguenti grafici di funzioni quadratiche la sua equazione, scelta fra quelle elencate in basso.

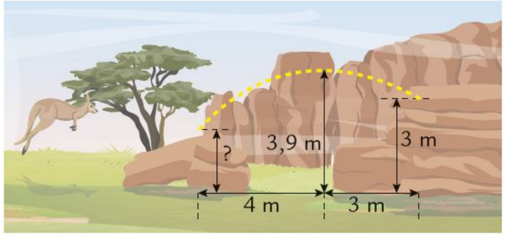
[aD, bB, cC, dA]



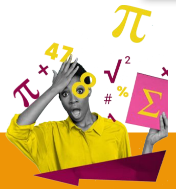
A. $y=\frac{1}{2}(x+1)^2$ B. $y=-x^2+2$ C. $y=2x^2-3$ D. $y=-\frac{1}{4}(x-2)^2$

196 ●●○ **LEGGI LA FIGURA** Un canguro compie un salto da un masso a un altro seguendo una traiettoria parabolica. La massima altezza raggiunta dal canguro è 3,9 m. In base ai dati in figura, determina da quale altezza rispetto al terreno è iniziato il salto.

[2,3 m]



Gli esercizi di tipo **LEGGI IL GRAFICO** e **LEGGI LA FIGURA** abituano all'interpretazione di rappresentazioni grafiche



Gli esercizi di lezione

482 MATH CONTEST The product of the roots of the quadratic equation $2x^2 + kx - 8 = 0$ is 3 plus the sum of the roots. What is k?

A -2 B $\frac{1}{2}$ C 7 D $\frac{15}{2}$ E 14

259 MATH CONTEST For what values of k will the equation $kx^2 + (k-3)x + k = 0$ have no real solutions?

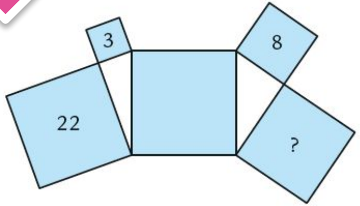
A $k \leq -3 \vee k > 1$ B $k < -3 \vee k \geq 3$ C $k < -3 \vee k > 1$ D $k \leq 1 \vee k > 3$ E $k < 1 \vee k > 3$

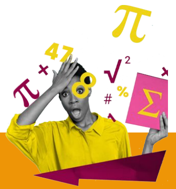
Esercizi **MATH CONTEST**, in inglese

Esercizi **DALLE GARE**, tratti dai Giochi di Archimede e da Kangourou

43 DALLE GARE La figura mostra cinque quadrati, per tre dei quali è indicata l'area in metri quadrati, e due triangoli rettangoli da essi delimitati. Qual è l'area, in metri quadrati, del quadrato indicato dal punto di domanda? [17]

(Kangourou Junior 2022)





Gli esercizi di lezione: autovalutazione a passi

CHECK POINT

1 **Vero o falso?** 1/10

a. Una frazione algebrica è un rapporto di polinomi. Ⓥ Ⓕ

b. Se il numeratore di una frazione algebrica assume valore 0, la frazione non esiste. Ⓥ Ⓕ

c. La frazione $\frac{2x-3}{5x+7}$, per $x=0$, non esiste. Ⓥ Ⓕ

d. La frazione $\frac{4m+2}{2m+3}$, per $m=0$, assume valore $\frac{2}{3}$. Ⓥ Ⓕ

[2 affermazioni vere e 2 false]

2 Determina le condizioni di esistenza delle seguenti frazioni algebriche. 1/10

a. $\frac{1}{x^3-x^2-12x}$ b. $\frac{1-3x^2}{4x^2-x^4}$

3 Determina il dominio e gli zeri delle seguenti funzioni. 2/10

a. $f(x)=\frac{2x^2-8}{3x+9}$ b. $f(x)=\frac{x^2-3x}{x^3+5x^2-9x-45}$

4 Semplifica le seguenti frazioni algebriche. 4/10

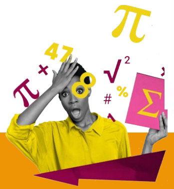
a. $\frac{x^2-1}{x^3-1}$ c. $\frac{a^2+a-6}{2a^2-18-a^3+9a}$

b. $\frac{2x^2+8x+8}{6x^2+12x}$ d. $\frac{ax+3x-a-3}{a^2-2a-15}$

5 **NELLA REALTÀ** In un gruppo di n gatti, m sono maschi (con $m<n$) e i restanti sono femmine. La massa media dei maschi è di 3,2 kg, mentre quella delle femmine è di 2,7 kg. Quale frazione esprime la massa media dell'intero gruppo? 2/10

Soluzioni a fine volume

I **CHECK POINT** sono momenti di **autoverifica parziale**, inseriti ogni due o tre lezioni



Gli esercizi per competenze

La sezione **Accresci le tue competenze** è una sezione finale di esercizi di **livello 2** o **livello 3**

Utilizzare le tecniche del calcolo e rappresentare graficamente

Risolvi le seguenti equazioni numeriche.

516 ●●○ $x^4-13x^2+36=0$ $[\pm 2; \pm 3]$

517 ●●○ $x^4-101x^2+100=0$ $[\pm 1; \pm 10]$

518 ●●○ $x^2(x+5)+6x(x+5)-7(x+5)=0$ $[-7; -5; 1]$

519 ●●○ $2x^2(x^2-4)+3x(x^2-4)+5(4-x^2)=0$ $\left[-\frac{5}{2}; \pm 2; 1\right]$

520 ●●● $\left\{\left[\left(x+\frac{2x}{x+1}\right)\cdot\frac{x^2-2x-3}{x^2+2x-3}-x-1\right]:\left(3-\frac{x-3}{x^2-1}\right)+\frac{x+2}{x+1}\right\}^2=\frac{2}{x^4-x^2}$ [Impossibile]

521 ●●● $\left\{\left[1+\left(2a-1-\frac{4a^2}{2a+1}\right)\left(1+\frac{a}{a+1}\right)\right]^2-\frac{a^2-2a}{a^2-1}\right\}\cdot\frac{a^2+2a+1}{4a}=\frac{1}{2}$ [2]

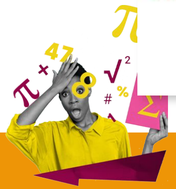
522 ●●● $\frac{y^2+2y}{2-3y}\left\{\left[\left(\frac{y+2}{y-2}+\frac{y-2}{y+2}\right):\frac{y^2+4}{y-2}-\frac{1}{y}\right]^2-\frac{1}{y^2+2y}\right\}=\frac{1}{2y}$ [Impossibile]

523 ●●● **Con i parametri** Determina per quale valore di k le due equazioni:

$k(x-1)+(2k-1)x=(k+2)(2x-1)$ e $(2x-3)^2-(2x+3)^2=(x-2)(x+2)+(1-x)(1+x)$

a. sono equivalenti; $[k=-11]$

b. hanno soluzioni reciproche. $\left[k=\frac{19}{4}\right]$



Interpretare rappresentazioni grafiche e dati

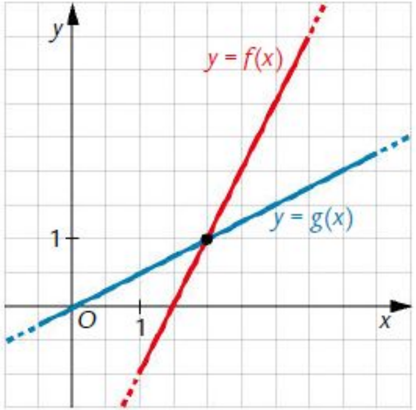
551 In riferimento alla figura, qual è l'insieme delle soluzioni della disequazione $\dfrac{f(x)}{g(x)} \leq 0$?

A $x < 0 \vee x \geq 3$

B $0 < x \leq \dfrac{3}{2}$

C $x < 0 \vee x \geq 2$

D Nessuno dei precedenti



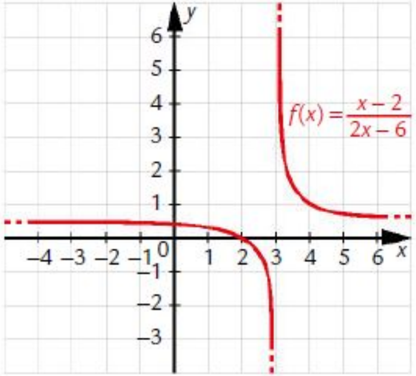
552 In figura è rappresentata una funzione omografica, di cui è data l'equazione.
Deduci dal grafico le soluzioni delle seguenti equazioni, disequazioni e del seguente sistema:

a. $f(x) = 0$

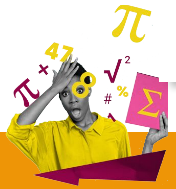
b. $f(x) = 1$

c. $f(x) < 0$

d. $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) \leq 1 \end{cases}$



[a. $x = 2$; b. $x = 4$; c. $2 < x < 3$; d. $x \leq 2 \vee x \geq 4$]



Gli esercizi per competenze

Risolvere problemi e costruire modelli

255 Un gruppo di turisti stranieri è nel nord Italia e comincia la sua visita dalle città di Torino, Milano, Genova e Bologna.




a. Calcola la probabilità che il tour passi da Milano prima che da Genova. [50%]

b. Stabilisci se è vero o falso che la probabilità di iniziare il tour da una città è la stessa di finirlo in quella città. [Vero]

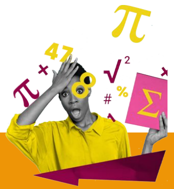
Ragionare, giustificare, argomentare

559 CON PAROLE TUE Spiega a un tuo compagno o una tua compagna i concetti elencati nella prima colonna della tabella seguente, senza utilizzare le parole elencate nella seconda colonna e nemmeno i loro derivati (come ad esempio retta/rettilineo). Metti per iscritto le tue «definizioni».

Concetto da spiegare	Termini proibiti
Legge di annullamento del prodotto	Nullo, moltiplicazione
Equazione letterale	Incognita, denominatore

560 CHI HA RAGIONE? Danys è convinto che, dati due numeri reali non nulli a e b, se $a > b$, allora è sempre vero che $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$. Martina invece afferma che non è sempre vero. Sapresti aiutarli a risolvere il problema, eventualmente utilizzando il grafico di un'opportuna funzione?

561 Considera l'equazione $x - 5 = 1$, che ha come soluzione $x = 6$. Nell'equazione $\frac{x-5}{P(x)} = \frac{1}{P(x)}$ sapresti scrivere, al posto di $P(x)$, un polinomio opportuno in modo che l'equazione risulti impossibile?



L’autovalutazione finale

Verifica

In HUB Test altri esercizi per le tue attività in classe

DEAFLIX

Playlist: **Sistemi lineari**

1 Risolvi i seguenti sistemi con il metodo che ritieni più opportuno:

a. $$\begin{cases} \left(\frac{1}{2}x-1\right)\left(\frac{1}{2}x+1\right)+y+\frac{3}{4}x^2=(x-1)(x-2) \\ 2x-(y-1)^2=(2-y)(2+y) \end{cases}$$

b. $$\begin{cases} \frac{1}{4}(x-y+1)-\frac{1}{2}\left(x-\frac{x+y}{3}\right)=\frac{2x-3y}{12} \\ \left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=(x+1)(x-1)+2y+6 \end{cases}$$

2 Considerando le condizioni di esistenza relative alla prima equazione, verifica che il sistema seguente è impossibile:

$$\begin{cases} \frac{1}{2x+2y}=\frac{x+y+1}{x^2-y^2} \\ 2x+3y=-1 \end{cases}$$

3 Discuti e risolvi il seguente sistema letterale: $\begin{cases} (2-a)x-y=1 \\ 3x-(a+2)y=3 \end{cases}$

4 Risolvi il seguente sistema a tre equazioni in tre incognite con il metodo che ritieni più opportuno.

$$\begin{cases} 2x+z=y+1 \\ x-y=\frac{1}{2}z-1 \\ 2x+y-2z=2 \end{cases}$$

5 Aumentando la misura del lato AB di un rettangolo $ABCD$ di 3 cm e diminuendo la misura di BC di 4 cm, il rettangolo si trasforma in un quadrato equivalente. Determina le misure dei lati del rettangolo.

6 Il signor Giuseppe sta costruendo una casetta in legno per il nipote e si reca in ferramenta per tre volte consecutive ad acquistare viti di tre dimensioni diverse. Nella tabella qui di seguito sono riportate le lunghezze e il numero di viti che compra ogni volta.

	8,4 cm	10 cm	12 cm
Prima volta	100	100	100
Seconda volta	50	80	20
Terza volta	20	30	10

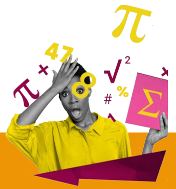
La prima volta Giuseppe compra 3100 g di viti e la seconda 1460 g. Sapendo che la massa di una vite da 8,4 cm è 2 g in meno di quella di una vite da 10 cm, qual è la massa di viti comprate la terza volta?

Per il recupero:
Quaderno 2 - M Sistemi lineari

VALUTAZIONE								
Esercizio	1	2	3	4	5	6	Totale
Punteggio massimo	1,25 · 2 = 2,5	1,25	1,5	1,5	1,25	2	10
Punteggio ottenuto							

Soluzioni a fine volume

Alla fine di ogni unità è presente una **verifica conclusiva**



Perché «una matematica sostenibile»?

INCLUSIONE
L'istruzione è un diritto universale: ogni persona, con i suoi bisogni e le sue specificità, ha diritto a contenuti accessibili e adeguati.

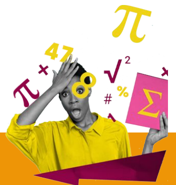
EDUCAZIONE CIVICA
È al cittadino e alla cittadina di domani che guarda la scuola. L'Agenda 2030 verso il 2050, la sostenibilità e la salvaguardia del Pianeta sono al centro di tutti i nostri contenuti,

STEM
Scienza, Tecnologia, Ingegneria e Matematica sono i principali campi in cui si sviluppa l'innovazione sostenibile di un Paese

PARITÀ DI GENERE
Crediamo in una società che dà pari opportunità a ogni persona, proponiamo modelli che corrispondono a una visione pluralista e ci impegniamo a usare un linguaggio e una comunicazione inclusivi,

ORIENTAMENTO
La scuola rappresenta il luogo privilegiato per accompagnare studenti e studentesse verso l'acquisizione di competenze orientative fondamentali per affrontare le scelte del futuro.

AMBIENTE DIGITALE
Proponiamo metodologie didattiche partecipative e nuovi format digitali per rendere studentesse e studenti protagonisti del proprio percorso di apprendimento.



Perché «una matematica sostenibile»?
Matematica per le cittadine e i cittadini

Educazione finanziaria

Prezzi, costi, profitti

Uno dei problemi economici fondamentali è la formazione del prezzo. Il **prezzo** di un bene o di un servizio si ottiene sommando tutti i **costi** di produzione e aggiungendo il **guadagno** del produttore.

$$\text{prezzo} = \text{costo} + \text{guadagno}$$

Il prezzo può riguardare:
- un'unità di bene o di servizio (un kilo, un'ora ecc.), in questo caso il prezzo si chiama anche **prezzo unitario**;
- l'intera quantità venduta a un cliente o l'intera quantità venduta in un periodo; in questo caso il prezzo si chiama anche **ricavo** o **fatturato**.

ESEMPIO 19 Calcolare il prezzo unitario e il ricavo

1. Se un'impresa agricola vende 10 quintali di frumento al prezzo di 20,40 euro al quintale, il valore 20,40 è il prezzo unitario; il ricavo o fatturato di quella vendita si ottiene moltiplicando il prezzo unitario per la quantità:

$$\text{ricavo} = \text{prezzo} \cdot \text{quantità} \quad \rightarrow \quad \text{ricavo} = 20{,}40 \frac{\text{euro}}{\text{quintale}} \cdot 10 \text{ quintali} = 240 \text{ euro}$$

2. Se un'azienda vende 100 smartphone al prezzo complessivo di 30 000 euro, 30 000 euro è il ricavo e il prezzo unitario si ottiene dividendo il ricavo per il numero di pezzi:

$$\text{prezzo} = \frac{\text{ricavo}}{\text{quantità}} \quad \rightarrow \quad \text{prezzo} = \frac{30\,000 \text{ euro}}{100} = 300 \text{ euro (al pezzo)}$$

I **costi** sono di due tipi: variabili e fissi.
- I **costi variabili** dipendono dalla quantità prodotta e sono dati, tra l'altro, dal costo di acquisto delle materie prime o dei beni da rivendere;
- i **costi fissi** non dipendono da quanto si produce e sono dati dalle spese generali, ad esempio gli affitti, gli stipendi ecc.

Svolgi gli esercizi del box *Costi fissi e costi variabili* a pagina 191.

Il **guadagno** può essere stabilito in due modi: calcolando un ricarico sul costo, oppure un margine sul prezzo di vendita.
- $\text{ricarico} = \dfrac{\text{prezzo} - \text{costo}}{\text{costo}} \cdot 100\%$
- $\text{margine} = \dfrac{\text{prezzo} - \text{costo}}{\text{prezzo}} \cdot 100\%$

ESEMPIO 20 Calcolare il prezzo dato il guadagno

Un negozio acquista borse in pelle a 200 euro l'una.

1. Se decide di rivendere le borse con un ricarico del 60%, il prezzo di vendita si ottiene sommando al costo il 60% del costo stesso:

$$\text{prezzo} = 200 \text{ euro} + 200 \text{ euro} \cdot \frac{60}{100} = 320 \text{ euro}$$

2. Se decide di vendere le borse ottenendo un margine del 60%, il prezzo di vendita si ottiene risolvendo un'equazione lineare:

$$\text{prezzo} - \frac{60}{100} \cdot \text{prezzo} = 200 \text{ euro} \quad \Leftrightarrow \quad \text{prezzo} = 500 \text{ euro}$$

Oppure si può calcolare il prezzo impostando una proporzione in cui si impone che il 40% del prezzo sia uguale al costo, cioè uguale a 200 euro:

$$\text{prezzo} : 100 = 200 : 40 \quad \Leftrightarrow \quad \text{prezzo} = 500 \text{ (euro)}$$

Dunque, a parità di percentuale il prezzo calcolato applicando un ricarico è inferiore al prezzo che si ottiene applicando un margine.

Il calcolo del profitto

Una volta stabiliti il prezzo unitario e il ricavo è possibile calcolare il **guadagno** o **profitto** come differenza tra ricavo e somma di costi variabili e fissi:

$$\text{profitto} = \text{ricavi} - (\text{costi variabili} + \text{costi fissi})$$

- Se il profitto risulta negativo, ad esempio −6500 euro, si ha una **perdita** di 6500 euro.
- Andare in **pareggio** significa non ottenere profitti né subire perdite, cioè ottenere dalle vendite un ricavo uguale alla somma dei costi. In questo caso il profitto risulta nullo:

$$\text{pareggio} \rightarrow \text{profitto} = 0$$

Si dice **punto di pareggio** (break even point) la quantità di prodotti o servizi che devono essere venduti per ottenere il pareggio, ossia la quantità per cui risulta che il profitto è uguale a zero.
La quantità che corrisponde al punto di pareggio è un indice importante soprattutto quando si deve valutare una nuova iniziativa commerciale. Il punto di pareggio va confrontato con la capacità produttiva e la capacità di vendita dell'azienda.
Se la quantità del punto di pareggio è molto inferiore alla quantità massima che l'azienda può produrre e alla quantità minima che l'azienda riuscirà a vendere, allora l'iniziativa commerciale ha buone possibilità di riuscire, cioè di generare un profitto.

ESEMPIO 21 Calcolare il punto di pareggio

Un'impresa produce magliette di cotone; supponiamo che i costi fissi giornalieri ammontino a 400 euro, il costo del filato e di altre materie prime sia di 8 euro per maglietta, mentre il prezzo di vendita risulti di 10 euro per maglietta.
Il profitto si ottiene calcolando la seguente espressione, che dipende dal numero x di magliette prodotte ogni giorno:

$$\text{profitto} = 10x - (8x + 400) \quad \Leftrightarrow \quad \text{profitto} = 2x - 400$$

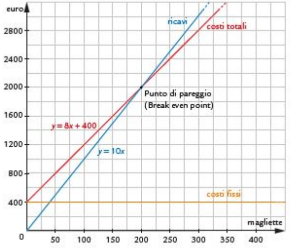
Il punto di pareggio si ha quando il profitto è nullo, ossia:

$$2x - 400 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 200 \text{ (magliette al giorno)}$$

Producendo e vendendo 200 magliette al giorno si coprono tutti i costi di produzione, ma non si ottiene alcun guadagno. Producendo meno di 200 magliette si va in perdita, oltre le 200 magliette si ottiene un profitto.

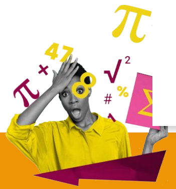
Il calcolo del punto di pareggio può essere visualizzato con un **grafico** in cui, tracciando delle rette nel piano cartesiano, si rappresentano i costi fissi, i costi variabili e i ricavi.
- I **costi fissi** si rappresentano con una semiretta orizzontale che interseca l'asse delle ordinate in corrispondenza del valore 400 (**Fig. 26**).
- I **costi totali** si rappresentano con una semiretta che ha origine in corrispondenza del valore 400 sull'asse delle ordinate e ha pendenza uguale a 8, che è il costo delle materie prime per ogni maglietta.
- I **ricavi** si rappresentano a partire dall'origine degli assi con una semiretta che ha pendenza uguale a 10, che è il prezzo di una maglietta.

Figura 26



Schede di **Educazione Finanziaria**, realizzate con la collaborazione del **Politecnico di Milano**

Ogni scheda rimanda a un **box di esercizi** inerenti l'argomento trattato



DEASCUOLA

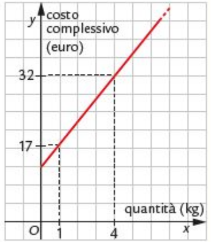
INSEGNARE MATEMATICA

Perché «una matematica sostenibile»?
Matematica per le cittadine e i cittadini

EDUCAZIONE FINANZIARIA

Costi fissi e costi variabili

601 LEGGI IL GRAFICO Il costo per la produzione di una merce è costituito da una parte fissa e da una parte variabile, dipendente dalla quantità di merce prodotta. La funzione che esprime il costo complessivo (comprensivo di costo fisso e costo variabile) per la produzione di una quantità x (in kg) di merce è rappresentata in figura.
Determina quanto si spenderebbe per la produzione di 18 kg di merce, specificando a quanto ammonta il costo fisso. [102 euro; 12 euro]



602 Una fabbrica può produrre 200 aspirapolvere al giorno al costo totale di 21 000 euro e 240 aspirapolvere al costo totale di 22 000 euro.

a. Determina il costo fisso e variabile e scrivi l'equazione della funzione del costo complessivo.

b. Se ogni aspirapolvere viene venduto a 129 euro, quanto vale il guadagno giornaliero nel caso si vendano 215 aspirapolvere?

[a. costi fissi: 16 000 euro; costo di un aspirapolvere: 25 euro; $y = 25x + 16\,000$; b. 6360 euro]

603 Un'azienda parigina produce souvenir per turisti. Il processo produttivo dell'azienda comporta un costo fisso di 15 000 euro mensili; il costo variabile ammonta a 4 euro per ogni souvenir. Ogni souvenir viene venduto a 6 euro.

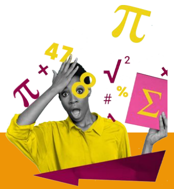
a. Determina l'espressione analitica e traccia il grafico delle funzioni $C(x)$, $R(x)$, $U(x)$ che esprimono il costo totale, il ricavo, il profitto relativi alla produzione e vendita mensile di una quantità x di souvenir.

b. In corrispondenza di una produzione di 5000 souvenir l'azienda avrebbe una perdita o un profitto? E di quanto?

c. In corrispondenza di una produzione di 12 000 souvenir l'azienda avrebbe una perdita o un profitto? E di quanto?

d. Determina il minimo numero di souvenir che devono essere prodotti in un mese per raggiungere il pareggio.

[$R(x) = 6x$, $C(x) = 4x + 15\,000$, $U(x) = 2x - 15\,000$; perderebbe 5000 euro; guadagnerebbe 9000 euro; 7500]



Perché «una matematica sostenibile»?
Matematica per le cittadine e i cittadini

EDUCAZIONE CIVICA

Tutti a tavola!

464 D **Con GeoGebra** Supponendo che un individuo debba assumere cibi per un equivalente energetico giornaliero di 2000 kcal, la Tab. 1 riporta le quantità di carboidrati, proteine e grassi di cui dovrebbe complessivamente cibarsi in un giorno, secondo la dieta mediterranea.

	Quantità assunta (g)	Apporto calorico (kcal)
carboidrati	300	1200
proteine	75	300
grassi	56	500

Tabella 1

Alimento	Carboidrati	Proteine	Grassi
pasta	80%	10%	1,5%
carne	1%	18%	3%
ortaggi	15%	3%	0,2%

Tabella 2

In Tab. 2 sono riportati invece i valori nutrizionali medi di pasta, carne e ortaggi, in percentuale sulla quantità di grammi assunti.
Supponi per semplicità di non prendere in considerazione le altre sostanze contenute nei vari cibi e di non considerare altre tipologie di alimenti.

a. Indicando con x, y e z rispettivamente le quantità in grammi di pasta, di carne e di ortaggi da assumere in un giorno, scrivi il sistema che permette di trovare tali quantità dalle tabelle 1 e 2.

b. Poiché il sistema trovato è molto complicato da risolvere, puoi utilizzare il foglio di calcolo di GeoGebra. È possibile realizzare la dieta mediterranea mangiando, in una giornata, soltanto pasta, carne e ortaggi? Perché?
[b. No]

465 D **Con GeoGebra** Un tuo amico vegetariano ti propone di sostituire i tre gruppi di alimenti dell'esercizio precedente con legumi, frutta e olio di oliva, i cui valori nutrizionali sono riportati in Tab. 3.

Alimento	Carboidrati	Proteine	Grassi
legumi	60%	25%	6%
frutta	25%	1%	0,3%
olio di oliva	–	–	98%

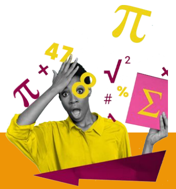
Tabella 3

a. Indicando con x la quantità in grammi di legumi e con y la quantità in grammi di frutta da mangiare in un giorno, determina x e y in modo che i due alimenti consentano di assumere la corretta quantità di carboidrati e proteine (arrotonda i valori trovati all'intero più vicino).

b. È possibile in questo caso regolare la quantità di olio di oliva giornaliera in modo tale da realizzare la dieta mediterranea assumendo in un giorno solamente questi ultimi tre tipi di alimenti? [a. Circa 279 e 531; b. $z = 38$]

Box di
Educazione civica

Nella **Guida del docente** è presente una ricca proposta di attività di **Educazione Civica**



Perché «una matematica sostenibile»?
Esplorazioni e laboratorio

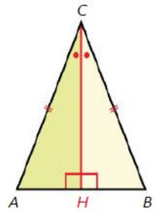


Figura 9

TEOREMA 3 Teorema sugli angoli alla base di un triangolo isoscele

Gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono congruenti.

Ipotesi: ABC è un triangolo; $AC \cong BC$ Tesi: $C\widehat{A}B \cong C\widehat{B}A$

DIMOSTRAZIONE

DIMOSTRAZIONE

1. Costruzione: tracciamo la bisettrice dell'angolo al vertice $A\widehat{C}B$ (Fig. 9).
2. Considerando i triangoli AHC e BHC possiamo affermare quanto segue:

$$\begin{cases} AC \cong BC & \text{per ipotesi} \\ CH \cong CH & \text{è in comune} \\ A\widehat{C}H \cong B\widehat{C}H & \text{per costruzione} \end{cases}$$

Dunque $AHC \cong BHC$ per il criterio LAL.

3. Poiché i due triangoli sono congruenti, hanno anche tutti gli altri elementi congruenti e, in particolare, gli angoli $C\widehat{A}B$ e $C\widehat{B}A$ sono congruenti: $C\widehat{A}B \cong C\widehat{B}A$.

Tutto il percorso di geometria è realizzato anche con **GeoGebra**: per ogni teorema di geometria esiste il collegamento a un file che contiene una scheda di **esplorazione** e una scheda con la **dimostrazione**

TEOREMA 2 Proprietà del trapezio isoscele

In un trapezio isoscele gli angoli adiacenti a ciascuna base sono congruenti.

Ipotesi: $AB \parallel CD$; $AD \cong BC$ Tesi: $\widehat{A} \cong \widehat{B}$; $\widehat{C} \cong \widehat{D}$

DIMOSTRAZIONE

DIMOSTRAZIONE

1. Costruzione: tracciamo le altezze DH e CK del trapezio (Fig. 3).
2. Considerando i triangoli AHD e CKB possiamo affermare quanto segue:

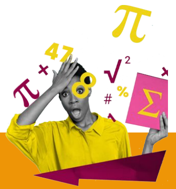
$$\begin{cases} AD \cong BC & \text{per ipotesi} \\ DH \cong CK & \text{perché distanze fra due rette parallele} \end{cases}$$

I due triangoli rettangoli AHD e CKB sono congruenti per il criterio di congruenza dei triangoli rettangoli; in particolare hanno $\widehat{A} \cong \widehat{B}$.

3. Gli angoli adiacenti alla base DC sono quindi congruenti perché supplementari di angoli congruenti (Teorema 1).

È valido anche il **teorema inverso** del precedente: ti verrà richiesto di dimostrarlo negli esercizi della pagina a fianco. Possiamo quindi affermare quanto segue.

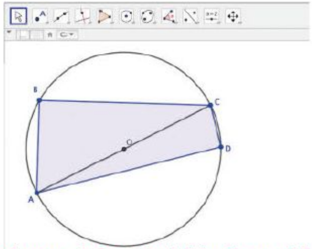
Un trapezio è isoscele se e solo se gli angoli adiacenti a ciascuna base sono congruenti.



Perché «una matematica sostenibile»? Esplorazioni e laboratorio

32 ATTIVITÀ CON GEOGEBRA

1. Disegna una circonferenza di diametro AC. Prendi un punto B su una delle due semicirconferenze e un punto D sulla semicirconferenza opposta.
2. Costruisci il quadrilatero $ABCD$ e analizzane lati, angoli e diagonali. È un quadrilatero particolare?
3. Ci sono posizioni di B e D per le quali il quadrilatero è un rettangolo? Una sola o diverse?
4. Ci sono posizioni di B e D per le quali il quadrilatero è un quadrato? Una sola o diverse?



[No, non necessariamente; sì; ce ne sono infinite. Sì; una sola]

Attività con **GeoGebra** con il file allegato che può essere anche realizzato in classe

Box di laboratorio con **GeoGebra**

LABORATORIO CON GEOGEBRA — STEM

163 **Gatti e similitudine**

a. In alcune delle immagini seguenti le sembianze del gatto sono le stesse, mentre in altre risultano deformate: contrassegna con una X le prime, misura con il righello i lati dell'immagine e completa poi la tabella.

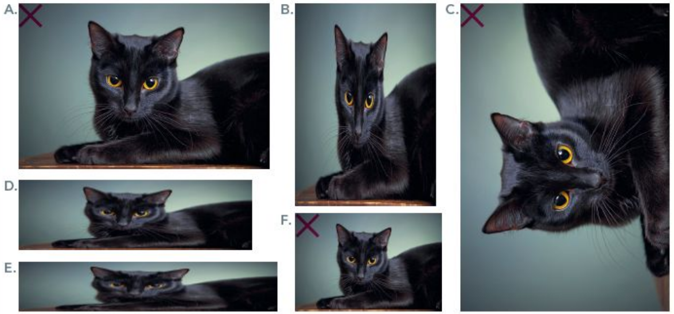


Immagine	Lato maggiore (cm)	Lato minore (cm)	Rapporto tra lato minore e lato maggiore
a.	6,4	4,2	0,66
c.	7,9	5,3	0,67
f.	3,7	2,5	0,68

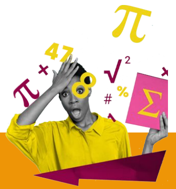
Tenuto conto delle approssimazioni delle misure, che cosa puoi affermare riguardo al rapporto tra i lati delle varie immagini?

b. Riporta la tabella precedente, senza la prima colonna, nel foglio di calcolo di GeoGebra e, in una cella a scelta, calcola la media aritmetica dei rapporti fra i lati. Che valore ottieni?

c. Crea una lista di punti selezionando le prime due colonne della tabella, in modo che le misure del lato maggiore siano le ascisse e le misure del lato minore siano le ordinate. Come risultano i punti così disegnati?

d. Disegna la retta passante per l'origine e avente pendenza uguale alla media di rapporti prima calcolata. Che cosa puoi concludere?

[b. 0,67]



DEASCUOLA

Perché «una matematica sostenibile»? Educare al futuro

LABORATORIO CON GEOGEBRA | S T E M | CAPOLAVORO

Equazioni in laboratorio

304 Ti proponiamo un **esperimento di fisica** che puoi realizzare con una caraffa graduata, di capacità almeno uguale a 1 litro, dell'acqua e una bilancia.

a. Misura la massa della caraffa vuota e aggiungi di volta in volta 100 cm^3 di acqua, annotando ogni volta la massa corrispondente, in grammi, in una tabella.

Volume acqua (cm^3)	0	100	200	300	400	500	600	700	800
Massa caraffa con acqua (g)									

Indica con:

- V il volume dell'acqua;
- m la massa della caraffa con l'acqua;
- m_c la massa della caraffa vuota;
- d la densità dell'acqua.

b. Per la caraffa che hai usato, quanto vale m_c?

c. Inserisci i dati in un foglio di calcolo e rappresenta su un piano cartesiano i punti corrispondenti (con GeoGebra devi usare lo strumento **Lista di punti**). In questo modo puoi visualizzare la rappresentazione grafica della relazione tra massa e volume.
I punti si dispongono approssimativamente lungo una **retta**, perché la relazione tra le due grandezze m e V è lineare: $m = d \cdot V + m_c$. Nel file allegato trovi una simulazione per una caraffa di 209 g.

d. Calcola il valore di d risolvendo l'equazione $m = d \cdot V + m_c$ per ogni coppia di valori $(V; m)$ riportati nella tabella che hai compilato. Dovresti ottenere circa 1 g/cm^3, perciò l'equazione può essere riscritta così:
$m = (1\ \text{g/cm}^3) \cdot V + m_c$

e. Con la funzione così costruita, possiamo ricavare i valori che non abbiamo: ad esempio possiamo trovare quale sarebbe il volume corrispondente a una massa di 620 g.
Scrivi l'equazione che modellizza il problema e ricava il valore del volume richiesto.

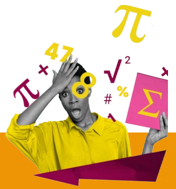
L'attività che abbiamo descritto finora è semplice, ma c'è un aspetto molto importante da tenere in considerazione. Una misura non è mai perfetta: è sempre affetta da imprecisione.
Ciò dipende sia dallo strumento, sia da eventuali errori commessi da chi esegue la misura.
È questo il motivo per cui al punto c abbiamo scritto che i punti sono «approssimativamente» disposti lungo una retta, e al punto d abbiamo scritto che dovresti ottenere «circa» 1 g/cm^3.

f. Descrivi tutti gli accorgimenti che secondo te si possono adottare per ridurre al massimo l'entità degli errori di cui abbiamo parlato.

g. Alla luce delle considerazioni fatte finora, spiega perché tu stesso potresti ottenere risultati leggermente differenti ripetendo più volte il medesimo esperimento.

h. Supponi che, nel grafico costruito al punto c, ci sia un punto decisamente non allineato con gli altri. Quale tipo di errore è stato probabilmente commesso?

La matematica nell'ambito delle **discipline STEM**



Perché «una matematica sostenibile»?
Educare al futuro

EDUCAZIONE CIVICA

S T E M

308 Il metabolismo basale

Il metabolismo basale (MB) è la quantità minima di energia che una persona consuma, in condizioni di totale rilassamento, per svolgere le funzioni vitali fondamentali: respirazione, circolazione sanguigna, digestione, attività del sistema nervoso, ecc.

La formula di Harris-Benedict permette di calcolare il metabolismo basale di una persona, espresso in kilocalorie (kcal), in funzione della massa m in chilogrammi, dell'altezza h in centimetri e dell'età e in anni.

Per gli uomini la formula è la seguente:

$MB_m = 66{,}5 + 13{,}7m + 5{,}0h - 6{,}8e$

Per le donne è:

$MB_f = 655 + 9{,}6m + 1{,}8h - 4{,}7e$

Paese	Statura media uomini (cm)	Statura media donne (cm)
Italia	177,8	165,4
Islanda	180,9	167,6
Cina	173,0	160,0

Nella tabella a destra è riportata la statura media di uomini e donne italiani, islandesi e cinesi. Nei calcoli successivi fai riferimento a questi valori.

a. A quali valori di massa corrisponde un metabolismo basale di 1500 kcal per donne e uomini di 40 anni e media statura dei tre paesi? E per donne e uomini di 50 anni?

b. Considera ancora uomini e donne di 40 anni dei tre paesi. Per quale valore di massa i maschi hanno un metabolismo basale uguale a quello delle femmine? Stabilisci se i risultati trovati hanno senso, relativamente al fatto che si tratta di persone adulte.

c. Ripeti i calcoli che hai svolto al punto 2 considerando questa volta persone di 50, 60 e 70 anni. Hanno senso in questo caso i risultati trovati? Fornisci una loro interpretazione.

[**a.** Uomini: risultati tra 58 kg e 67 kg; Donne: risultati tra 76 kg e 83 kg; **b.** Cina: 13,54 kg; Italia: 10 kg; Islanda: 7 kg; **c.** Risultati tra 10 kg e 22 kg]

AI AL LAVORO CON L'INTELLIGENZA ARTIFICIALE

Usa l'intelligenza artificiale per approfondire l'argomento proposto, ponendo la seguente domanda al chatbot che preferisci.

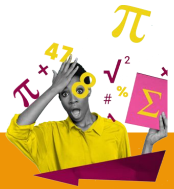
- In che modo il metabolismo basale è collegato alla salute generale di una persona?

A partire dalla risposta ottenuta, ritieni importante per una persona adulta conoscere il proprio metabolismo basale? Per quali motivi?

La matematica nell'ambito delle **discipline STEM**

Uso critico e consapevole dell'**Intelligenza Artificiale**

Nella **Guida del docente** è approfondito il tema dell'**Intelligenza Artificiale**



Perché «una matematica sostenibile»?
Inclusione e recupero

Sintesi | I sistemi lineari

Sistema lineare

- Un sistema lineare è un insieme di equazioni lineari nelle stesse incognite che devono essere verificate contemporaneamente. Un sistema di due equazioni nelle due incognite x e y si dice in **forma normale** se è scritto come segue:
$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$
- I numeri reali a, b, a', b', si **chiamano coefficienti** del sistema; i numeri reali c e c' si dicono **termini noti**.
- Due sistemi nelle stesse incognite si dicono **equivalenti** se hanno lo stesso insieme di soluzioni.

Esempio

Il sistema $\begin{cases} 2x+9y=1 \\ 11x+y=2 \end{cases}$ è equivalente a $\begin{cases} 4x+18y=2 \\ -11x-y=-2 \end{cases}$ perché lo sono le rispettive equazioni. Moltiplicando per 2 i termini della prima equazione del 1° sistema si ottiene la prima equazione del 2° sistema. Moltiplicando per –1 i termini della seconda equazione del 1° sistema si ottiene la seconda equazione del 2° sistema.

Sistemi determinati, indeterminati, impossibili

Un sistema di due equazioni in due incognite si dice:

- **determinato** se ha una sola soluzione; le due rette che rappresentano le equazioni hanno un solo punto di intersezione e la soluzione del sistema è la coppia di coordinate di tale punto;
- **indeterminato** se ha infinite soluzioni; le due rette che rappresentano il sistema sono coincidenti;
- **impossibile** se il sistema non ha soluzioni; le due rette che rappresentano il sistema sono parallele.

Risoluzione con il metodo di sostituzione

Sia dato il sistema $\begin{cases} x-y=3 \\ 9x-7y=7 \end{cases}$

a. Si risolve la prima (o la seconda) equazione rispetto a x (oppure a y) $\begin{cases} x=3+y \\ 9x-7y=7 \end{cases}$

b. Si sostituisce l'espressione trovata nell'altra equazione $\begin{cases} x=3+y \\ 9(3+y)-7y=7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=3+y \\ y=-10 \end{cases}$

c. Si sostituisce $y=-10$ nella prima equazione $\begin{cases} x=3-10 \\ y=-10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-7 \\ y=-10 \end{cases} \rightarrow S=\{(-7;-10)\}$

Risoluzione con il metodo di addizione e sottrazione

Sia dato il sistema $\begin{cases} 2x+y=9 \\ 3x+7y=19 \end{cases}$

a. Si moltiplicano i termini della prima equazione per 7 e si effettua la sottrazione tra le due equazioni:
$\begin{cases} 14x+7y=+63 \\ 3x+7y=19 \end{cases}$

b. Si ottiene: $11x+0=44 \quad \rightarrow \quad x=4$

c. Si sostituisce nella prima equazione iniziale ottenendo $y=1 \quad \rightarrow \quad S=\{(4;1)\}$.

Risoluzione con il metodo del confronto

Sia dato il sistema $\begin{cases} x-11y=1 \\ x-7y=9 \end{cases}$

a. Si risolvono le due equazioni rispetto alla medesima incognita, in questo caso rispetto alla x. $\begin{cases} x=1+11y \\ x=9y+7y \end{cases}$

b. Per la proprietà transitiva i secondi membri delle due equazioni sono uguali
$1+11y=9+7y \quad \rightarrow \quad 4y=8 \quad \rightarrow \quad y=2$

c. Si sostituisce $y=2$ in una delle equazioni del sistema iniziale, per esempio nella prima
$x-11(2)=1 \quad \rightarrow \quad x=23$

L'insieme delle soluzioni è $S=\{(23;2)\}$.

86 | UNITÀ 12 • I sistemi lineari

Matrice quadrata di ordine 2

Una **matrice quadrata di ordine 2** è una tabella con due righe e due colonne, contenente numeri reali, detti elementi della matrice.

In simboli: $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

Si dice **determinante** della matrice quadrata di ordine 2 il numero che si ottiene sottraendo al prodotto degli elementi della diagonale principale il prodotto degli elementi della diagonale secondaria.

In simboli: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

Matrici e sistemi lineari

La matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$ associata al sistema $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ si chiama **matrice di coefficienti** del sistema. Il suo determinante D si chiama **determinante del sistema**.

Si chiama **determinante associato a un'incognita** il determinante della matrice che si ottiene sostituendo la colonna dei termini noti alla colonna dei coefficienti di un'incognita. In simboli:

$D=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=ab'-ba'$;

$D_x=\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}=cb'-bc'$; $\quad D_y=\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}=ac'-ca'$

Teorema di Cramer

Dato un sistema lineare di due equazioni in due incognite, ridotto a forma normale, in cui almeno uno dei coefficienti sia diverso da 0, vale quanto segue:

- se $D \neq 0$ il sistema è **determinato** e la soluzione è la coppia è $\left(\frac{D_x}{D}; \frac{D_y}{D}\right)$;
- se $D=0$ e $D_x=0$ e $D_y=0$, il sistema è **indeterminato**;
- se $D=0$ e $D_x \neq 0$ oppure $D_y \neq 0$, il sistema è **impossibile**.

Esempio

Risolvere il sistema: $\begin{cases} 3x-y=5 \\ x+y=3 \end{cases}$

$D=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=3+1=4$; $D_x=\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=5+3=8$; $D_y=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=9-5=4$.

Il sistema è determinato e ha soluzione $x=\frac{D_x}{D}=\frac{8}{4}=2$; $y=\frac{D_y}{D}=\frac{4}{4}=1 \rightarrow S=\{(2;1)\}$.

AL LAVORO CON L'INTELLIGENZA ARTIFICIALE

TECNOLOGIA Usa l'intelligenza artificiale per approfondire gli argomenti proposti, ponendo la seguente domanda al chatbot che preferisci.

- Esistono diversi metodi per risolvere i sistemi lineari, per esempio sostituzione, addizione e sottrazione, confronto, uso di matrici. Quale sceglierebbe un computer e in base a quali criteri?

Rifletti sulla risposta e paragona i criteri di scelta del computer con le tue preferenze. In particolare, considera anche la possibilità di risolvere un problema graficamente.

Criterio dei rapporti

Dato un sistema lineare in forma normale, con a', b' e c' diversi da 0, vale quanto segue.

Se $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ il sistema è determinato.

Se $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ il sistema è indeterminato.

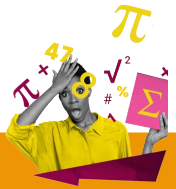
Se $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ il sistema è impossibile.

Sintesi | 87

Al termine di ogni unità di teoria è presenta la **sintesi dei contenuti**, arricchita da un box in cui viene posta una domanda all'**Intelligenza Artificiale** per il ripasso o l'approfondimento

Perché «una matematica sostenibile»?
Inclusione e recupero

Raccolta di playlist con **oltre 500 video di teoria e di esercizi risolti** proposti sugli **argomenti fondamentali** di tutto il quinquennio, intervallati da esercizi autocorrettivi



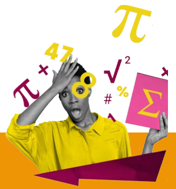
GRAZIE

SPAZIO ALLE DOMANDE

Scopri “Nuova matematica allo specchio”

Consulta la [scheda sul sito]

Contatta il tuo agente di zona:
https://deascuola.it/rete-commerciale/



I prossimi appuntamenti

https://formazione.deascuola.it/insegnare-matematica-ss2g/

Webinar

INSEGNARE MATEMATICA

Insegnare con... Tutti i colori della Matematica edizione Verde

05 Marzo 2024, 15:00

con: Leonardo Sasso

Iscriviti qui

Webinar

INSEGNARE MATEMATICA

Insegnare con... Tutti i colori della Matematica edizione Pro

13 Marzo 2024, 15:00

con: Leonardo Sasso

Iscriviti qui